ПРАКТИЧНИЙ КУРС ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

КНИГА 1

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА І АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ТА ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

2004

75-річчю
Національного аерокосмічного університету ім. М.Є. Жуковського
“Харківський авіаційний інститут”
присвячується

ПРАКТИЧНИЙ КУРС ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Книга 1

Лінійна алгебра і аналітична геометрія
Диференціальне числення функцій однієї та декількох змінних

Книга 2

Інтегральне числення функцій однієї змінної
Диференціальні рівняння
Кратні та криволінійні інтеграли. Елементи теорії векторного поля

Книга 3

Ряди. Інтеграл Фур’є. Перетворення Фур’є
Функції комплексної змінної і операційне числення
Теорія ймовірностей і математична статистика

Книга 4

Варіаційне числення
Рівняння математичної фізики
Випадкові процеси

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Інститут змісту і методів навчання
Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського
"Харківський авіаційний інститут"

ПРАКТИЧНИЙ КУРС ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Книга 1

Лінійна алгебра і аналітична геометрія
Диференціальне числення функцій однієї та декількох змінних

Під редакцією
д-ра фіз.-мат. наук, професора О.Г. Ніколаєва,
д-ра фіз.-мат. наук, професора В.С. Проценка,
д-ра фіз.-мат. наук, професора В.О. Рвачова

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів вищих технічних навчальних закладів

Харків "ХАІ" 2004

УДК: 512.64+514.12+512.2+517.5 (076.2)

Колектив авторів:
І.В. Брисіна, О.В. Головченко, В.Ф. Деменко, Г.І. Кошовий,
О.Г. Ніколаєв, В.С. Проценко, В.О. Рвачов, О.І. Соловйов,
Є.П. Томілова, О.Г. Ушакова, В.В. Хоменко

Практичний курс вищої математики. Кн. 1. Лінійна алгебра і аналітична геометрія. Диференціальне числення функцій однієї та декількох змінних. – Навч. посібник для вузів. – Харків: Нац. аерокосм. ун-т "Харк. авіац. ін-т", 2004. – 355 с.

ISBN 966-662-071-5

До першої книги "Практичного курсу вищої математики" включено стандартні та додаткові розділи програми курсів з аналітичної геометрії, лінійної алгебри та диференціального числення функцій однієї та декількох змінних. Означення, теореми, формули проілюстровано численними рисунками та прикладами. Наведено методи розв'язання всіх основних типів практичних задач з курсу вищої математики.

Для студентів усіх спеціальностей технічних вузів, аспірантів і науковців.

Іл. 115. Табл. 5. Бібліогр.: 19 назв

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, проф. П.П. Лепіхін,
д-р техн. наук, проф. М.С. Синєкоп

Гриф надано Міністерством освіти і науки України
(лист №14/18.2-256 від 18.02.04)

ISBN 966-662-071-5

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Пропоноване до уваги читача видання є навчальним посібником, який призначається студентам вищих навчальних закладів для практичного засвоєння змісту курсу “Вища математика”. Назву цього видання вибрано не випадково. Вона відбиває єдину позицію її авторів, згідно з якою без глибокого практичного пророблення матеріалу курсу неможливе його якісне засвоєння. Цей посібник саме і покликаний надати допомогу студентам при розв’язанні задач і закріпленні теоретичного матеріалу. Підкреслимо, що він не може замінити підручника з курсу, але доповнює його.

Сподіваємося, що посібник стане також корисним при організації самостійної роботи студента по вивченню основних і варіативних розділів вищої математики.

Матеріал посібника відповідає стандартним програмам курсу “Вища математика” всіх технічних спеціальностей вузів України. З кожної теми курсу посібник містить основні теоретичні відомості, які ілюструються методичним розглядом розв’язань основних типів практичних задач. Задачі наведено в порядку зростання їх складності: від простих вправ – до складних задач.

Викладеного теоретичного і практичного матеріалу цілком достатньо для розуміння теоретичних положень та набуття необхідних навичок при розв’язуванні задач з програмної тематики.

Передбачається, що вивчення матеріалу курсу читачем за допомогою даного посібника повинно здійснюватися в такому порядку:

– пророблення теоретичного матеріалу розглядуваної теми;

– уважне вивчення розв’язків наведених з теми практичних задач, що ілюструють кожне положення теорії;

– перевірка якості засвоєння матеріалу шляхом розв’язання практичних задач з відповідного розділу задачника з курсу “Вища математика”.

Для зручності роботи посібник поділено на чотири книги:

1. Лінійна алгебра і аналітична геометрія. Диференціальне числення

функцій однієї та декількох змінних.

2. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальні рівняння. Кратні та криволінійні інтеграли. Елементи теорії векторного поля.

3. Ряди. Інтеграл Фур'є. Перетворення Фур'є. Функції комплексної змінної і операційне числення. Теорія ймовірностей і математична статистика.

4. Варіаційне числення. Рівняння математичної фізики. Випадкові процеси.

При написанні цього посібника автори використали багаторічний досвід викладання курсу "Вища математика" студентам різних спеціальностей Національного аерокосмічного університету ім. М.Є. Жуковського "ХАІ".

Разом з виданими раніше навчальним посібником "Практичний курс математики для систем довузівської підготовки" (Харків, Нац. аерокосм. ун-т "ХАІ"), робочими зошитами з усіх розділів елементарної та вищої математики "Практичний курс" є єдиним навчально-методичним комплексом для вивчення математики в системі безперервної математичної освіти "школа – вуз".

Автори щиро вдячні рецензентам книги доктору фізико-математичних наук, професору П.П. Лепіхіну і доктору технічних наук, професору М.С. Синєкопу за ряд цінних зауважень, які, безперечно, поліпшили її зміст. Особливу подяку автори висловлюють головному редакторові Л.О. Кузьменко і редактору Т.І. Іващенко за титанічну роботу по літературному редагуванню книги.

Зрозуміло, що авторський колектив відкритий до будь-яких слушних зауважень та рекомендацій читачів, спрямованих на подальше вдосконалення змісту посібника.

1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА І АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

1.1. ВИЗНАЧНИКИ. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРИЧНИХ РІВНЯНЬ

1.1.1. Визначники 2-го та 3-го порядків

Прямокутна таблиця чисел, яка має m рядків і n стовпців, називається матрицею порядку $m \times n$:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ ... & ... & .... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Елемент матриці A, розташований в i-му рядку та j-му стовпці, позначається a_{ij}.

Якщо $m = n$, матриця називається квадратною.

Окремі приклади квадратних матриць:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & .... & 0 \\ 0 & 1 & .... & 0 \\ ... & ... & .... & ... \\ 0 & 0 & .... & 1 \end{pmatrix} \text{ – одинична; } D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & .... & 0 \\ 0 & a_{22} & .... & 0 \\ ... & ... & .... & ... \\ 0 & 0 & .... & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ – діагональна;}$$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & .... & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & .... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & .... & ... \\ 0 & 0 & 0 & .... & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ – верхня трикутна.}$$

На множині квадратних матриць визначено функцію, що називається **визначником** і позначається $|\mathrm{A}|$ або $\det \mathrm{A}$ (від слова *determinant* – визначник); $\det \mathrm{A}$ – це число, що знаходиться за такими правилами:

1) якщо A має порядок 1, $\mathrm{A} = (a)$, то $\Delta_1 = \det \mathrm{A} = a$;

2) якщо $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, то $\Delta_2 = \det \mathrm{A} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, наприклад: $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (-1) \cdot 4 = 10$;

3) якщо $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$, то $\Delta_3 = \det A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$

$= a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$.

Запам’ятати таке означення досить важко, отже, потрібно навести якесь правило для полегшення цієї справи.

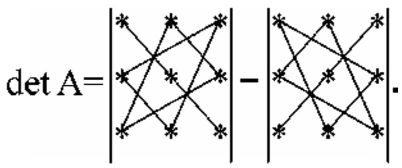
Розглянемо головну діагональ

$$\begin{vmatrix} a_1 & * & * \\ * & b_2 & * \\ * & * & c_3 \end{vmatrix}$$

і відшукаємо два трикутники з основами, паралельними діагоналі. Добутки елементів головної діагоналі і елементів у вершинах двох трикутників в означенні det A взято без зміни знака. Що стосується іншої діагоналі

$$\begin{vmatrix} * & * & a_3 \\ * & b_2 & * \\ c_1 & * & * \end{vmatrix},$$

то добуток її елементів взято з протилежним знаком разом із добутками елементів у вершинах двох трикутників із основами, паралельними такій діагоналі:



Наприклад, $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} = ((-1)\cdot 5 \cdot (-3) + 4 \cdot 3 \cdot (-2) + 0 \cdot 2 \cdot 6) -$

$$-(0 \cdot 5 \cdot 3 + 4 \cdot 2(-3) + (-1)\cdot 6 \cdot (-2)) = (15 - 24) - (-24 + 12) = 3.$$

Розглянемо іншу формулу обчислення визначника – формулу розкладання визначника за елементами рядка. Якщо взяти будь-який елемент визначника і закреслити стовпець і рядок, в яких розташований цей елемент, то залишиться визначник меншого (у даному випадку – другого) порядку. Перед визначником, одержаним вилученням рядка та стовпця, поставимо знак “+” або “-” відповідно тому, де знаходиться у матриці вибраний елемент:

$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$ (це правило можна назвати “шаховим”).

Одержаний визначник меншого порядку, взятий із відповідним знаком, називають алгебричним доповненням елемента.

Наприклад, якщо $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$, то алгебричне доповнення A_1 елемента a_1 – це $\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}$, для a_2 маємо $A_2 = -\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}$, а для a_3 – $A_3 = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$.

Легко переконатись у тому, що

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3$$

(формула розкладання визначника за елементами першого рядка).

Формула залишається справедливою також для інших рядків та стовпців, наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_1 & \boxed{a_2} & a_3 \\ b_1 & \boxed{b_2} & b_3 \\ c_1 & \boxed{c_2} & c_3 \end{vmatrix} = -a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}.$$

"Шахове" правило знаків можна сформулювати так: перед визначником після вилучення рядка та стовпця треба поставити $(-1)^{i+j}$, де i – номер рядка, j – номер стовпця, де розташований елемент.

Наприклад, треба знайти $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix}$. Вибираємо останній рядок:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \boxed{0 \quad -2 \quad -3} \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + (-3) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2(-6-12) - 3(-5-8) = 3.$$

Звичайно, визначник 3-го порядку можна обчислити і безпосередньо за означенням. Але формула розкладання за елементами рядка або стовпця дає можливість знайти визначники 4-го та вищих порядків, а також довести властивості визначників. Властивості визначників корисні для обчислення, особливо це стосується визначників порядку $n \geq 4$, як буде показано далі.

Властивості визначників:

1. Визначник не зміниться при транспонуванні матриці А, тобто при заміні рядків на стовпці:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Отже, перелічені нижче властивості визначників відносно рядків будуть справедливими і відносно стовпців.

2. Якщо переставити два рядки, то визначник змінить знак.
3. Якщо А містить нульовий рядок, то $\det A = 0$.
4. Якщо А має два пропорційні рядки, то $\det A = 0$ (наприклад, якщо А містить однакові рядки).
5. Спільний множник елементів якогось рядка можна винести за знак визначника:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ kc_1 & kc_2 & kc_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

6. Якщо один з рядків визначника є сумою двох рядків $P1$ і $P2$, то визначник дорівнює сумі двох визначників, у відповідному рядку яких розташовані рядки $P1$ і $P2$, а інші рядки такі ж самі, як у даного визначника:

$$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & b_2+c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}.$$

7. Визначник верхньої трикутної матриці дорівнює добутку діагональних елементів: $\begin{vmatrix} a & * & * \\ 0 & b & * \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$, зокрема, $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$ – визначник діагональної матриці.

8. Визначник не зміниться, якщо до якого-небудь його рядка додати інший рядок, помножений на довільне число:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1+ka_1 & c_2+ka_2 & c_3+ka_3 \end{vmatrix}.$$

Останнє правило допомагає без зміни визначника перетворювати матрицю до простішого вигляду. Наприклад:

$$\det \mathrm{A} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 7 & -6 & 8 \\ 13 & -12 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 29 \\ 0 & 1 & 28 \end{vmatrix}$$

(до другого рядка додали перший, помножений на 7, до третього – перший, помножений на 13);

$$\det \mathrm{A} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 29 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$ (від третього рядка відняли другий).

1.1.2. Визначники порядку *n*. Способи їх обчислення

Визначник Δ_n квадратної матриці порядку n

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

може бути знайдений за формулою:

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\mathrm{A}_{ik} = a_{i1}\mathrm{A}_{i1} + a_{i2}\mathrm{A}_{i2} + \dots + a_{in}\mathrm{A}_{in}$$

(розкладання за елементами i-го рядка). Через A_{ik} позначено алгебричне доповнення елемента a_{ik} – визначник, одержаний вилученням із матриці i-го рядка та k-го стовпця, перед яким поставлено знак $(-1)^{i+k}$. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} =$$

$$= -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{24}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

Таким чином, визначник 4-го порядку обчислюється через чотири визначники 3-го порядку, визначник 5-го порядку – через п’ять визначників 4-го порядку. Кількість необхідних операцій швидко зростає разом із порядком визначника. Тому крім безпосереднього розкладання за елементами рядка або стовпця намагаються відшукувати такі способи, які дозволяють зменшити трудомісткість обчислення визначника. Всі властивості, перелічені для визначників 2-го та 3-го порядків, зберігаються для визначників порядку n.

Перелічимо декілька методів, що найчастіше використовуються, та пояснимо їх застосування на прикладах.

1. Метод зведення до трикутного вигляду $\begin{vmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & * \end{vmatrix}$.

Користуючись властивостями визначників, матрицю поступово перетворюють на верхню трикутну. Нагадаємо, що для цього знадобиться переставляти рядки (враховуючи знак), виносити спільний множник рядка за знак визначника, додавати до рядка інший, помножений на число. Аналогічні операції можна проводити і над стовпцями.

2. Метод рекурентних співвідношень. Іноді можна розкладанням за елементами рядка або стовпця знайти загальну формулу залежності Δ_i від n і довести її індукцією.

