

Лекція №8

Розділ 2. Етапи побудови математичної моделі.

Концептуальна постановка задачі моделювання

На відміну від змістовної концептуальна постановка завдання моделювання, як правило, формулюється членами робочої групи без залучення представників замовника на підставі розробленого на попередньому етапі технічного завдання з використанням наявних знань про об'єкт моделювання та вимог до майбутньої моделі.

Аналіз та спільне обговорення членами робочої групи всієї наявної інформації про об'єкт моделювання дозволяє сформувати змістовну модель об'єкта, що є синтезом когнітивних моделей, що склалися у кожного з членів робочої групи. На підставі змістовної моделі розробляється вже концептуальна або "природнича" (фізична, хімічна, біологічна і т.д.) постановка задачі моделювання, що служить основою для концептуальної моделі об'єкта.

Концептуальна постановка задачі моделювання- це сформульований у термінах конкретних дисциплін (фізики, хімії, біології тощо) перелік основних питань, що цікавлять замовника, а також сукупність гіпотез щодо властивостей та поведінки об'єкта моделювання.

Найбільші труднощі при формулюванні концептуальної постановки доводиться долати для моделей, що знаходяться на стику різних дисциплін. Відмінності традицій, понять і мов, використовуваних для описи тих самих об'єктів, є дуже серйозними перешкодами, що виникають під час створення " міждисциплінарних " моделей. Наприклад, такі поняття як "прибуток" і "баланс" викликають різні асоціації в економіста і математика-прикладника. Можна сказати, що когнітивні моделі, які стоять за цими поняттями, у цих двох фахівців зовсім різні. Якщо економіст, говорячи про прибуток і баланс, пов'язує з цими поняттями конкретне виробництво, ціну і собівартість продукції, то математика дані поняття виглядають більш формально, як результати вирішення деяких математичних співвідношень. При цьому практично неможливо навчити математика мислити як економіста, а економіста як математика. І той, і інший спосіб сприйняття має свої переваги та недоліки. Економіст ніколи не зробить помилок, які може наробити математик, звертаючись з параметрами моделі формально, без належних знань у предметній галузі. З іншого боку, використовуючи формальні перетворення математичних співвідношень, математик може отримати рішення, які дуже складно отримати економісту, який користується своїми підходами та методами (зазвичай – простішими з погляду математики). Тому ефективність діяльності робочої групи великою мірою залежить від

здатності її членів поставити себе на місце фахівця іншого профілю, вивчити його точку зору (тобто особливості його когнітивної моделі) та знайти певний компроміс, що враховує все цінне.

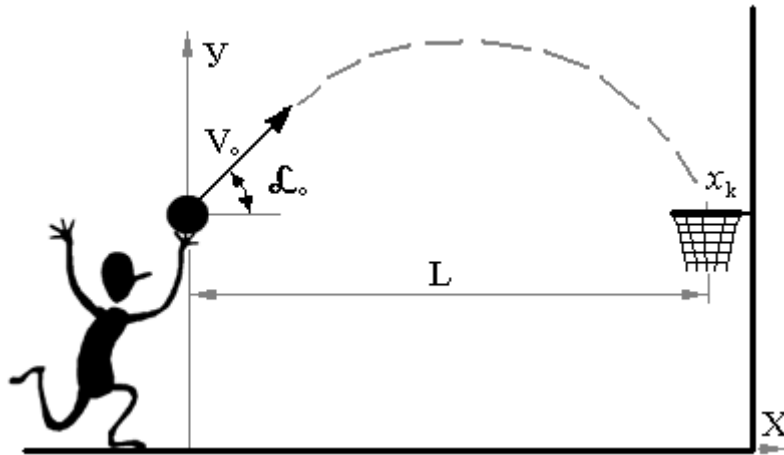
Як зазначалося вище, концептуальна модель будується як деяка ідеалізована модель об'єкта, записана в термінах конкретних (наприклад, природничих) дисциплін. Для цього формулюється сукупність гіпотез про поведінку об'єкта, його взаємодію з навколишнім середовищем, зміну внутрішніх параметрів. Як правило, ці гіпотези правдоподібні в тому сенсі, що для їх обґрунтування можуть бути наведені деякі теоретичні докази та експериментальні дані, що базуються на зібраній раніше інформації про об'єкт. У виборі та обґрунтуванні прийнятих гіпотез значною мірою проявляється мистецтво, досвід та накопичені знання членів робочої групи. З прийнятих гіпотез визначається безліч параметрів, описують стан об'єкта, і навіть перелік законів, управляючих зміною і взаємозв'язком цих параметрів між собою.

Приклад **Концептуальна постановка завдання про баскетболіст**

Рух баскетбольного м'яча може бути описаний відповідно до законів класичної механіки Ньютона.

Прийmemo такі гіпотези:

- об'єктом моделювання є баскетбольний м'яч радіусу R ;
- м'яч вважатимемо матеріальною точкою масою m , положення якої збігається з центром мас м'яча;
- рух відбувається у полі сил тяжіння з постійним прискоренням вільного падіння g і описується рівняннями класичної механіки Ньютона;
- рух м'яча відбувається в одній площині, перпендикулярній поверхні Землі та проходить через точку кидка та центр кошика;
- нехтуємо опором повітря та обуреннями, викликаними власним обертанням м'яча навколо центру мас.

