Лекція №9

Розділ 2. Етапи побудови математичної моделі.

Математична постановка задачі моделювання

Закінчена концептуальна постановка дозволяє сформулювати математичну постановку задачі моделювання, що включає сукупність різних математичних співвідношень, що описують поведінку та властивості об'єкта моделювання.

Математична постановка задачі моделювання- це сукупність математичних співвідношень, що описують поведінку та властивості об'єкта моделювання.

Як було зазначено у розділі 1, сукупність математичних співвідношень визначають вид оператора моделі. Найбільш простий вид оператор моделі має у разі системи рівнянь алгебри. Подібні моделі можна назвати моделями апроксимаційного типу, так як для їх отримання часто використовують різні методи апроксимації наявних експериментальних даних про поведінку вихідних параметрів об'єкта моделювання в залежності від вхідних параметрів та впливів зовнішнього середовища, а також значень внутрішніх параметрів об'єкта.

Однак моделі такого типу мають обмежену область застосування. Для створення математичних моделей складних систем і процесів, що застосовуються для широкого класу реальних завдань, як уже зазначалося вище, потрібно залучення великого обсягу знань, накопичених у дисципліні (а в деяких випадках - і в суміжних областях). У більшості дисциплін (особливо – у природно – наукових) ці знання сконцентровані в аксіомах, законах, теоремах, які мають чітке математичне формулювання.

Слід зазначити, що у багатьох галузях знань (механіці, фізиці, біології тощо.) прийнято виділяти закони, справедливі всім об'єктів дослідження цій галузі знань, і співвідношення, що описують поведінка окремих об'єктів чи його сукупностей. До перших у фізиці і механіці, наприклад, відносяться рівняння балансу маси, кількості руху, енергії і т.д., справедливі за певних умов для будь-яких матеріальних тіл, незалежно від їх конкретної будови, структури, стану, хімічного складу. Рівняння даного класу підтверджені величезною кількістю експериментів, добре вивчені і тому застосовуються у відповідних математичних моделях як даність. Співвідношення другого класу у фізиці та механіці називають визначальними співвідношеннями, або фізичними рівняннями, або рівняннями стану. Співвідношення цього класу встановлюють особливості поведінки матеріальних об'єктів або їх сукупностей (наприклад, рідин, газів, пружних чи пластичних середовищ тощо) при впливах зовнішніх факторів; як класичні приклади визначальних співвідношень можна навести закон Гука в теорії пружності або рівняння Клапейрона для ідеальних газів. Очевидно, визначальні співвідношення повинні відображати реальну атомно-молекулярну будову досліджуваних матеріальних об'єктів. Співвідношення другого класу набагато менш вивчені, а деяких випадках їх доводиться встановлювати самому досліднику (особливо - під час аналізу об'єктів, які з нових матеріалів). Необхідно відзначити, що визначальні співвідношення є основним елементом, "серцевиною" будь-якої математичної моделі фізико-механічних процесів. Саме помилки у виборі чи встановленні визначальних співвідношень призводять до кількісно (а деяких випадках - і якісно) неправильним результатам моделювання.

Сукупність математичних співвідношень зазначених двох класів визначає оператор моделі. У більшості випадків оператор моделі включає систему звичайних диференціальних рівнянь (ОДП), диференціальних рівнянь у приватних похідних (ДУЧП) та/або інтегро-диференціальних рівнянь (ІДП). Для забезпечення коректності постановки завдання до системи ОДУ або ДУЧП додаються початкові або граничні умови, які, у свою чергу, можуть бути співвідношенням алгебри або диференціальними різного порядку.

Можна виділити кілька найпоширеніших типів завдань, що виникають для систем ОДУ або ДУЧП:

- *завдання Коші, або завдання з початковими умовами,* в якій за заданими в початковий момент часу змінними (початковими умовами) визначаються значення цих змінних змінних для будь-якого моменту часу;
- *початково - граничне, або крайове завдання*, коли умови на потрібну функцію вихідного параметра задаються в початковий момент часу для всієї просторової області і на межі останньої - у кожний момент часу (на досліджуваному інтервалі);
- *завдання на власні значення*, коли формулювання завдання входять невизначені параметри, зумовлені з умови якісного зміни поведінки системи (наприклад, втрата стійкості стану рівноваги чи стаціонарного руху, поява періодичного режиму, резонанс тощо.).

Для контролю правильності отриманої системи математичних співвідношень слід виконувати низку обов'язкових перевірок:

- *Контроль розмірності,* що включає правило, згідно з яким прирівнюватися і складатися можуть тільки величини однакової розмірності. При переході до обчислень ця перевірка поєднується з контролем використання однієї й тієї системи одиниць для значень всіх параметрів.