3. Метод виділення лінійних множників.

4. Метод розкладання на суму простіших:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \ldots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Приклад 1.1.1. Знайти визначник $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & -2 \end{vmatrix}$.

Розв’язання. Вибираємо третій стовпець, який має досить простий вигляд. Алгебричне доповнення елемента 1 має знак “ – “, оскільки він розташований у другому рядку та третьому стовпці. Отже, $(-1)^{2+3}=-1$, тоді

$$\Delta=(-1)\begin{vmatrix}-1 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 3 & 4 & -2\end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix}-1 & 3 & 2\\ -2 & 0 & 4\\ 3 & 4 & -2\end{vmatrix}=-16.$$

Приклад 1.1.2. Знайти визначник $\Delta=\begin{vmatrix}\boxed{-1} & 3 & 0 & 2\\ \boxed{-2} & 0 & 1 & 4\\ \boxed{0} & 2 & -1 & 0\\ \boxed{3} & 4 & 0 & -2\end{vmatrix}$ методом зведення до трикутного вигляду.

Розв'язання. Для зручності позначимо рядки римськими цифрами I, II, III, IV. Спробуємо додаванням до другого та четвертого рядків досягти того, щоб у першому стовпці залишилось лише одне ненульове число "–1". Для цього потрібно до другого рядка додати перший, помножений на $-2\left(\mathrm{II}+\mathrm{I}\cdot(-2)\right)$, а до четвертого – перший, помножений на $2\left(\mathrm{IV}+\mathrm{I}\cdot 3\right)$:

$$\Delta=\begin{vmatrix}-1 & 3 & 0 & 2\\ 0 & -6 & 1 & 0\\ 0 & \boxed{2} & -1 & 0\\ 0 & \boxed{13} & 0 & 4\end{vmatrix}.$$

Тепер намагаємося "знищити" числа 2 та 13: $\mathrm{III}+\mathrm{II}\cdot\frac{1}{3}$, $\mathrm{IV}+\mathrm{II}\cdot\frac{13}{6}$. Маємо

$$\Delta=\begin{vmatrix}-1 & 3 & 0 & 2\\ 0 & -6 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{13}{6} & 4\end{vmatrix}.\ \text{Тепер IV + III}\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{13}{6}\right):\ \Delta=\begin{vmatrix}-1 & 3 & 0 & 2\\ 0 & -6 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{vmatrix}=-16$$

(добуток діагональних елементів).

Читач може зауважити, що після першого кроку можна було застосувати інший метод, але ми лише намагались детально пояснити зміст методу зведення до трикутного вигляду.

Приклад 1.1.3. Обчислити визначник порядку n:

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & .... & n\\ -1 & 0 & 3 & 4 & .... & n\\ -1 & -2 & 0 & 4 & .... & n\\ ... & ... & ... & ... & .... & ...\\ -1 & -2 & -3 & -4 & .... & 0\end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Додаємо до кожного рядка, починаючи з другого, перший рядок:

$$\varDelta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & .... & n \\ 0 & 2 & 6 & 8 & .... & 2n \\ 0 & 0 & 3 & 8 & .... & 2n \\ ... & ... & ... & ... & .... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .... & n \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$$

Приклад 1.1.4. Обчислити визначник порядку n:

$$\varDelta_n = \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & .... & 1 \\ 1 & n & 1 & .... & 1 \\ 1 & 1 & n & .... & 1 \\ ... & ... & ... & .... & ... \\ 1 & 1 & 1 & .... & n \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Додаємо до першого рядка суму (II + III + ...):

$$\varDelta_n = \begin{vmatrix} 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & .... & 2n-1 \\ 1 & n & 1 & .... & 1 \\ 1 & 1 & n & .... & 1 \\ ... & ... & ... & .... & ... \\ 1 & 1 & 1 & .... & n \end{vmatrix} = (2n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & .... & 1 \\ 1 & n & 1 & .... & 1 \\ 1 & 1 & n & .... & 1 \\ ... & ... & ... & .... & ... \\ 1 & 1 & 1 & .... & n \end{vmatrix}.$$

Додаємо до II, III, … рядків перший, помножений на (–1) (II –I, III – I, …):

$$\Delta_n = (2n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & .... & 1 \\ 0 & n-1 & 0 & .... & 0 \\ 0 & 0 & n-1 & .... & 0 \\ ... & ... & ... & .... & ... \\ 0 & 0 & 0 & .... & n-1 \end{vmatrix} = (2n-1)(n-1)^{n-1}.$$

Приклад 1.1.5. Обчислити

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & 0 & 0 & .... & 0 \\ 1 & \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & 0 & .... & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & .... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & .... & ... \\ 0 & 0 & ... & ... & ... & \frac{2}{x} \end{vmatrix}, \text{ якщо } x \neq 0.$$

Розв'язання. Розкладаємо визначник за елементами першого рядка:

$$\Delta_n = \frac{2}{x}\Delta_{n-1} - \frac{1}{x^2}\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{x^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{x} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{2}{x} \end{vmatrix},$$ де Δ_{n-1} – визначник такого ж вигляду,

але порядку $n-1$. Другий визначник розкладаємо за елементами першого стовпця:

$$\Delta_n = \frac{2}{x}\Delta_{n-1} - \frac{1}{x^2}\Delta_{n-2}.$$

Розглянемо Δ_1, Δ_2:

$$\Delta_1 = \left|\frac{2}{x}\right| = \frac{2}{x},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} \\ 1 & \frac{2}{x} \end{vmatrix} = \frac{3}{x^2}.$$

Доведемо індукцією, що $\Delta_n = \dfrac{n+1}{x^n}$. З припущення $\Delta_k = \dfrac{k+1}{x^k}$ та рекурентної формули маємо

$$\Delta_{k+1} = \frac{2}{x}\Delta_k - \frac{1}{x^2}\Delta_{k-1} = \frac{2}{x}\frac{k+1}{x^k} - \frac{1}{x^2}\frac{k}{x^{k-1}} = \frac{k+2}{x^{k+1}},$$

що й треба було довести. Отже, $\Delta_n = \dfrac{n+1}{x^n}$.

Приклад 1.1.6. Обчислити $\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Легко пересвідчитись у тому, що Δ_n – багаточлен степеня $n-1$ відносно x. Якщо $x=1$, то визначник має два однакових рядки – перший та другий, тобто при $x=1$ багаточлен $\Delta_n(x)$ перетворюється на 0, отже, $x_1 = 1$ – корінь для $\Delta_n(x)$. Аналогічно $\Delta_n(x)$ має корені $x_2 = 2, \dots, x_{n-1} = n-1$. Знайдено $(n-1)$-й корінь багаточлена $(n-1)$-го степеня, отже, інших коренів немає. Тоді

$$\Delta_n(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-(n-1))$$

(коефіцієнт при x^{n-1} повинен дорівнювати 1, як можна побачити з вигляду визначника).

Приклад 1.1.7. Обчислити визначник порядку n $(n \ge 4)$:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 & \dots. & n^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 & \dots. & (n+1)^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 & \dots. & (n+2)^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 & 8^2 & \dots. & (n+3)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots. & \dots \\ n^2 & (n+1)^2 & (n+2)^2 & (n+3)^2 & (n+4)^2 & \dots. & (2n-1)^2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Від кожного рядка, починаючи з останнього, віднімемо попередній рядок:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & \dots. & n^2 \\ 2^2-1^2 & 3^2-2^2 & 4^2-3^2 & 5^2-4^2 & \dots. & (n+1)^2-n^2 \\ 3^2-2^2 & 4^2-3^2 & 5^2-4^2 & 6^2-5^2 & \dots. & (n-2)^2-(n-1)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots. & \dots \\ n^2-(n-1)^2 & (n+1)^2-n^2 & \dots & \dots & \dots. & (2n-1)^2-(2n-2)^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^4 & \dots. & n^2 \\ 2^2-1^2 & 3^2-2^2 & 4^2-3^2 & 5^2-4^2 & \dots. & (n+1)^2-n^2 \\ 3^2-2^2 & 4^2-3^2 & 5^2-4^2 & 6^2-5^2 & \dots. & (n+2)^2-(n+1)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots. & \dots \\ 2n-1 & 2n+1 & 2n+3 & 2n+5 & \dots. & 4n-3 \end{vmatrix}.$$

Від рядків за номерами $n,\ n-1,\ \dots,3$, починаючи з останнього, віднімемо попередній рядок. Оскільки кількість рядків не менша, ніж 4, одержаний визначник містить не менше двох збіжних рядків. Отже,

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & \dots. & n^2 \\ 1 & 3 & 5 & \dots. & 2n+1 \\ 2 & 2 & 2 & \dots. & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots. & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots. & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

1.1.3. Правило Крамера розв'язання систем лінійних рівнянь

Правило Крамера застосовується для розв'язання лише таких систем лінійних алгебричних рівнянь, в яких кількість невідомих дорівнює кількості рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ ... & ... & .... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{vmatrix},$$

складений із коефіцієнтів при невідомих, називається **головним** визначником системи.

Позначимо через Δ_{x_1} визначник, одержаний із головного визначника Δ **заміною першого стовпця на стовпець правих частин системи:**

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & .... & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & .... & a_{2n} \\ ... & ... & .... & ... \\ b_n & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Аналогічно Δ_{x_k} одержано із головного визначника Δ заміною *k*-го стовпця на стовпець правих частин системи.

Правило Крамера працює лише у випадку, коли головний визначник системи не дорівнює 0 ($\Delta \neq 0$), система має єдиний розв'язок, який можна знайти за формулами

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, ..., x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}.$$

Якщо $\Delta = 0$, то правило Крамера не працює, і система у цьому випадку або має безліч розв'язків, або несумісна (тобто не має розв'язків).

Однорідна система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0, \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

завжди сумісна, оскільки має так званий тривіальний розв'язок $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$. У випадку $\Delta \neq 0$ цей розв'язок єдиний, у випадку $\Delta = 0$ система має безліч розв'язків.

Позитивною рисою правила Крамера є простота його вигляду. Але разом із зростанням числа *n* швидко зростає кількість операцій, необхідних для обчислення визначників порядку *n*, тому для розв'язання системи далі розглядатимуться інші методи.

Приклад 1.1.8. Розв'язати систему

$$\begin{cases} 3x - 4y + 6z = 0, \\ -x + y + z = 0, \\ 2x - 3y + z = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Знаходимо головний визначник системи:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 6 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 18 - 8 - 12 + 9 - 4 = 6 \neq 0 .$$

Система має єдиний розв'язок: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Приклад 1.1.9. Розв'язати систему

$$\begin{cases} 3x - 4y + 6z = -4, \\ -x + y + z = -2, \\ 2x - 3y + z = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Знаходимо головний визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 6 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 6 .$$

Замінивши перший стовпець $\boxed{\begin{matrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{matrix}}$ на стовпець вільних членів системи $\boxed{\begin{matrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{matrix}}$, маємо

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} -4 \\ 1 \\ -3 \end{matrix} & \begin{matrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \end{vmatrix} = -4 + 36 - 12 - 8 = 12 .$$

Аналогічно, замінивши другий і третій стовпці на стовпець вільних членів, знаходимо

$$\varDelta_y = \begin{vmatrix} \begin{matrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \end{vmatrix} = -6 - 8 + 24 - 4 = 6 ,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} \begin{matrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{matrix} -4 \\ 1 \\ -3 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{matrix}} \end{vmatrix} = -12 + 16 + 8 - 18 = -6 .$$

За правилом Крамера

$$x = \frac{\varDelta_x}{\varDelta} = \frac{12}{6} = 2, \quad y = \frac{\varDelta_y}{\varDelta} = \frac{6}{6} = 1, \quad z = \frac{\varDelta_z}{\varDelta} = \frac{-6}{6} = -1.$$

Приклад 1.1.10. Чи можна користуватись правилом Крамера для розв'язання системи

$$\begin{cases} x - y + z = -1, \\ 2x - 2y + 2z = 1, \\ -3x + 3y - 3z = 1? \end{cases}$$

Розв'язання. Знаходимо головний визначник системи (рядки пропорційні):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Правилом Крамера користуватись не можна. Зауважимо, що у даному випадку легко побачити, що система несумісна.

1.1.4. Метод Гаусса розв'язання систем лінійних рівнянь

У даному підрозділі розглянемо систему n лінійних рівнянь із n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Пояснимо, як способами, аналогічними обчисленню визначників вищого порядку, можна розв'язати систему. Запишемо розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots. & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots. & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots. & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots. & a_{nn} & b_n \end{array}\right).$$

Матриця може бути зведена до спрощеної форми за допомогою елементарних перетворень її рядків:

1) перестановка рядків;

2) скорочення або множення рядка на число $\lambda \neq 0$;

3) додавання до будь-якого рядка, помноженого на число $\lambda \neq 0$, іншого рядка, помноженого на будь-яке число.

Метою є перетворення системи в іншу, еквівалентну (тобто з тою ж множиною розв'язків), але простішого вигляду. Метод дуже схожий на метод обчислення визначника, але при розв'язуванні систем не дозволяється діяти зі стовпцями.

Проте дозволяється переставляти рядки (рівняння) та домножувати рядки (рівняння) на числа, відмінні від нуля.