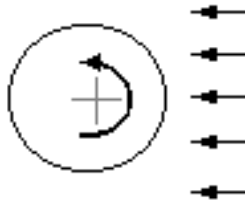


Відповідно до викладених гіпотез як параметри руху м'яча можна використовувати координати (x і y) і швидкість (її проекції v_x і v_y) центру мас м'яча. Тоді визначення положення м'яча будь-якої миті часу досить визначити закон руху центру мас м'яча, тобто. залежність координат x та y та проекцій вектора швидкості v_x та v_y центру м'яча від часу. В якості оцінки точності кидка D можна розглядати величину відстані по горизонталі (вздовж осі x) від центру кошика до центру м'яча, коли останній перетинає горизонтальну площину, що проходить через площину кільця кошика. Визначити закон руху матеріальної точки масою m під дією сили тяжіння, якщо відомі початкові координати точки x_0 та y_0 , її початкова швидкість v_0 та кут кидання α_0 . Центр кошика має координати x_k та y_k . Обчислити точність кидка $D=x(t_k)-x_k$, де t_k визначається з умов:

$$t_k > 0, v_y < 0, y(t_k) = y_k.$$

Розглянемо особливості наведеної у прикладі концептуальної постановки завдання про баскетболіст. Перша з перерахованих гіпотез особливо важлива, оскільки виділяє об'єкт моделювання. У разі об'єкт вважатимуться простим. Однак, як об'єкт моделювання можна розглядати систему ГРАВЕЦЬ-М'ЯЧ-КІЛЬЦЕ. Необхідна для опису подібної системи модель буде набагато складніше, оскільки ГРАВЦЬ у свою чергу представляє складну біомеханічну систему і його моделювання є далеко не тривіальним завданням. У цій ситуації вибір як об'єкт моделювання тільки М'ЯЧУ обґрунтований, оскільки саме його рух потрібно дослідити, а вплив ГРАВЦЯ можна врахувати досить просто через початкові параметри кидка. Гіпотеза про те, що м'яч можна вважати матеріальною точкою, широко застосовується для дослідження рухів тіл у механіці. У разі вона виправдана з симетрії форми м'яча і децимі радіусу м'яча проти характерними відстанями його переміщення. Передбачається, що м'яч є кулею з однаковою товщиною стінки.

Гіпотезу про застосування в даному випадку законів класичної механіки можна обґрунтувати величезним експериментальним матеріалом, пов'язаним з вивченням руху тіл поблизу поверхні Землі зі швидкостями набагато менше швидкості світла. Враховуючи, що висота польоту м'яча лежить у межах від 5 до 10 метрів, а дальність – від 5 до 20 метрів, припущення про сталість прискорення вільного падіння також є обґрунтованим. Якби моделювався рух балістичної ракети при дальності та висоті польоту понад 100 км, то довелося б враховувати зміну прискорення вільного падіння залежно від висоти та широти місця.



Гіпотеза про рух м'яча в площині, перпендикулярній поверхні Землі, обмежує клас траєкторій, що розглядаються, і значно спрощує модель. Траєкторія м'яча може не лежати в одній площині, якщо він сильно підкручується навколо вертикальної осі. У цьому випадку швидкість точок поверхні м'яча щодо повітря на різних сторонах м'яча будуть різними. Для точок, що рухаються назустріч потоку, відносна швидкість вище, а з протилежного боку, що рухаються потоком, - нижче швидкості центру мас м'яча. Відповідно до закону Бернуллі, тиск газу на поверхню більший там, де його відносна швидкість менша. Тому для ситуації, зображеної на малюнку, на м'яч діятиме додаткова сила, спрямована (для даної схеми) зверху донизу. Даний ефект виявлятиметься тим більше, чим більша швидкість центру мас м'яча та швидкість його обертання. Для баскетболу характерні відносно низькі швидкості м'яча (до 10 м/с). При цьому практично не використовується підкручування м'яча рукою. Тому гіпотеза про рух м'яча в одній площині видається виправданою. Її використання дозволяє відмовитися від побудови значно складнішої тривимірної моделі руху м'яча.

Гіпотеза про відсутність впливу опору повітря менш обґрунтована. При русі тіла у газі чи рідині сила опору збільшується зі зростанням швидкості руху. Враховуючи невисокі швидкості руху м'яча, його правильну обтічну форму і малі дальності кидків, зазначена гіпотеза може бути використана з ретельною подальшою перевіркою результатів, що отримуються по відношенню до експериментальних результатів.

Слід зазначити, що концептуальна постановка завдання моделювання на відміну змістовної постановки використовує термінологію конкретної дисципліни (у разі - механіки). При цьому реальний об'єкт (м'яч), що моделюється, замінюється його механічною моделлю (матеріальною точкою). Фактично в прикладі концептуальна постановка зветься до постановки класичної задачі механіки про рух матеріальної точки в полі сил тяжіння. Концептуальна постановка більш абстрактна стосовно змістовної, оскільки матеріальної точки можна зіставити довільний матеріальний об'єкт, кинутий під кутом до горизонту: футбольний м'яч, ядро, камінь чи артилерійський снаряд.