- *Контроль порядків*, Що складається з грубої оцінки порівняльних порядків величин, що складаються один з одним, і винятком малозначимих параметрів. Наприклад, якщо виразу x+y+z=0 внаслідок оцінки встановлено, що з області значень параметрів моделі $|z| << |x|$ та $|z| << |y|$, то третім доданком у вихідному виразі можна знехтувати.
- *Контроль характеру залежностей*: напрям і швидкість зміни вихідних параметрів моделі, що випливають з виписаних математичних співвідношень, повинні бути такими, як це випливає безпосередньо з "фізичного" змісту моделі, що вивчається.
- *Контроль екстремальних ситуацій*. Дуже корисно простежити за тим, який вид набувають математичних співвідношень, а також результати моделювання, якщо параметри моделі або їх комбінації наближаються до гранично допустимих для них значень - найчастіше до нуля чи нескінченності. У подібних екстремальних ситуаціях модель часто спрощується, а математичні співвідношення набувають наочнішого сенсу і можуть бути простіше перевірені. Наприклад, у завданнях механіки деформованого твердого тіла деформація матеріалу в досліджуваній області за ізотермічних умов можлива лише при додатку навантажень, відсутність навантажень повинна призводити до відсутності деформацій.
- *Контроль граничних умов*, що включає перевірку, що граничні умови дійсно накладені, що вони використані в процесі побудови шуканого рішення і значення вихідних параметрів моделі насправді задовольняють даним умовам.
- *Контроль фізичного змісту* полягає у перевірці фізичного чи іншого, залежно від характеру завдання, сенсу вихідних та проміжних співвідношень, що з'являються у міру конструювання моделі.
- *Контроль математичної замкнутості*, Що полягає у перевірці того, що виписана система математичних співвідношень дає можливість, і до того ж однозначно, вирішити поставлене математичне завдання. Наприклад, якщо завдання звелося до пошуку n невідомих із деякої системи алгебраїчних або трансцендентних рівнянь, то контроль замкнутості полягає у перевірці того факту, що кількість незалежних рівнянь має бути n. Якщо їх менше n, то треба встановити рівняння, що відсутні, а якщо їх більше n, то або рівняння залежні, або при їх складанні допущена помилка. Однак якщо рівняння виходять з експерименту або в результаті спостережень, то можлива постановка задачі, при якій кількість рівнянь перевищує n, але самі рівняння задовольняються приблизно, а рішення шукається, наприклад, за методом найменших квадратів. Нерівностей серед умов також може бути будь-яке число, як це буває, наприклад, у задачах лінійного програмування

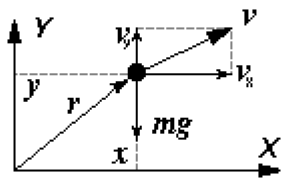
Властивість математичної замкнутості системи математичних співвідношень тісно пов'язані з введеним Ж. Адамаром поняттям коректно поставленої математичної завдання, тобто завдання, на яку рішення існує, єдино і безперервно залежить від вихідних даних. У разі рішення вважається безперервним, якщо малому зміні вихідних даних відповідає досить мала зміна рішення. Поняття коректності завдання має велике значення у прикладній математиці. Наприклад, чисельні методи рішення виправдано застосовувати лише до коректно поставлених завдань. Слід зазначити, що далеко не всі завдання, що виникають на практиці, можна вважати коректними (наприклад, так звані обернені задачі). Доказ коректності конкретної математичної задачі є досить складною проблемою, вирішеною лише деякого класу математично поставлених завдань. У цьому плані перевірка математичної замкнутості менш складною проти перевіркою коректності математичної постановки. Нині активно досліджуються властивості некоректних завдань, розробляються методи вирішення. Аналогічно поняття коректно поставленого завдання можна запровадити поняття коректної математичної моделі.

Математична модель є коректною, якщо для неї виконуються всі контрольні перевірки: розмірності, порядків, характеру залежностей, екстремальних ситуацій, граничних умов, фізичного змісту та математичної замкнутості.

Приклад

Математична постановка задачі про баскетболіст

Математичну постановку завдання про баскетболіст можна подати як у векторній, так і в координатній формі.



А) Векторна форма

Знайти залежність від часу для векторних параметрів r(t) та v(t)з вирішення системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$m\frac{dv}{dt} = mg, \qquad v = \frac{dr}{dt} \tag{2.1}$$

за наступних початкових умов: $r(0) = 0, \qquad v(0) = v_o$. (2.2)

Обчислити параметр Δ як $\Delta = r_x(t_k) - r_{xk}$ (2.3)

де tk визначити з наступних умов $t_k > 0, \qquad v(t_k) < 0, \qquad y(t_k) = y_k$. (2.4)

Проеціюючи векторні співвідношення (2.1)-(2.4) на осі координат, отримаємо математичну постановку задачі про баскетболіст у координатній формі.

Б) Координатна форма

Знайти залежності x(t), y(t) і vx(t) і vy(t) з розв'язання системи диференціальних рівнянь:

$$m\frac{dv_x}{dt} = 0, \quad v_x = \frac{dx}{dt}, \qquad m\frac{dv_y}{dt} = -mg, \quad v_y = \frac{dy}{dt} \tag{2.5}$$

за наступних початкових умов:

$$x(0) = x_o, \qquad y(0) = y_o, \qquad v_x(0) = v_o\cos\alpha_o, \qquad v_y(0) = v_o\sin\alpha_o. \tag{2.6}$$

Обчислити параметр Δ як $\Delta = x(t_k) - x_k$, (2.7)

де tk визначити з умов $t_k > 0, \quad v(t_k) < 0, \quad y(t_k) = y_k$. (2.8)

Як можна бачити, з математичної точки зору завдання про баскетболіст звелося до завдання Коші для системи ОДУ першого порядку із заданими початковими умовами. Отримана система рівнянь є замкнутою, так як число незалежних рівнянь (4 диференціальних і 2 алгебраїчних) дорівнює кількості шуканих параметрів задачі ($x, y, v_x, v_y, \Delta, t_k$). Існування та єдиність розв'язання задачі Коші доведено математиками. Тому цю математичну модель вважатимуться коректною.

Математична постановка завдання ще абстрактніша, ніж концептуальна, оскільки зводить вихідне завдання до суто математичної (наприклад, до завдання Коші), методи вирішення якої досить добре розроблені. Вміння звести вихідну проблему до відомого класу математичних завдань та обґрунтувати правомочність такої відомості потребує високої кваліфікації математика-прикладника та особливо високо цінується у дослідницьких колективах.