Схематично зміст методу Гаусса можна зобразити так (символом * позначене будь-яке число):

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} * & * & * & \ldots. & * & * \\ \boxed{*} & * & * & \ldots. & * & * \\ \boxed{*} & * & * & \ldots. & * & * \\ \boxed{\ldots} & \ldots & \ldots & \ldots. & \ldots & \ldots \\ \boxed{*} & * & * & \ldots. & * & * \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} * & * & * & \ldots. & * & * \\ 0 & * & * & \ldots. & * & * \\ 0 & \boxed{*} & * & \ldots. & * & * \\ \ldots & \boxed{\ldots} & \ldots & \ldots. & \ldots & \ldots \\ 0 & \boxed{*} & * & \ldots. & * & * \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} * & * & * & \ldots. & * & * \\ 0 & * & * & \ldots. & * & * \\ 0 & 0 & * & \ldots. & * & * \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots. & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & * & \ldots. & * & * \end{array}\right).$$

Спочатку намагаємося одержати матрицю вигляду

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & .... & * & * \\ 0 & * & * & * & .... & * & * \\ 0 & 0 & * & * & .... & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & .... & * & * \\ ... & ... & ... & ... & .... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .... & * & * \end{pmatrix},$$

а після цього зворотним кроком поступово позбавитись зайвих елементів вже *над* головною діагоналлю:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} * & * & * & * & .... & 0 & * \\ 0 & * & * & * & .... & 0 & * \\ 0 & 0 & * & * & .... & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & * & .... & 0 & * \\ ... & ... & ... & ... & .... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .... & * & * \end{array}\right).$$

Якщо після перетворень матриця набуває вигляду

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} * & 0 & 0 & 0 & .... & 0 & * \\ 0 & * & 0 & 0 & .... & 0 & * \\ 0 & 0 & * & 0 & .... & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & * & .... & 0 & * \\ ... & ... & ... & ... & .... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .... & * & * \end{array}\right),$$

то це дає можливість одразу ж знайти розв'язок. Звернемо увагу на те, що в процесі перетворень одночасно вирішується питання про сумісність системи та можливість існування безлічі розв'язків. Випадок безлічі розв'язків детально розглянуто в підрозд. 1.4.6.

Підкреслимо, що метод Гаусса має такі переваги:

– завжди вирішується питання про сумісність системи лінійних рівнянь та єдиність розв'язку;

– для розв'язання систем великих розмірів потрібна значно менша кількість операцій порівняно з правилом Крамера;

– може бути застосований для дослідження систем, в яких кількість невідомих не дорівнює кількості рівнянь, а також для розв'язання ще деяких задач лінійної алгебри (див. підрозд. 1.4.3, 1.4.5 і 1.4.6).

Приклад 1.1.11. Розв'язати систему

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = -3, \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 17x_2 + 13x_3 - 5x_4 = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Розширена матриця має вигляд

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 1 & -1 & 6 \\ \boxed{2} & -1 & 0 & 1 & -3 \\ \boxed{3} & 1 & 7 & -1 & 0 \\ \boxed{1} & 17 & 13 & -5 & 1 \end{array}\right).$$

Позначимо рядки відповідно I, II, III, IV. Внаслідок перетворень II+2·I, III+3·I, IV+I маємо

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 5 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & \boxed{10} & 10 & -4 & 18 \\ 0 & \boxed{20} & 14 & -6 & 7 \end{array}\right).$$

Зауважимо, що далі перший рядок не повинен брати участь у перетвореннях, інакше зміниться перший стовпець. Наступний крок III+II·(–2), IV+II·(–4) приводить до

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 5 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & \boxed{-2} & -29 \end{array}\right).$$

Тепер внаслідок IV+III·(–1) маємо

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 5 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -29 \end{array}\right).$$

Останнє рівняння перетворилось на 0 = –29, отже, система несумісна.

Приклад 1.1.12. Розв'язати систему

$$\begin{cases} y+3z=-5, \\ -2x+y-3z=7, \\ 5x-2y+z=-4. \end{cases}$$

Розв'язання. Розширена матриця має вигляд

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & -5 \\ -2 & 1 & -3 & 7 \\ 5 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right).$$

Переставивши рядки, маємо

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & 7 \\ \boxed{0} & 1 & 3 & -5 \\ \boxed{5} & -2 & 1 & -4 \end{array}\right).$$

Можна виконати перетворення 2·III + 5·I, тоді

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & \boxed{1} & -13 & 27 \end{array}\right),$$

а наступний крок III-II приводить до

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -16 & 32 \end{array}\right),$$

або, після скорочення останнього рядка на (–16),

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & \boxed{\begin{matrix}-3\\3\end{matrix}} & 7 \\ 0 & 1 & & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Тепер за допомогою додавання до I та II рядків третього рядка з необхідними коефіцієнтами (I+3·III, II+(–3)·III) одержуємо

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[(\mathrm{I}-\mathrm{II})]{} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Залишається прочитати відповідь: $x = 0$, $y = 1$, $z = -2$.

Приклад 1.1.13. Розв'язати систему

$$\begin{cases} -x + 3y - z = 5, \\ -4x + y + z = 0, \\ 7x + y - 3z = 5. \end{cases}$$

Розв'язання. Перетворюємо розширену матрицю:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 5 \\ \boxed{\begin{matrix}-4\\7\end{matrix}} & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & -3 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\mathrm{II}+\mathrm{I}(-4) \\ \mathrm{III}+\mathrm{I}(7)}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -11 & 5 & -20 \\ 0 & 22 & -10 & 40 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{III}+\mathrm{II}(2)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -11 & 5 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

У системі залишилось два рівняння

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -11 & 5 & -20 \end{array}\right) \xrightarrow[5\mathrm{I}+\mathrm{II}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & -11 & 5 & -20 \end{array}\right),$$

або $\begin{cases} -5x + 4y = 5, \\ -11y = -20 - 5z, \end{cases}$ отже, вона має безліч розв'язків. Остаточно маємо

$\begin{cases} y = \dfrac{20 + 5z}{11}, \\ x = \dfrac{5 + 4z}{11}, \end{cases}$ а число z можна вибирати довільно.

Приклад 1.1.14. Розв'язати систему $\begin{cases} x+y+z+t=10, \\ -5x+y-z-t=-10, \\ 2y+3t=16, \\ 4x+z-t=3. \end{cases}$

Розв'язання. Розширена матриця має вигляд

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ \boxed{-5} & 1 & -1 & -1 & -10 \\ \boxed{0} & 2 & 0 & 3 & 16 \\ \boxed{4} & 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\text{II}+5\text{I} \\ \text{IV}+\text{I}(-4)}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 6 & 4 & 4 & 40 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 16 \\ 0 & -4 & -3 & -5 & -37 \end{array}\right).$$

Другий рядок скорочуємо на 2 і переставляємо із третім:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 16 \\ 0 & \boxed{3} & 2 & 2 & 20 \\ 0 & \boxed{-4} & -3 & -5 & -37 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{2\text{III-}3\text{II} \\ \text{IV}+2\text{II}}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & \boxed{-3} & 1 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[4\text{IV}+3\text{III}]{}$$

$$\xrightarrow[4\text{IV}+3\text{III}]{} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & -44 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \boxed{1} & 1 & 10 \\ 0 & 2 & \boxed{0} & 3 & 16 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\text{I-IV} \\ \text{I-3IV} \\ \text{III}+5\text{IV}}]{}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{I-IV} \\ \text{I-3IV} \\ \text{III}+5\text{IV}}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \boxed{1} & \boxed{1} & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{I}-\text{II}-\text{III}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right),$$

отже, $x=1$, $y=2$, $z=3$, $t=4$.

1.2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

1.2.1. Лінійні операції над векторами. Лінійна залежність. Базис. Координати

Нагадаємо, що лінійними операціями над векторами називаються додавання векторів і множення вектора на число. Операцію $\vec{a}-\vec{b}$ можна виразити через додавання та множення на число:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-1\cdot\vec{b}).$$

Вираз

$$\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+...+\alpha_n\vec{a}_n,$$

в якому $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ – вектори, а $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ – числа, називається лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$. Якщо $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$, то лінійна комбінація називається тривіальною. Якщо $\alpha_1^2+...+\alpha_n^2\neq 0$, тобто хоча б одне з чисел α_i відрізняється від 0, то лінійна комбінація є нетривіальною.

Система векторів $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ називається лінійно залежною, якщо існує її нетривіальна лінійна комбінація, що дорівнює 0, тобто існують $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$:

$$\alpha_1^2 + ... + \alpha_n^2 \neq 0,\ \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_n\vec{a}_n = 0.$$

Система, що складається більш ніж з одного вектора, лінійно залежна у тому і лише тому випадку, коли хоча б один із її векторів можна записати у вигляді лінійної комбінації інших.

На прямій прикладом лінійно незалежної системи буде множина із одного ненульового вектора, а прикладом лінійно залежної – множина із двох або більшої кількості векторів (див. приклад 1.2.1).

На площині прикладом лінійно незалежної системи є множина із двох непаралельних векторів, а будь-яка система із трьох або більше векторів лінійно залежна (див. приклад 1.2.1).

У просторі трійка некомпланарних векторів лінійно незалежна, а система із чотирьох або більше векторів завжди лінійно залежна.

Компланарними векторами називаються вектори, що належать одній площині або паралельним площинам.

Базисом на прямій називають будь-який ненульовий вектор на цій прямій.

Базисом на площині називається пара неколінеарних векторів на цій площині.

Базис у просторі – трійка некомпланарних векторів. Будь-який вектор простору можна розкласти за базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, тобто подати у вигляді лінійної комбінації

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3.$$

Цей розклад єдиний. Числа a_1, a_2, a_3 називаються координатами вектора $\vec{a}$ у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

При множенні вектора $\vec{a}$ на число кожна його координата множиться на це число; при додаванні векторів їх відповідні координати додаються.

Якщо вектори базису мають довжину 1 і притому попарно перпендикулярні, то система координат називається декартовою прямокутною. Часто термін "декартова система координат" відноситься саме до прямокутної декартової системи координат.

Приклад 1.2.1. Пояснимо, чому два вектори, паралельні одній прямій, обов'язково утворюють лінійно залежну систему (рис. 1.2.1).

Вектор $\vec{b}$ можна виразити через $\vec{a}$: $\vec{b} = k\vec{a}$.

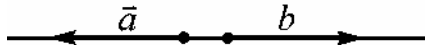


Рис. 1.2.1

Зауважимо, що будь-яка множина векторів, до складу якої входить нульовий вектор, завжди лінійно залежна. Дійсно, розглянемо множину $\vec{0}, \vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$.

Складемо лінійну комбінацію

$$1 \cdot \vec{0} + 0 \cdot \vec{a}_1 + ... + 0 \cdot \vec{a}_n = 0.$$

Лінійна комбінація нетривіальна, бо містить число 1, тому система лінійно залежна.

Пояснимо, чому трійка векторів на площині завжди лінійно залежна.

Випадок 1. До складу трійки входить нуль-вектор. Цей випадок вже розглянуто.

Випадок 2. Серед трьох векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ два вектори паралельні, наприклад, $\vec{a}\parallel\vec{b}$. Тоді $\vec{a}=k\vec{b}$. Складаємо лінійну комбінацію

$$1\cdot\vec{a}-k\cdot\vec{b}+0\cdot\vec{c}=k\vec{b}-k\vec{b}+0=0,$$

але лінійна комбінація нетривіальна, бо містить коефіцієнт 1. Лінійну залежність доведено.

Випадок 3. Трійка векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ не містить двох паралельних векторів (рис. 1.2.2).

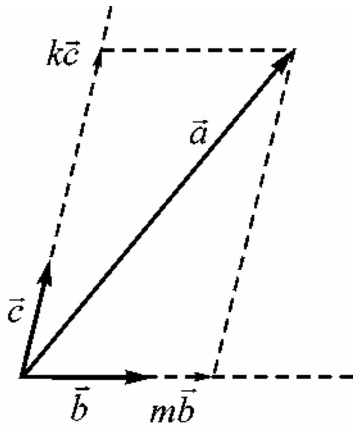


Рис. 1.2.2

Побудувавши паралелограм, ми розклали $\vec{a}$ по двох непаралельних напрямках $\vec{b}$ та $\vec{c}$:

$$\vec{a}=k\vec{c}+m\vec{b},$$

отже, трійка лінійно залежна.

Приклад 1.2.2. Нехай $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ лінійно незалежні. При яких значеннях числа λ вектори

$$\lambda\vec{a}+\vec{b}+\vec{c},\quad \vec{a}+\lambda\vec{b}+\vec{c},\quad \vec{a}+\vec{b}+\lambda\vec{c}$$

утворюють лінійно залежну трійку?

Розв'язання. Складаємо лінійну комбінацію

$$x(\lambda\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})+y(\vec{a}+\lambda\vec{b}+\vec{c})+z(\vec{a}+\vec{b}+\lambda\vec{c})=0.$$

Зрозуміло, що $x=y=z=0$ задовольняє умову, але для лінійної залежності необхідно, щоб хоча б одне із чисел $x,\ y$ та z не дорівнювало 0.

Перетворимо вираз лінійної комбінації:

$$\vec{a}(\lambda x+y+z)+\vec{b}(x+\lambda y+z)+\vec{c}(x+y+\lambda z)=0.$$

Але трійка $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ за умовою лінійно незалежна. Отже, якщо її лінійна комбінація дорівнює 0, усі коефіцієнти повинні дорівнювати 0:

$$\begin{cases}\lambda x+y+z=0,\\ x+\lambda y+z=0,\\ x+y+\lambda z=0.\end{cases}$$

Тепер треба з'ясувати, при яких λ існує *нетривіальний* розв'язок системи, тобто $x^2+y^2+z^2\neq 0$. Зрозуміло, що це можливе лише у випадку

$$\Delta=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=0.$$

Якщо ж $\Delta\neq 0$, то система має *єдиний* розв'язок, а саме: $x=y=z=0$.

Рівняння $\Delta=\lambda^3-3\lambda+2=0$ має корені $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=-2$.

Приклад 1.2.3. Перевірити, що два вектори $\vec{a}(-5;-1)$ та $\vec{b}(-3;-10)$ утворюють базис на площині. Розкласти вектор $\vec{c}(-1;2)$ за базисом $\vec{a},\vec{b}$.

Розв’язання. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ не паралельні, тому що їх координати не пропорційні:

$$\frac{-5}{-3} \neq \frac{-1}{-10}.$$

Отже, $\vec{a}$ та $\vec{b}$ – базис.

Знайдемо координати $\vec{c}$. Нехай

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}.$$

Порівняємо відповідні координати:

$$\begin{cases} -1 = x \cdot (-5) + y \cdot (-3), \\ 2 = x \cdot (-1) + y \cdot (-10). \end{cases}$$

Система має єдиний розв’язок

$$x = \frac{16}{47}, \quad y = -\frac{11}{47},$$

отже,

$$\vec{c} = \frac{16}{47}\vec{a} - \frac{11}{47}\vec{b}.$$

1.2.2. Скалярний добуток векторів

Означення. Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається число

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}),$$

де $(\vec{a} \wedge \vec{b})$ – кут між $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

Позначається скалярний добуток $(\vec{a}, \vec{b})$, або $\vec{a} \cdot \vec{b}$, або $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle$.

Скалярний добуток можна також виразити формулою

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot np_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}| \cdot np_{\vec{b}}\vec{a}.$$

Скалярний добуток дорівнює 0 тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ перпендикулярні або один із них нульовий.

Властивості скалярного добутку:

1) $\left(\alpha\vec{a}, \vec{b}\right) = \alpha\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$;
2) $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \left(\vec{b}, \vec{a}\right)$;
3) $\left(\vec{a}, \vec{a}\right) = |\vec{a}|^2$;
4) $\left(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\vec{a}, \vec{c}\right) + \left(\vec{b}, \vec{c}\right)$.

Якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ задані своїми координатами в прямокутній системі координат $\vec{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$, $\vec{b} = \left(b_x, b_y, b_z\right)$, то їх скалярний добуток можна знайти за формулою

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ задається виразом

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|},$$

або в координатах

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Кутом між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається кут між векторами, що дорівнюють $\vec{a}$ та $\vec{b}$ відповідно і мають загальний початок.

Приклад 1.2.4. Довести, що вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}(\vec{a},\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a},\vec{b})$ взаємно перпендикулярні.

Розв'язання. Якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}(\vec{a},\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a},\vec{b}) = \vec{d}$ перпендикулярні, то їх скалярний добуток повинен дорівнювати нулю. Знайдемо $(\vec{a},\vec{d})$:

$$(\vec{a},\vec{d}) = \vec{a}(\vec{b}(\vec{a},\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a},\vec{b})) = (\vec{a},\vec{b})(\vec{a},\vec{c}) - (\vec{a},\vec{c})(\vec{a},\vec{b}) = 0,$$

тобто вектори $\vec{a}$ та $\vec{d}$ перпендикулярні.

Приклад 1.2.5. Кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ дорівнює $\frac{\pi}{3}$; $|\vec{a}| = 2$; $|\vec{b}| = 1$. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{p}, \vec{q}$, якщо $\vec{p} = 3\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} + 2\vec{b}$.

Розв'язання.

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = (3\vec{a} - \vec{b}; \vec{a} + 2\vec{b}) = 3(\vec{a},\vec{a}) + 6(\vec{a},\vec{b}) - (\vec{b},\vec{a}) - 2(\vec{b},\vec{b}) =$$
$$= 3(\vec{a},\vec{a}) + 5(\vec{a},\vec{b}) - 2(\vec{b},\vec{b}) = 3|\vec{a}|^2 + 5|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) - 2|\vec{b}|^2 =$$
$$= 3 \cdot 4 + 5 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 = 15.$$

Приклад 1.2.6. Знайти кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо

$$\vec{a} = \vec{p} + \vec{q}; \quad \vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q}; \quad \vec{p} \wedge \vec{q} = \frac{2}{3}\pi; \quad |\vec{p}| = 4; \quad |\vec{q}| = 3.$$

Розв'язання. Знайдемо косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

$$\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Спочатку обчислимо скалярний добуток:

$$(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{p} + \vec{q}, 2\vec{p} - \vec{q}) = 2(\vec{p},\vec{p}) + (\vec{q},\vec{p}) - (\vec{q},\vec{q}) =$$
$$= 2|\vec{p}|^2 + |\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cos(\vec{p} \wedge \vec{q}) - |\vec{q}|^2 = 32 - 6 - 9 = 17;$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a},\vec{a})} = \sqrt{(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p} + \vec{q})} = \sqrt{(\vec{p},\vec{p}) + 2(\vec{p},\vec{q}) + (\vec{q},\vec{q})} = \sqrt{16 - 12 + 9} = \sqrt{13};$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{(\vec{b},\vec{b})} = \sqrt{(2\vec{p} - \vec{q}, 2\vec{p} - \vec{q})} = \sqrt{4(\vec{p},\vec{p}) - 4(\vec{p},\vec{q}) + (\vec{q},\vec{q})} = \sqrt{64 + 24 + 9} = \sqrt{97}.$$

Тоді

$$\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{17}{\sqrt{13 \cdot 97}},$$

звідки $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \arccos\frac{17}{\sqrt{1261}}$.

Приклад 1.2.7. Знайти довжину вектора $\vec{a} = \vec{p} + \vec{q} + \vec{r}$, якщо

$$(\vec{p} \wedge \vec{q}) = (\vec{p} \wedge \vec{r}) = (\vec{q} \wedge \vec{r}) = \frac{\pi}{3}; \quad |\vec{p}| = 2; \quad |\vec{q}| = 1; \quad |\vec{r}| = 3.$$

Розв'язання.

$$|\vec{a}|=\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}=\sqrt{(\vec{p}+\vec{q}+\vec{r},\vec{p}+\vec{q}+\vec{r})}=$$
$$=\sqrt{(\vec{p},\vec{p})+(\vec{q},\vec{q})+(\vec{r},\vec{r})+2(\vec{p},\vec{q})+2(\vec{p},\vec{r})+2(\vec{q},\vec{r})}=$$
$$=\sqrt{4+1+9+2+2\cdot 3+3}=\sqrt{25}=5.$$

Приклад 1.2.8. Дано два вектори $\vec{a},\vec{b}$ $(\vec{a}\neq 0)$. Знайти ортогональну проекцію (векторну) вектора $\vec{a}$ на напрям вектора $\vec{b}$.

Розв'язання. Подамо вектор $\vec{a}$ у вигляді $\vec{a}=\vec{c}+\vec{d}$, де $\vec{d}$ – вектор, ортогональний вектору $\vec{b}$, а вектор $\vec{c}$ – ортогональна проекція вектора $\vec{a}$ на напрям вектора $\vec{b}$, тобто $\vec{c}=\lambda\vec{b}$ (рис. 1.2.3).

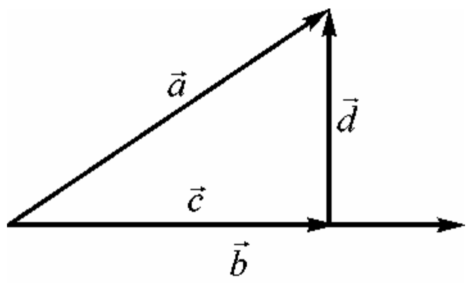


Рис. 1.2.3

Помножимо обидві частини рівності $\vec{a}=\vec{c}+\vec{d}$ скалярно на вектор $\vec{b}$:

$$(\vec{b},\vec{a})=(\vec{b},\vec{c})+(\vec{b},\vec{d})=\lambda(\vec{b},\vec{b})=\lambda\,|\vec{b}\,|^2.$$

Скалярний добуток $(\vec{b},\vec{d})$ дорівнює нулю, тому що вектори $\vec{b}$ та $\vec{d}$ перпендикулярні, тоді

$$\lambda=\frac{(\vec{b},\vec{a})}{|\vec{b}\,|^2}.$$

Таким чином,

$$\vec{c}=\lambda\vec{b}=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{b}\,|^2}\vec{b}.$$

Приклад 1.2.9. Дано координати векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ у прямокутній системі координат: $\vec{a}(-3;\ 4;\ 2)$; $\vec{b}(5;\ 10;\ 0)$. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та кут між ними.

Розв'язання. Скористаємося формулою для обчислення скалярного добутку векторів у декартовій системі координат:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-3)\cdot 5+4\cdot 10+2\cdot 0=25.$$

Знайдемо косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ за допомогою формули

$$\cos(\vec{a}\wedge\vec{b})=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}\,|\cdot|\vec{b}\,|}.$$

Обчислимо довжини векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$:

$$|\vec{a}\,|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=\sqrt{9+16+4}=\sqrt{29};$$
$$|\vec{b}\,|=\sqrt{25+100}=\sqrt{125}.$$

Отже,

$$\cos(\vec{a}\wedge\vec{b})=\frac{25}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{125}}=\sqrt{\frac{5}{29}},$$

звідки

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \arccos\sqrt{\frac{5}{29}}.$$

Приклад 1.2.10. Обчислити $\vec{b}(\vec{a},\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a},\vec{b})$, якщо

$$\vec{a}(2; -1; 1); \vec{b}(3; 5; -4); \vec{c}(0; 3; -1).$$

Розв'язання.

$$(\vec{a},\vec{c}) = 2\cdot 0 + (-1)\cdot 3 + 1\cdot(-1) = -4;$$

$$\vec{b}(\vec{a},\vec{c}) = -4(3\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k}) = -12\vec{i} - 20\vec{j} + 16\vec{k}$$

($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори на осях *x, y, z* прямокутної системи координат);

$$(\vec{a},\vec{b}) = 2\cdot 3 + (-1)\cdot 5 + 1\cdot(-4) = -3;$$

$$\vec{c}(\vec{a},\vec{b}) = -3(3\vec{j} - \vec{k}) = -9\vec{j} + 3\vec{k}.$$

Отже, $\vec{b}(\vec{a},\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a},\vec{b}) = -12\vec{i} - 11\vec{j} + 13\vec{k}$.

Приклад 1.2.11. Дано координати векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ у декартовій системі координат: $\vec{a}(3; -1; 4)$; $\vec{b}(2; 5; 1)$. Знайти $np_{\vec{b}}\vec{a}$.

Розв'язання.

$$np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{3\cdot 2 + (-1)\cdot 5 + 4\cdot 1}{\sqrt{4+25+1}} = \frac{5}{\sqrt{30}} = \sqrt{\frac{5}{6}}.$$

Приклад 1.2.12. Знайти напрямні косинуси вектора $\vec{a}(4; 3; 0)$.

Розв'язання. Напрямні косинуси – це косинуси кутів, що утворює вектор $\vec{a}$ з осями *x, y, z* ($\alpha = \vec{a} \wedge Ox$; $\beta = \vec{a} \wedge Oy$, $\gamma = \vec{a} \wedge Oz$):

$$\cos\alpha = \cos(\vec{a} \wedge \vec{i}) = \frac{(\vec{a},\vec{i})}{|\vec{i}||\vec{a}|} = \frac{a_x}{|a|} = \frac{4}{5};$$

$$\cos\beta = \cos(\vec{a} \wedge \vec{j}) = \frac{(\vec{a},\vec{j})}{|\vec{j}||\vec{a}|} = \frac{a_y}{|a|} = \frac{3}{5};$$

$$\cos\gamma = \cos(\vec{a} \wedge \vec{k}) = \frac{(\vec{a},\vec{k})}{|\vec{k}||\vec{a}|} = \frac{a_z}{|a|} = 0.$$

Зауважимо, що $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, тобто вектор $\vec{a}^0(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ є ортом вектора $\vec{a}$.

Приклад 1.2.13. Визначити кут між діагоналями паралелограма, вершини якого розташовані в точках $A(3; -1; 2)$, $B(0; 4; 6)$, $C(5; 1; 3)$.

Розв'язання. Кут між діагоналями паралелограма – це кут між векторами $\vec{d}_1 = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ та $\vec{d}_2 = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$:

$$\vec{d}_1 = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = -3\vec{i} + 5\vec{j} + 4\vec{k} + 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} = -\vec{i} + 7\vec{j} + 5\vec{k};$$

$$\vec{d}_2 = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} - (-3\vec{i} + 5\vec{j} + 4\vec{k}) = 5\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k};$$

$$\cos(\vec{d}_1 \wedge \vec{d}_2) = \frac{\vec{d}_1 \wedge \vec{d}_2}{|\vec{d}_1|\cdot|\vec{d}_2|} = \frac{-5-21-15}{\sqrt{1+49+25}\cdot\sqrt{25+9+9}} = \frac{-41}{\sqrt{75}\cdot\sqrt{43}}.$$

Отже,

$$(\vec{d}_1 \wedge \vec{d}_2) = \pi - \arccos\frac{41}{\sqrt{75}\cdot\sqrt{43}}.$$

Приклад 1.2.14. Вектор $\vec{x}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}(2;-1;4)$, $\vec{b}(1;3;-2)$ та задовольняє умову $\vec{x}(3\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})=5$. Знайти координати вектора $\vec{x}$.

Розв'язання. Позначимо невідомі координати вектора $\vec{x}(\alpha,\beta,\gamma)$. Оскільки вектор $\vec{x}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, то $(\vec{a},\vec{x})=0,\ (\vec{b},\vec{x})=0$.

Маємо систему трьох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} 2\alpha-\beta+4\gamma=0 & ((\vec{a},\vec{x})=0); \\ \alpha+3\beta-2\gamma=0 & ((\vec{b},\vec{x})=0); \\ 3\alpha+\beta-\gamma=5 & (\vec{x}(3\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})=5). \end{cases}$$

Визначник Δ системи дорівнює -29, тобто існує єдиний розв'язок системи:

$$\alpha=\frac{50}{29};\quad \beta=\frac{40}{29};\quad \gamma=\frac{-35}{29}.$$

Приклад 1.2.15. Обчислити $(\vec{a},\vec{b})+(\vec{b},\vec{c})+(\vec{c},\vec{a})$, якщо $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$.

Розв'язання. Помножимо обидві частини рівності $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ скалярно на вектор $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$:

$$\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)=0;\ \vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\vec{a}\vec{b}+2\vec{a}\vec{c}+2\vec{b}\vec{c}=0;$$

$$\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}=-\frac{1}{2}\left(\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2\right);$$

$$\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}=-\frac{3}{2}.$$

Отже,

$$(\vec{a},\vec{b})+(\vec{b},\vec{c})+(\vec{c},\vec{a})=-\frac{3}{2}.$$

Приклад 1.2.16. У рівнобедреному трикутнику медіани, проведені до бічних сторін, взаємно перпендикулярні. Знайти кути трикутника.

Розв'язання. Нехай AL та CK – медіани (рис. 1.2.4). Тоді

$$\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BL}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

$$\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}.$$

Оскільки вектори $\overrightarrow{AL}$ та $\overrightarrow{CK}$ взаємно перпендикулярні, то $(\overrightarrow{AL},\overrightarrow{CK})=0$. С другого боку,

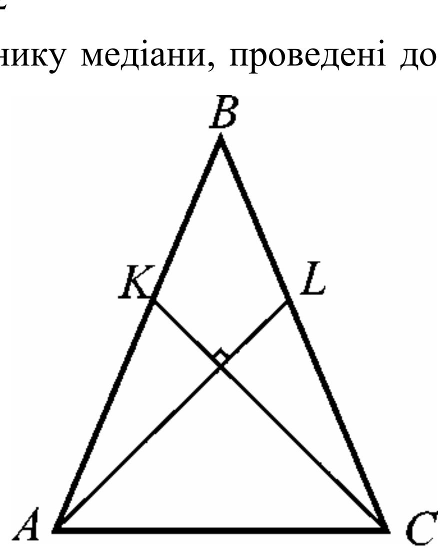


Рис. 1.2.4

$$(\overrightarrow{AL},\overrightarrow{CK}) = (\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}) =$$

$$= (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BA}) +$$

$$+\frac{1}{4}(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) - \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|^2 - \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) = \frac{5}{4}(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) - |\overrightarrow{AB}|^2,$$

тому що $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$. Тоді

$$\frac{5}{4}(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) = |AB|^2,$$

або

$$\frac{5}{4}|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cos(\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC}) = |AB|^2.$$

Звідси маємо

$$\cos(\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC}) = \frac{4|AB|^2}{5|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|} = \frac{4}{5},$$

тобто кут B трикутника ABC дорівнює $\arccos\frac{4}{5}$. Тоді

$$\angle A = \angle C = \frac{1}{2}\left(\pi - \arccos\frac{4}{5}\right).$$

Приклад 1.2.17. Знайти $|\vec{a}-\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{6}$.

Розв'язання.

$$|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{(\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{b})} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + 2(\vec{a},\vec{b}) + |\vec{b}|^2} = \sqrt{1+2(\vec{a},\vec{b})+4} = \sqrt{6};$$

$$5+2(\vec{a},\vec{b}) = 6;\ (\vec{a},\vec{b}) = \frac{1}{2};$$

$$|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{(\vec{a}-\vec{b},\vec{a}-\vec{b})} = \sqrt{|\vec{a}|^2 - 2(\vec{a},\vec{b}) + |\vec{b}|^2} = \sqrt{1+4-2\frac{1}{2}} = 2.$$

1.2.3. Векторний добуток. Подвійний векторний добуток

Трійка векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ називається правою трійкою, або такою, що має додатну орієнтацію, якщо найкоротший поворот від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ з кінця вектора $\vec{c}$ можна бачити таким, що відбувається проти годинникової стрілки; відповідно трійка векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ називається лівою, або такою, що має від′ємну орієнтацію, якщо цей поворот відбувається за годинниковою стрілкою.

Векторним добутком векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c}$ (позначається $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$ або $\vec{c} = [\vec{a},\vec{b}]$), який задовольняє такі умови:

1) $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$;

2) впорядкована трійка векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – права трійка;

3) $|\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin(\vec{a}\wedge\vec{b})$, тобто модуль вектора $\vec{c}$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b}$.

Властивості векторного добутку:

1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$;

2) $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$;

3) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$;

4) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$, якщо $\vec{a},\vec{b}$ – колінеарні вектори;

5) $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$, якщо (a_1,a_2,a_3), (b_1,b_2,b_3) – координати векторів $\vec{a},\vec{b}$ у прямокутній системі координат.

Вектор $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ називається *подвійним векторним добутком*. Для будь-яких векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ справедлива формула

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a},\vec{c})-\vec{c}(\vec{a},\vec{b}).$$

Приклад 1.2.18. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=\vec{m}+2\vec{n}$ та $\vec{b}=3\vec{m}-\vec{n}$, якщо $|\vec{m}|=|\vec{n}|=2$, а $(\vec{m}\wedge\vec{n})=\dfrac{\pi}{6}$.

Розв'язання. Модуль векторного добутку векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

$$S=|\vec{a}\times\vec{b}|.$$

Знайдемо $\vec{a}\times\vec{b}$:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(\vec{m}+2\vec{n})\times(3\vec{m}-\vec{n})=3\vec{m}\times\vec{m}+6\vec{n}\times\vec{m}-\vec{m}\times\vec{n}-2\vec{n}\times\vec{n}=$$
$$=6\vec{n}\times\vec{m}+\vec{n}\times\vec{m}=7\vec{n}\times\vec{m}\qquad(\vec{m}\times\vec{m}=0,\ \vec{n}\times\vec{n}=0).$$

Обчислимо площу паралелограма:

$$S=|\vec{a}\times\vec{b}|=7|\vec{n}\times\vec{m}|=7|\vec{n}|\cdot|\vec{m}|\sin(\vec{n}\wedge\vec{m})=7\cdot2\cdot2\cdot\frac{1}{2}=14\ \text{(кв. од.)}.$$

Приклад 1.2.19. Знайти площу трикутника та довжину висоти, проведеної з вершини *B*, якщо трикутник задано координатами вершин $A(2;0;3)$; $B(-4;2;1)$; $C(0;5;-7)$.

Розв'язання. Оскільки площа трикутника *ABC* дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{AB}$, то

$$S_\Delta=1/2\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\right|.$$

Знайдемо векторний добуток векторів $\overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{AB}$ (вектори задано координатами в прямокутній системі координат):

$$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 5 & -10\\ -6 & 2 & -2\end{vmatrix}=10\vec{i}+56\vec{j}+26\vec{k}.$$

Тоді

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{100+3136+676}=\frac{1}{2}\sqrt{3912},$$

$$h_{AC}=\frac{2S_{\Delta ABC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{\sqrt{3912}}{\sqrt{4+25+100}}=\sqrt{\frac{3912}{129}}.$$

Приклад 1.2.20. Площа паралелограма дорівнює 5. Знайти площу паралелограма, сторонами якого є вектори діагоналей цього паралелограма.

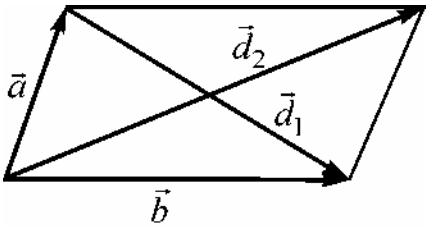


Рис. 1.2.5

Розв'язання. Оскільки $\vec{d}_1=\vec{b}-\vec{a}$, $\vec{d}_2=\vec{a}+\vec{b}$ (рис. 1.2.5), площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{d}_1$, $\vec{d}_2$, дорівнює $S=|\vec{d}_1\times\vec{d}_2|=|(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{a}+\vec{b})|=2|\vec{b}\times\vec{a}|$, тобто площа паралелограма, побудованого на діагоналях паралелограма, дорівнює подвоєній площі даного паралелограма: $S=10$ кв. од.

Приклад 1.2.21. Знайти одиничний вектор $\vec{c}$, перпендикулярний до векторів $\vec{a},\vec{b}$, якщо $\vec{a}=\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=4\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$.

Розв'язання. Згідно з означенням векторного добутку одиничний вектор $\vec{c}$, перпендикулярний до векторів $\vec{a},\vec{b}$, є пронормованим векторним добутком векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ (або $\vec{b}$ та $\vec{a}$):

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 3 & -2\\ 4 & -1 & 3\end{vmatrix}=7\vec{i}-11\vec{j}-13\vec{k};$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{49+121+169}=\sqrt{339}.$$

Тоді шуканий вектор

$$\vec{c}=\pm\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}=\pm\frac{7}{\sqrt{339}}\vec{i}\mp\frac{11}{\sqrt{339}}\vec{j}\mp\frac{13}{\sqrt{339}}\vec{k}.$$

Приклад 1.2.22. Знайти вектор $\vec{d}$, перпендикулярний до векторів $\vec{a}(2;-5;1)$; $\vec{b}(1;-2;3)$, такий, що $|\vec{d}|=3$.

Розв'язання.

$$\vec{d}=\pm\frac{3(\vec{a}\times\vec{b})}{|\vec{a}\times\vec{b}|}\text{ (див. попередній приклад);}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -5 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix}=-13\vec{i}-5\vec{j}+\vec{k};$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{195};$$

$$\vec{d}=\pm\frac{3(13\vec{i}+5\vec{j}-\vec{k})}{\sqrt{195}}=\pm\frac{3}{\sqrt{195}}(13\vec{i}+5\vec{j}-\vec{k}).$$

Приклад 1.2.23. Знайти $|\sin\alpha|$, де α – кут між вектором $\overrightarrow{AD}$ і площиною трикутника ABC, якщо $A(1;1;0)$; $B(0;3;1)$; $C(0;0;4)$; $D(3;5;1)$.

Розв'язання. Знайдемо векторний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$ – вектор, перпендикулярний до площини трикутника ABC:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 9\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}.$$

Знайдемо косинус кута між вектором $\overrightarrow{AD} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$ і вектором $3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, колінеарним вектору $\vec{n}$:

$$\cos(\vec{n} \wedge \overrightarrow{AD}) = \frac{(\vec{n}, \overrightarrow{AD})}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \frac{6+4+1}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{21}} = \sqrt{\frac{11}{21}}.$$

Тоді

$$|\sin\alpha| = |\cos(\vec{n} \wedge \overrightarrow{AD})| = \sqrt{\frac{11}{21}}.$$

Приклад 1.2.24. Знайти проекцію вектора $\vec{a} = 8\vec{m} + \vec{n} - 3\vec{p}$ на вісь, яка має напрям вектора $(\vec{m} - \vec{p}) \times (2\vec{m} + \vec{n} - \vec{p})$, якщо $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$ – взаємно ортогональні орти, що утворюють праву трійку.

Розв'язання. Оскільки $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$ – взаємно ортогональні орти, то можна скористатися формулами для знаходження векторного та скалярного добутків векторів, заданих у прямокутній системі координат:

$$\vec{c} = (\vec{m} - \vec{p}) \times (2\vec{m} + \vec{n} - \vec{p}) = \begin{vmatrix} \vec{m} & \vec{n} & \vec{p} \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{m} - \vec{n} + \vec{p},$$

$$np_{\vec{c}}\,\vec{a} = |\vec{a}| \cos(\vec{a} \wedge \vec{c}) = \frac{(\vec{a}, \vec{c})}{|\vec{c}|} = \frac{8 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-3) \cdot 1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Приклад 1.2.25. Три сили $\vec{f}_1(2;-1;3)$; $\vec{f}_2(3;2;-1)$; $\vec{f}_3(-2;1;4)$ прикладені до точки $C(-1;\ 5;\ 1)$. Знайти величину та напрямні косинуси моменту рівнодійної цих сил відносно точки $O(2;\ 2;\ 1)$.

Розв'язання. Рівнодійна трьох сил дорівнює їх сумі:

$$\vec{f} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}.$$

Знаходимо момент рівнодійної

$$M_0\vec{f} = \overrightarrow{OC} \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 18\vec{i} + 18\vec{j} - 15\vec{k} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k},$$

його величину

$$|M_0\vec{f}| = \sqrt{18^2 + 18^2 + 15^2} = \sqrt{873},$$

а також напрямні косинуси

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\vec{a}|} = \frac{18}{\sqrt{873}};\ \cos\beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|} = \frac{18}{\sqrt{873}};\ \cos\gamma = \frac{a_3}{|a|} = \frac{-15}{\sqrt{873}},$$

де $\vec{a} = M_0\vec{f}$.

Приклад 1.2.26. Виразити через вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ який-небудь вектор $\vec{x}$, який задовольняє рівнянню $\vec{x}\times\vec{a} = \vec{b}$, якщо $\vec{a} \neq 0$.

Розв'язання. Оскільки $\vec{x}\times\vec{a} = \vec{b}$, то $|\vec{b}| = |\vec{x}|\cdot|\vec{a}|\sin(\vec{a}\wedge\vec{x})$. Нехай $\sin(\vec{a}\wedge\vec{x}) = \sin 90^0$, тоді будемо шукати вектор $\vec{x}$ у вигляді

$$\vec{x} = \lambda(\vec{a}\times\vec{b}),\ |\vec{x}| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|},\text{ а } \lambda = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|} = \frac{1}{|\vec{a}|^2}.$$

Отже,

$$\vec{x} = \frac{1}{|\vec{a}|^2}(\vec{a}\times\vec{b}).$$

Приклад 1.2.27. Довести, що для трьох неколінеарних векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ рівності $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{c} = \vec{c}\times\vec{a}$ виконуються тоді і тільки тоді, коли $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = 0$.

Розв'язання.

1. Доведемо, що $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = 0$, якщо $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{c} = \vec{c}\times\vec{a}$. Припустимо, що неколінеарні вектори – $\vec{a}$ та $\vec{b}$, тоді $\vec{a}\times\vec{b} \neq 0$. З рівності $\vec{b}\times\vec{c} = \vec{c}\times\vec{a}$ маємо $\vec{b}\times\vec{c} - \vec{c}\times\vec{a} = 0$, або $\vec{b}\times\vec{c} + \vec{a}\times\vec{c} = 0$, або $(\vec{b}+\vec{a})\times\vec{c} = 0$. Оскільки вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ неколінеарні, то $\vec{b}+\vec{a} \neq 0$ і рівність $(\vec{b}+\vec{a})\times\vec{c} = 0$ може виконуватися тільки тоді, коли $\vec{c} = \lambda(\vec{a}+\vec{b})$, тобто коли вектор $\vec{c}$ колінеарний вектору $\vec{a}+\vec{b}$. Підставимо цей вираз для $\vec{c}$ у рівність $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{c}$:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times(\lambda(\vec{a}+\vec{b})) = \lambda(\vec{b}\times\vec{a}) \Rightarrow \lambda = -1.$$

Тоді $\vec{c} = -\vec{a}-\vec{b}$, або $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = 0$, що й треба було довести.

2. Доведемо, що $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{c} = \vec{c}\times\vec{a}$, якщо $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = 0$. Для цього домножимо обидві частини рівності $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = 0$ на вектор $\vec{b}$ векторно:

$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\times\vec{b} = 0;\ \vec{a}\times\vec{b} + \vec{b}\times\vec{b} + \vec{c}\times\vec{b} = 0;\ \vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{c}.$$

Аналогічно, домножуючи рівність $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = 0$ на вектор $\vec{c}$, одержимо $\vec{b}\times\vec{c} = \vec{c}\times\vec{a}$.

Приклад 1.2.28. Довести тотожність (формулу Лагранжа)

$$(\vec{a}\times\vec{b})^2 = \begin{vmatrix} (\vec{a},\vec{a}) & (\vec{a},\vec{b}) \\ (\vec{a},\vec{b}) & (\vec{b},\vec{b}) \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

$$(\vec{a}\times\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2(\vec{a}\wedge\vec{b}) = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1-\cos^2(\vec{a}\wedge\vec{b})) =$$

$$= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2(\vec{a}\wedge\vec{b}) = (\vec{a},\vec{a})(\vec{b},\vec{b}) - (\vec{a},\vec{b})(\vec{a},\vec{b}) = \begin{vmatrix} (\vec{a},\vec{a}) & (\vec{a},\vec{b}) \\ (\vec{a},\vec{b}) & (\vec{b},\vec{b}) \end{vmatrix}.$$

Приклад 1.2.29. Довести тотожність Якобі

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}+(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}+(\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b}=0.$$

Розв'язання.

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}+(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}+(\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b}=-\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})-\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})-\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})=$$
$$=-\vec{a}(\vec{c},\vec{b})+\vec{b}(\vec{c},\vec{a})-\vec{b}(\vec{a},\vec{c})+\vec{c}(\vec{a},\vec{b})-\vec{c}(\vec{b},\vec{a})+\vec{a}(\vec{b},\vec{c})=$$
$$=-\vec{a}(\vec{b},\vec{c})+\vec{b}(\vec{c},\vec{a})-\vec{b}(\vec{c},\vec{a})+\vec{c}(\vec{a},\vec{b})-\vec{c}(\vec{a},\vec{b})+\vec{a}(\vec{b},\vec{c})=0.$$

Для доведення використали:
1) формулу для обчислення подвійного векторного добутку;
2) властивості скалярного та векторного добутків.

1.2.4. Мішаний добуток векторів

Мішаним добутком векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ (позначається $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ або $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$) називається скалярний добуток векторів $\vec{a}\times\vec{b}$ та $\vec{c}$:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}).$$

Якщо $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$; $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$; $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$, то

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

де координати векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ задано в прямокутній системі координат.

Якщо трійка $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ має додатну орієнтацію (права трійка), то $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})>0$, а якщо – від'ємну (ліва трійка), то $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})<0$.

Геометричний зміст мішаного добутку: об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, дорівнює

$$V=|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|.$$

Необхідна і достатня умова компланарності векторів – рівність нулю їх мішаного добутку.

Властивості мішаного добутку:
1) $(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c})=(\vec{a},\vec{b}\times\vec{c})$;
2) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{c},\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{c},\vec{a})=-(\vec{b},\vec{a},\vec{c})=-(\vec{c},\vec{b},\vec{a})=-(\vec{a},\vec{c},\vec{b})$.

Приклад 1.2.30. Перевірити компланарність векторів $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ та $\vec{c}=-5\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}$.

Розв'язання. Оскільки необхідна і достатня умова компланарності векторів – рівність нулю їх мішаного добутку, то знайдемо мішаний добуток векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -5 & 4 & -5 \end{vmatrix}=-3+10-7=0.$$

Отже, вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – компланарні.

Приклад 1.2.31. Довести, що чотири точки $A(0;-1;1)$, $B(1;-3;1)$, $C(1;-2;3)$, $D(0;1;5)$ лежать в одній площині.

Розв'язання. Задачу буде розв'язано, якщо доведемо, що вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ лежать в одній площині, а це питання вирішене в попередньому прикладі: $\overrightarrow{AB} = \vec{i} - 2\vec{j}$; $\overrightarrow{AC} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$; $\overrightarrow{AD} = 2\vec{j} + 4\vec{k}$. Отже,

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -8 + 8 + 0 = 0,$$

тобто точки *A, B, C, D* лежать в одній площині.

Приклад 1.2.32. При якому значенні λ вектори $\vec{a} = \lambda\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -8\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = -\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ лінійно залежні?

Розв'язання. Якщо три вектори лінійно залежні, то вони компланарні. Отже, мішаний добуток цих векторів повинен дорівнювати нулю:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -8 & 2 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 12\lambda - 28 = 0,$$

звідки $\lambda = \dfrac{7}{3}$.

Приклад 1.2.33. Знайти об'єм тетраедра, радіусами-векторами вершин якого є

$$\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1),\ \vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2),\ \vec{r}_3 = (x_3, y_3, z_3),\ \vec{r}_4 = (x_4, y_4, z_4).$$

Розв'язання. Якщо $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ – радіуси-вектори вершин тетраедра, то $\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1, \vec{r}_4 - \vec{r}_1$ – вектори, на яких як на ребрах побудовано цей тетраедр. Враховуючи, що об'єм тетраедра дорівнює одній шостій об'єму паралелепіпеда, маємо

$$V = \frac{1}{6} |(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1, \vec{r}_4 - \vec{r}_1)| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}.$$

Приклад 1.2.34. Знайти об'єм паралелепіпеда та довжину висоти, проведеної з вершини *B*, якщо вершинами паралелепіпеда є точки $A(2;4;1)$, $B(0;-1;3)$, $C(3;2;-5)$, $D(2;-3;0)$.

Розв'язання. Знайдемо мішаний добуток векторів $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} -2 & -5 & 2 \\ 1 & -2 & -6 \\ 0 & -7 & -1 \end{vmatrix} = 61.$$

Отже, об'єм паралелепіпеда дорівнює $V = 61$.

Довжина висоти H , проведеної з вершини B на грань ACD, дорівнює

$H=\dfrac{V}{S}$, де S – площа паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{AD}$, яка дорівнює $S=\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right|$. Знаходимо векторний добуток

$$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & -6\\ 0 & -7 & -1\end{vmatrix}=-40\vec{i}+\vec{j}-7\vec{k}$$

і площу

$$S=\sqrt{1600+1+49}=\sqrt{1650}=5\sqrt{66}\,\textbf{.}$$

Таким чином,

$$H=\frac{\left|\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right|}{|\,\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\,|}=\frac{61}{5\sqrt{66}}.$$

Приклад 1.2.35. Задано два неколінеарні вектори $\vec{a},\vec{b}$ та скаляр p. Знайти який-небудь вектор $\vec{x}$, який задовольняє рівнянню $(\vec{x},\vec{a},\vec{b})=p$.

Розв'язання. За означенням

$$(\vec{x},\vec{a},\vec{b})=(\vec{a}\times\vec{b},\vec{x})=|\,\vec{a}\times\vec{b}\,|\cdot|\,\vec{x}\,|\cos((\vec{a}\times\vec{b})\wedge\vec{x}).$$

Нехай вектор $\vec{x}$ колінеарний вектору $\vec{a}\times\vec{b}$: $\vec{x}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$. Оскільки

$$p=(\vec{x},\vec{a},\vec{b})=|\,\vec{a}\times\vec{b}\,|\cdot|\,\vec{x}\,|=\lambda\,|\,a\times b\,|^2,\ \lambda=\frac{p}{|\,\vec{a}\times\vec{b}\,|^2},$$

то

$$\vec{x}=\frac{p}{|\,\vec{a}\times\vec{b}\,|^2}(\vec{a}\times\vec{b}).$$

Приклад 1.2.36. Довести властивості:

1) $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=\vec{c}(\vec{a},\vec{b},\vec{d})-\vec{d}(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$;

2) $\vec{d}(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\vec{a}(\vec{b},\vec{c},\vec{d})+\vec{b}(\vec{c},\vec{a},\vec{d})+\vec{c}(\vec{a},\vec{b},\vec{d})$.

Розв'язання.

1. Позначимо вектор $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{p}$. Тоді за формулою для обчислення подвійного векторного добутку маємо

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=\vec{p}\times(\vec{c}\times\vec{d})=\vec{c}(\vec{p},\vec{d})-\vec{d}(\vec{p},\vec{c})=\vec{c}(\vec{a}\times\vec{b},\vec{d})-\vec{d}(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c})=$$
$$=\vec{c}(\vec{a},\vec{b},\vec{d})-\vec{d}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}).$$

2. З попередньої формули

$$\vec{c}(\vec{a},\vec{b},\vec{d})=(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})+\vec{d}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}).$$

Підставимо цей вираз у формулу, яку доводимо:

$$\vec{d}(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\vec{a}(\vec{b},\vec{c},\vec{d})+\vec{b}(\vec{c},\vec{a},\vec{d})+(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})+\vec{d}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}),$$

звідки

$$\vec{a}(\vec{b},\vec{c},\vec{d})+\vec{b}(\vec{c},\vec{a},\vec{d})=-(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})-(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{c}\times\vec{d})\times(\vec{a}\times\vec{b})=$$
$$=\vec{a}(\vec{c},\vec{d},\vec{b})-\vec{b}(\vec{c},\vec{d},\vec{a})=\vec{a}(\vec{b},\vec{c},\vec{d})+\vec{b}(\vec{c},\vec{a},\vec{d}),$$

що й треба було довести.

Приклад 1.2.37. Довести формулу Лапласа

$$(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\times\vec{d})=\begin{vmatrix}(\vec{a},\vec{c}) & (\vec{a},\vec{d})\\ (\vec{b},\vec{c}) & (\vec{b},\vec{d})\end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Позначимо вектор $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{l}$, тоді

$$(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{l},\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{l}\times\vec{c},\vec{d})=((\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c},\vec{d})=(-\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}),\vec{d})=$$

$$=(-\vec{a}(\vec{c},\vec{b})+\vec{b}(\vec{c},\vec{a}),\vec{d})=(\vec{c},\vec{a})(\vec{b},\vec{d})-(\vec{c},\vec{b})(\vec{a},\vec{b})=$$

$$=(\vec{a},\vec{c})(\vec{b},\vec{d})-(\vec{a},\vec{b})(\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix}(\vec{a},\vec{c}) & (\vec{a},\vec{b})\\ (\vec{b},\vec{c}) & (\vec{b},\vec{d})\end{vmatrix}.$$

При умові, що $\vec{a}=\vec{c},\ \vec{b}=\vec{d}$, одержимо формулу Лагранжа (див. приклад 1.2.28).

1.3. ЛІНІЙНІ ГЕОМЕТРИЧНІ ОБ'ЄКТИ

1.3.1. Поділ відрізка у даному відношенні

Нехай задано координати двох різних точок простору $M_1(x_1;y_1;z_1)$ та $M_2(x_2;y_2;z_2)$ (рис. 1.3.1). Точка $M(x;y;z)$ поділяє відрізок M_1M_2 відношенні λ, якщо

$$\frac{M_1M}{MM_2}=\lambda.$$

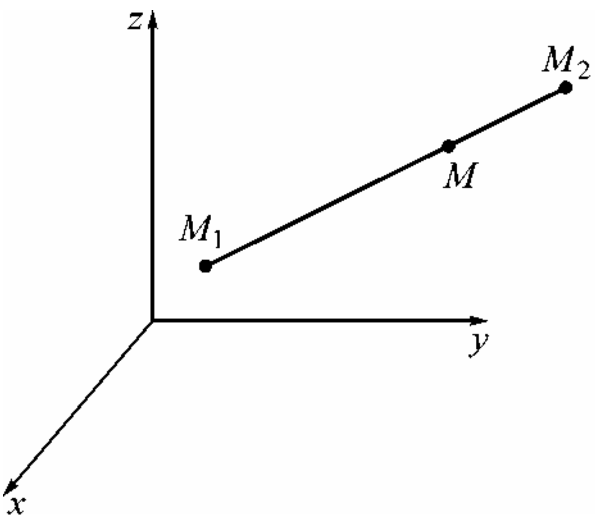


Рис. 1.3.1

Координати точки M визначаються формулами

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},$$

$$z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$

Важливий окремий випадок, коли точка M поділяє відрізок M_1M_2 навпіл, тобто $\lambda=1$, тому координати середини відрізка – це середні арифметичні координат його кінців:

$$x_c=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y_c=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z_c=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

Приклад 1.3.1. Знайти координати точки перетину медіан у трикутнику $M_1M_2M_3$ за відомими координатами його вершин (рис. 1.3.2).

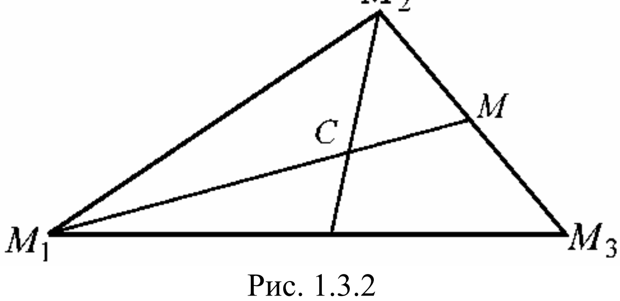


Рис. 1.3.2

Розв'язання. Нехай точка M – середина сторони M_2M_3, а точка $O(x_0;y_0;z_0)$ – точка перетину медіан.

Координати точки M – це півсуми координат M_2 та M_3, тобто

$$x_M = \frac{x_2 + x_3}{2}, \; y_M = \frac{y_2 + y_3}{2}, \;\; z_M = \frac{z_2 + z_3}{2}.$$

Як відомо з курсу планіметрії, точка O поділяє медіану у відношенні 2:1, тобто $\lambda = \dfrac{M_1O}{OM} = 2$. Отже, $x_0 = \dfrac{x_1 + 2\dfrac{x_2 + x_3}{2}}{1+2} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$.

Аналогічно y_0 та M_0 – середні арифметичні відповідних координат вершин.

Приклад 1.3.2. За відомими координатами вершин трикутника $A(1;2;3)$, $B(-1;0;2)$, $C(7;0;0)$ знайти координати точки L на стороні BC, якщо AL – бісектриса внутрішнього кута A (рис. 1.3.3).

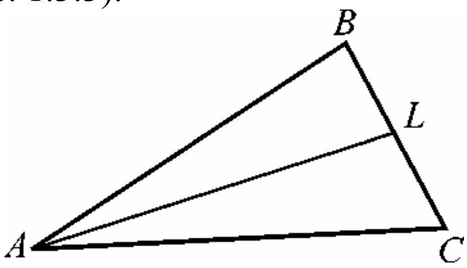


Рис. 1.3.3

Розв'язання. Відомо, що бісектриса AL поділяє сторону BC на відрізки, відношення яких дорівнює відношенню сторін AB та AC:

$$\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC}.$$

Знайдемо $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$. Вектори мають координати: $\overrightarrow{AB}(-2;-2;-1)$; $\overrightarrow{AC}(6;-2;-3)$.

Отже,

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 3, \; |\overrightarrow{AB}| = 7,$$

тоді $\lambda = \dfrac{3}{7}$.

Таким чином,

$$x_L = \frac{x_B + \lambda x_C}{1+\lambda} = \frac{-1 + \frac{3}{7}7}{1 + \frac{3}{7}} = 1{,}4, \quad y_L = \frac{y_B + \lambda y_c}{1+\lambda} = 0, \quad z_L = \frac{z_B + \lambda z_C}{1+\lambda} = 1{,}4.$$

1.3.2. Пряма лінія на площині

Нехай на площині вибрано декартову систему координат Oxy. Пряму лінію позначимо L. Перелічимо найчастіше вживані рівняння прямої, в яких $(x;y)$ – координати точки, що належить L (табл. 1.3.1).

Таблиця 1.3.1

Назва рівняння	Вигляд	Параметри
Векторне	$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$, $\vec{a} \neq 0$	$\vec{a}$ – вектор, паралельний прямій L (напрямний вектор); $\vec{r}$ – радіус-вектор точки $M_0 \in L$, $t \in R$
Параметричне	$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \end{cases}$ $l^2 + m^2 \neq 0$	$(x_0; y_0)$ – координати точки $M_0 \in L$; $(l;m)$ – координати напрямного вектора $\vec{a} \parallel L$

Закінчення табл. 1.3.1

Назва рівняння	Вигляд	Параметри
Канонічне	$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}$, $l^2+m^2\neq 0$	$(x_0;y_0)$ – координати точки $M_0\in L$; $(l;m)$ – координати напрямного вектора $\vec{a}\parallel L$
Рівняння прямої, що проходить через дві точки	$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}$	$(x_0;y_0)$ та $(x_1;y_1)$ – координати двох різних точок M_0 та M_1 на прямій L
Загальне	$Ax+By+C=0$, $A^2+B^2\neq 0$	$(A;B)$ – координати вектора нормалі $\vec{n}$, перпендикулярного до L
Рівняння з кутовим коефіцієнтом	$y=kx+b$	k – тангенс кута, утвореного прямою L та віссю Ox; b – ордината точки перетину прямої з віссю ординат

На прикладах буде пояснено, що у кожному окремому випадку зручно користуватися одним із виглядів рівняння прямої. Підкреслимо, що для розв'язування задач застосовуються методи векторної алгебри. Наприклад, кут φ між прямими L_1 і L_2 можна знайти як кут між їх напрямними векторами $\vec{a}_1(l_1,m_1)$ і $\vec{a}_2(l_2,m_2)$:

$$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2}}.$$

Аналогічно у випадку прямих, поданих загальними рівняннями

$$A_1x+B_1y+C_1=0,\ A_2x+B_2y+C_2=0,$$

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}},$$

тобто кут φ між прямими дорівнює куту між їх векторами нормалі.

Якщо $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$, то прямі паралельні.

У випадку, коли $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$, прямі збігаються.

Для рівнянь $y=k_1x+b_1$ та $y=k_2x+b_2$ кут φ між прямими можна знайти за формулою

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}.$$

Умова паралельності прямих: $k_1=k_2$, *умова перпендикулярності*: $k_1k_2=-1$.

Відстань від будь-якої точки $M_0(x_0;y_0)$ площини до прямої $Ax+By+C=0$ можна знайти за формулою

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Приклад 1.3.3. Скласти рівняння прямих, що проходять через точку

$M(7;-4)$:

1) паралельно осі Ox;
2) паралельно осі Oy;
3) паралельно прямій $2x+3y-12=0$;
4) перпендикулярно до прямої $2x+3y-12=0$;
5) перпендикулярно до прямої $y=4x+9$.

Розв'язання.

1. Напрямний вектор шуканої прямої збігається з напрямним вектором осі Ox, тобто вектором $\vec{i}(1;0)$. Зручно взяти канонічне рівняння прямої $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}$, у якому $x_0=7$, $y_0=-4$. Але в даному конкретному випадку відповідь матиме не зовсім “приємний" вигляд:

$$\frac{x-7}{1}=\frac{y+4}{0}.$$

Пояснимо, як слід розуміти такий запис. Якби рівняння мало вигляд $\frac{x-7}{1}=\frac{y+4}{\lambda}$, то його можна було б переписати як пропорцію: $\lambda(x-7)=$ $=y+4$. Ми ж будемо вважати, що рівняння $\frac{x-7}{1}=\frac{y+4}{\lambda}$ зводиться до $y+4=0(x-7)$, тобто $y+4=0$. Отже, маємо розв'язок: $y=-4$.

2. Напрямний вектор осі Oy – це $\vec{j}(0;1)$. Рівнянням шуканої прямої є $\frac{x-7}{0}=\frac{y+4}{1}$, яке слід розуміти як $x-7=0$, звідки $x=7$.

3. Рівняння прямої, паралельної прямій $2x+3y-12=0$, зручно відшукувати у вигляді $2x+3y+C=0$, а невідоме число C можна знайти з умови, що точка $M(7;-4)$ розташована на прямій. Отже, її координати повинні задовольняти рівнянню прямої $27+3(-4)+C=0$, звідки $C=-2$. Таким чином, $2x+3y-2=0$.

4. Підкреслимо, що *напрямним* вектором перпендикулярної прямої буде вектор $\vec{n}(2;3)$ *нормалі* до прямої $2x+3y-12=0$. Користуючись канонічним рівнянням, маємо

$$\frac{x-7}{2}=\frac{y+4}{3}.$$

5. Щоб скласти рівняння прямої, перпендикулярної до прямої $y=4x+9$, перетворимо рівняння до загального вигляду $4x-y+9=0$. З урахуванням вектора нормалі $\vec{n}(4;-1)$ рівняння перпендикуляра набуде вигляду $\frac{x-7}{4}=\frac{y-(-4)}{-1}$, звідки після спрощення $y=-\frac{x}{4}-\frac{9}{4}$.

Користуючись умовою $k_1k_2=-1$, можна безпосередньо з рівняння $y=4x+9$ знайти кутовий коефіцієнт шуканої прямої. Отже, $k_2=-\frac{1}{4}$, звідки маємо

$$y = -\frac{1}{4}x + b.$$

Число b знайдемо з умови, що координати $M(7; -4)$ повинні задовольняти рівнянню $-4 = -\frac{1}{4} \cdot 7 + b$, звідки $b = -\frac{9}{4}$. Нарешті маємо

$$y = -\frac{x}{4} - \frac{9}{4}.$$

Приклад 1.3.4. Скласти рівняння висоти, медіани та бісектриси внутрішнього кута, що проходять через вершину A трикутника ABC: $A(-1; 4)$, $B(4; -8)$, $C(2; 0)$.

Розв'язання.

1. Висота. Вектором нормалі, тобто перпендикуляром до висоти, є саме вектор $\overrightarrow{BC}(-2; 8)$. Користуючись загальним рівнянням, маємо

$$-2x + 8y + c = 0.$$

Невідоме c знайдемо з умови, що точка $A(-1; 4)$ належить висоті:

$$-2 \cdot (-1) + 8 \cdot 4 + c = 0, \ c = -34.$$

Рівняння висоти: $-2x + 8y - 34 = 0$ (або $-x + 4y - 17 = 0$).

2. Медіана. Знаходимо координати точки M – середини відрізка BC:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{4+2}{2} = 3, \ y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = -4.$$

Зручно скористатися рівнянням прямої, що проходить через дві точки $A(-1; 4)$ та $M(3; -4)$:

$$\frac{x - (-1)}{3 - (-1)} = \frac{y - 4}{-4 - 4}; \ \frac{x+1}{4} = \frac{y-4}{-8},$$

звідки маємо $y = -2x + 2$ – рівняння медіани.

3. Бісектриса. Аналогічно відповідній задачі векторної алгебри знайдемо вектор, що має напрям бісектриси:

$$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}; \ \overrightarrow{AB}(5; -12), \left|\overrightarrow{AB}\right| = 13; \ \overrightarrow{AC}(3; -4), \left|\overrightarrow{AC}\right| = 5.$$

Отже, $\vec{a} = \frac{5\vec{i} - 12\vec{j}}{13} + \frac{3\vec{i} - 4\vec{j}}{5} = \frac{1}{65}\left(64\vec{i} - 112\vec{j}\right)$.

Вектор $\vec{a}$ – напрямний вектор бісектриси. Зручно використати канонічне рівняння

$$\frac{x - x_A}{64/65} = \frac{y - y_A}{-112/65}, \text{ або } \frac{x+1}{64} = \frac{y-4}{-112}.$$

Рівняння бісектриси: $y = \frac{7}{4}x + \frac{9}{4}$.

Зауваження. Для пошуку напрямного вектора бісектриси ми знайшли суму одиничних векторів. Можна було взяти суму двох будь-яких векторів однакової довжини, у даному випадку, наприклад, $5\overrightarrow{AB} + 13\overrightarrow{AC}$.

Приклад 1.3.5. Знайти рівняння прямих, паралельних прямій $3x-4y+16=0$ та розташованих від неї на відстані 3.

Розв'язання. Із умови паралельності рівняння шуканих прямих мають вигляд $3x-4y+C=0$, де C – невідоме.

Нехай (x_0, y_0) – точка на прямій $3x-4y+C=0$. Вона має бути розташована на відстані 3 від прямої $3x-4y+16$, отже:

$$\begin{cases} \dfrac{|3x_0-4y_0+16|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3, \\ 3x_0-4y_0+C=0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_0-4y_0+16=\pm 15, \\ 3x_0-4y_0+C=0, \end{cases}$$

звідки $C-16=15$ або $C-16=-15$, $C=31$ або $C=1$.

Рівняннями шуканих прямих є

$$3x-4y+31=0 \text{ та } 3x-4y+1=0.$$

Приклад 1.3.6. На площині задано координати точки $M(1;1)$ та рівняння прямої $L: 3x-4y-24=0$. Знайти координати проекції точки M на пряму L та координати точки M_1, симетричної M відносно L (рис. 1.3.4).

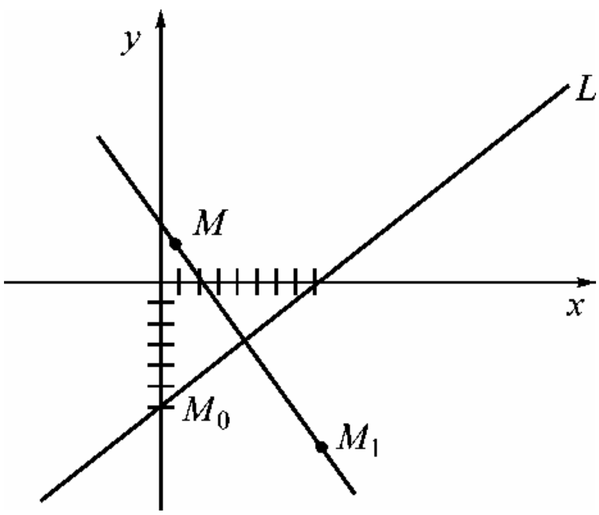


Рис. 1.3.4

Розв'язання. Складаємо рівняння перпендикуляра до L, що проходить через точку M:

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-4}$$

(напрямним вектором перпендикуляра є вектор нормалі $\vec{n}(3;-4)$ прямої L).

Знаходимо координати точки перетину двох прямих:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{-4}, \\ 3x-4y-24=0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} -4x-3y+7=0, \\ 3x-4y-24=0, \end{cases}$$

звідки маємо координати точки $M_0(4;3)$ – проекції M на L.

Координати M_1 знайдемо з умови

$$\begin{cases} x_{M_0}=\dfrac{x_M+x_{M_1}}{2}, \\ y_{M_0}=\dfrac{y_M+y_{M_1}}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} 4=\dfrac{1+x_{M_1}}{2}, \\ -3=\dfrac{1+y_{M_1}}{2}, \end{cases}$$

звідки $M_1(7;-7)$.

Приклад 1.3.7. Скласти рівняння прямих, що проходять через точку $M(2;0)$ та утворюють кут $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ із прямою $3x+y=6$.

Розв'язання. Нехай рівняння шуканої прямої $y = kx + b$, або $y = k(x-2)$ (вона повинна проходити через точку $(2;0)$).

Знайдемо кут між прямими $3x + y = 6$ та $kx - y - 2k = 0$. Оскільки вектори нормалей $\vec{n}_1(3;1)$, $\vec{n}_2(k;-1)$, то

$$|\cos\varphi| = \left|\frac{3k-1}{\sqrt{3^2+1^2}\sqrt{k^2+1}}\right| = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \frac{(3k-1)^2}{10(k^2+1)} = \frac{1}{5},$$

звідки $7k^2 - 6k - 1 = 0$.

Оскільки коренями цього рівняння є $k_1 = 1$ та $k_2 = -\frac{1}{7}$, маємо рівняння двох прямих: $y = x - 2$ та $y = -\frac{1}{7}(x-2)$.

Приклад 1.3.8. Знайти координати вершин B та C трикутника ABC, якщо відомі координати вершини $A(1;8)$ і рівняння висоти $x - 5y + 11 = 0$ і бісектриси $x + y = 1$, проведених з однієї вершини (рис. 1.3.5).

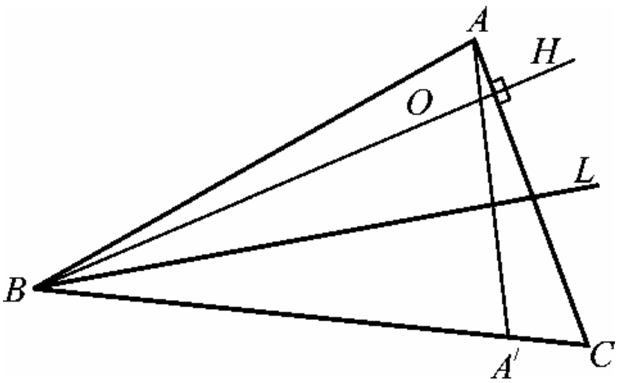


Рис. 1.3.5

Розв'язання.

1. Знайдемо координати B як точки перетину бісектриси L та висоти H:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x - 5y + 11 = 0, \end{cases}$$

звідки маємо $B(-1;2)$.

2. Складаємо рівняння сторони AC як прямої, що проходить через точку A перпендикулярно до висоти H: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-8}{-5}$, або $y + 5x - 13 = 0$ (нагадаємо, що напрямним вектором є $\vec{a}(1;-5)$ – вектор нормалі висоти).

3. Знайдемо координати точки A', яка симетрична точці A відносно прямої L (оскільки L – бісектриса, точка A' належить саме BC):

а) пряма лінія із A перпендикулярна до L, отже, $\frac{x-1}{1} = \frac{y-8}{1}$;

б) координати точки O перетину перпендикуляра та L:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y-8}{1}, \\ x + y = 1, \end{cases}$$

звідки $O(-3;4)$.

в) координати точки O як середини відрізка AA':

$$x_0 = \frac{x_A + x_{A'}}{2}, \quad y_0 = \frac{y_A + y_{A'}}{2};$$

г) координати A' (координати точок O та A відомі):

$$-3=\frac{1+x_{A'}}{2},\ 4=\frac{8+y_{A'}}{2},$$

звідки $A'(-7;0)$.

4. Знайдемо рівняння прямої BA':

$$\frac{x+1}{-7+1}=\frac{y-2}{0-2};\ x-3y+7=0.$$

5. Координати точки С знайдемо із рівнянь прямих AC: $y+5x-13=0$ та BA': $x-3y+7=0$, звідки $x=2$, $y=3$.

1.3.3. Площина у просторі

Нехай у просторі вибрано декартову прямокутну систему координат $Oxyz$. Площину у просторі будемо позначати P. Перелічимо найуживаніші рівняння площини, в яких $(x;y;z)$ – координати довільної точки M на площині P, $\vec{r}(x;y;z)$ – радіус-вектор точки M (табл. 1.3.2).

Таблиця 1.3.2

Назва рівняння	Вигляд	Параметри
Векторне	$(\vec{r}-\vec{r}_0)\vec{n}=0$, $\vec{n}\neq 0$	$\vec{r}_0$ – радіус-вектор точки $M_0\in P$, $\vec{n}$ – вектор нормалі $\vec{n}\perp\vec{P}$
Загальне	$Ax+By+Cz+D=0$, $A^2+B^2+C^2\neq 0$	$(A;B;C)$ – координати вектора нормалі $\vec{n}$, *перпендикулярного* до площини P
Рівняння площини, що проходить через дану точку перпендикулярно до вектора	$A(x-x_0)+B(y-y_0)+$ $+C(z-z_0)=0,$ $A^2+B^2+C^2\neq 0$	$(A;B;C)$ – координати вектора нормалі $\vec{n}\perp\vec{P}$, $(x_0;y_0;z_0)$ – координати точки $M_0\in P$
Нормальне	$\frac{Ax+By+Cz}{A^2+B^2+C^2}-d=0$	$d=\frac{\lvert D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\geq 0$ – відстань від площини до початку координат $O(0;0;0)$
Рівняння у відрізках	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$	$(a;0;0)$, $(0;b;0)$, $(0;0;c)$ – координати точок перетину площини P з осями координат
Рівняння площини, що проходить через три точки	$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0$	$(x_0;y_0;z_0)$, $(x_1;y_1;z_1)$, $(x_2;y_2;z_2)$ – координати трьох даних точок на площині P

Корисно запам’ятати рівняння координатних площин: площина xOy має рівняння $z=0$; $yOz-x=0$; $xOz-y=0$.

Відстань від будь-якої точки простору $M_1(x_1;y_1;z_1)$ до площини $Ax+By+Cz+D=0$ дорівнює

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Взаємне розміщення двох площин $Ax+By+Cz+D=0$ та $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ у просторі визначається так:

1) якщо вектори $\vec{n}(A;B;C)$ та $\vec{n}_1(A_1;B_1;C_1)$ не паралельні, а їх координати не пропорційні, то площини P та P_1 перетинаються;

2) якщо $\vec{n}\parallel\vec{n}_1$, тобто $(A;B;C)=k(A_1;B_1;C_1)$, але $D\neq kD_1$, то площини P та P_1 паралельні;

3) якщо $(A;B;C;D)=k(A_1;B_1;C_1;D_1)$, то два рівняння визначають одну площину.

Кут φ між площинами P та P_1 знаходимо за формулою

$$\cos\varphi=\cos(\vec{n}\wedge\vec{n}_1)=\frac{AA_1+BB_1+CC_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}.$$

Підкреслимо ще раз: при розв'язанні задач найголовніше – пам'ятати, що *коефіцієнтами при x,y,z у рівнянні площини є координати вектора нормалі до неї.* Їх можна знаходити як координати *векторного добутку* двох векторів $\vec{a}_1$ та $\vec{a}_2$, паралельних шуканій площині, але не паралельних між собою.

Приклад 1.3.9. З'ясувати, чи проходить площина $P:\ 2x+3y-7z+2=0$ через точку $M(1;1;1)$.

Розв'язання. Підставивши координати точки M у рівняння площини P, маємо: $2\cdot1+3\cdot1-7\cdot1+2=0$, тобто тотожність $0=0$. Отже, $M\in P$.

Приклад 1.3.10. Скласти рівняння площини P, що проходить через початок координат перпендикулярно до вектора $\vec{n}(1;1;1)$.

Розв'язання.

$$(x-0)\cdot1+(y-0)\cdot1+(z-0)\cdot1=0;\ x+y+z=0.$$

Приклад 1.3.11. Знайти кут між площинами $x+6y+4z-1=0$ та $2x+3y-5z=0$.

Розв'язання. Векторами нормалей є $\vec{n}_1(1;6;4)$ та $\vec{n}_2(2;3;-5)$. Знаходимо кут

$$\cos(\vec{n}_1\wedge\vec{n}_2)=\frac{1\cdot2+6\cdot3+4\cdot(-5)}{\sqrt{53}\cdot\sqrt{38}}=0.$$

Отже, площини P_1 та P_2 перпендикулярні.

Приклад 1.3.12. З'ясувати, яким буде взаємне розміщення площин $P_1:\ x-y+2z+\alpha=0$ та $P_2:\ \alpha^2x-4y+8z+8=0$ у просторі.

Розв'язання. Знайдемо, при яких значеннях α вектори нормалей $\vec{n}_1(1;-1;2)$ та $\vec{n}_2(\alpha^2;-4;8)$ паралельні.

Із співвідношення

$$\frac{\alpha^2}{1} = \frac{-4}{-1} = \frac{8}{2}$$

видно, що при $\alpha = \pm 2$ площини або паралельні, або збігаються.

При $\alpha = 2$ рівняння набувають вигляду $x - y + 2z + 2 = 0$, $4x - 4y + 8z + 8 = 0$, тобто визначають одну площину, отже, площини збігаються.

При $\alpha = -2$ маємо $x - y + 2z - 2 = 0$, $4x - 4y + 8z + 8 = 0$ $(x - y + 2z + 2 = 0)$, тобто площини паралельні.

При $\alpha \neq \pm 2$ площини перетинаються.

Приклад 1.3.13. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_0(-1; 2; 4)$, $M_1(5; 0; 0)$ та $M_2(1; -1; 5)$.

Розв'язання. Задачу можна розв'язати за допомогою рівняння у формі визначника

$$\begin{vmatrix} x - (-1) & y - 2 & z - 4 \\ 5 - (-1) & 0 - 2 & 0 - 4 \\ 1 - (-1) & -1 - 2 & 5 - 4 \end{vmatrix} = 0,$$

але ми розглянемо інший шлях.

Знайдемо координати $\overrightarrow{M_0M_1}$ та $\overrightarrow{M_0M_2}$:

$$\overrightarrow{M_0M_1}(6; -2; -4),\ \overrightarrow{M_0M_2}(2; -3;\ 1),$$

а також координати вектора нормалі

$$\vec{n} = \overrightarrow{M_0M_1} \times \overrightarrow{M_0M_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -14\vec{i} - 14\vec{j} - 14\vec{k}.$$

Після скорочення на число – 14 одержуємо вектор $\vec{n}_1 = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, який теж буде перпендикулярним до шуканої площини. Координати точки $M_0(-1; 2; 4) \in P$ відомі, тому рівняння набуває вигляду

$$1 \cdot (x + 1) + 1 \cdot (y - 2) + 1 \cdot (z - 4) = 0, \text{ або } x + y + z - 5 = 0.$$

Приклад 1.3.14. Довести, що площини P_1: $2x + 6y + 9z = 0$ та P_2: $-4x - 12y - 18z + 1 = 0$ паралельні, і знайти відстань між ними.

Розв'язання. Запишемо вектори нормалей до площин P_1, P_2:

$$\vec{n}_1(2; 6; 9) \perp P_1, \quad \vec{n}_2(-4; -12; -18) \perp P_2.$$

Таким чином, $\frac{2}{-4} = \frac{6}{-12} = \frac{9}{-18}$, тобто площини паралельні.

Відстань між ними дорівнює відстані від будь-якої точки, що належить площині P_1, до площини P_2. Можна взяти точку $M_0(0; 0; 0)$, тому що її координати задовольняють рівнянню площини P_1. Тоді

$$d = \frac{-4 \cdot 0 - 12 \cdot 0 - 18 \cdot 0 + 1}{\sqrt{4^2 + 12^2 + 18^2}} = \frac{1}{22}.$$

Приклад 1.3.15. Знайти кут між площиною P_1: $9x+6y+2z-1=0$ і площиною P_2, що проходить через вісь Oz та точку $M(1;2;3)$.

Розв'язання. Знайдемо координати вектора $\vec{n}_2$, перпендикулярного до площини P_2. Маємо два вектори, які повинні належати P_2: $\vec{k}(0;0;1)$ та $\overrightarrow{OM}(1;2;3)$. Вектор $\vec{n}_2$ можна знайти як їх векторний добуток:

$$\vec{n}_2=\vec{k}\times\overrightarrow{OM}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=-2\vec{j}+\vec{j}\,.$$

Залишається знайти кут між векторами нормалей $\vec{n}_1(9;6;2)$, $\vec{n}_2(-2;1;0)$:

$$\cos\varphi=\frac{-18+6}{\sqrt{9^2+6^2+2^2}\sqrt{2^2+1}}=-\frac{12}{11\sqrt{5}},\ \varphi=\pi-\arccos\frac{12}{11\sqrt{5}}\,.$$

Приклад 1.3.16. Знайти рівняння бісекторної площини, що поділяє навпіл гострий двогранний кут між площинами P_1: $x-y-3=0$ та P_2: $3x+4y+5z-9=0$.

Розв'язання. Перед розв'язанням задачі корисно зробити рисунок власноруч (рис. 1.3.6).

Знайдемо вектори $\vec{n}_1\perp P_1$ та $\vec{n}_2\perp P_2$:

$$\vec{n}_1(1;-1;0),\ \vec{n}_2(3;4;5)\,.$$

Кут між ними більший, ніж 90^o, оскільки $\vec{n}_1\vec{n}_2=3-4<0$.

Вектор $-\vec{n}_1(-1;1;0)$ перпендикулярний до P_1, а з вектором $\vec{n}_2$ утворює вже гострий кут.

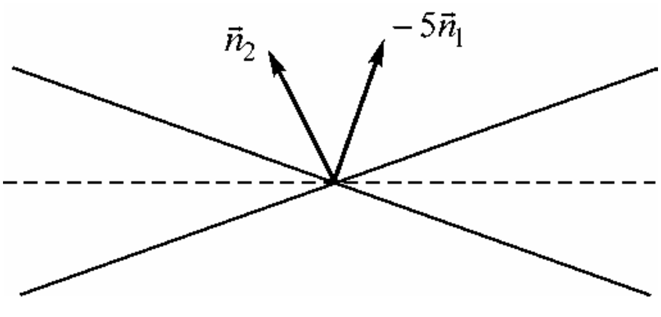


Рис. 1.3.6

Знайдемо довжину векторів:

$$\left|-\vec{n}_1\right|=\sqrt{2},\ \left|\vec{n}_2\right|=\sqrt{50}=5\sqrt{2}\,.$$

Аналогічно відповідній задачі векторної алгебри змінимо вектори так, щоб напрями їх залишилися незмінними і довжини їх були однакові. Таку умову задовольняють, наприклад, вектори $\vec{b}_1=-5\vec{n}_1$ та $\vec{b}_2=\vec{n}_2$, $\vec{b}_1(-5;5;0)$, $\vec{b}_2(3;4;5)$.

Сума $\vec{b}_1+\vec{b}_2=-5\vec{n}_1+\vec{n}_2=-2\vec{i}+9\vec{j}+5\vec{k}$ є бісектрисою кута між $\vec{b}_1$ і $\vec{b}_2$, якщо вектори мають спільний початок. Зрозуміло, що саме сума $\vec{b}_1+\vec{b}_2$ буде вектором нормалі до шуканої площини, яка поділяє навпіл гострий кут між P_1 і P_2. Залишається знайти будь-яку спільну точку площин P_1 та P_2:

$$\begin{cases}x-y-3=0,\\ 3x+4y+5z-9=0.\end{cases}$$

Система має безліч розв'язків, наприклад, якщо $y=0$, то $x=3$, $z=0$.

Отже, рівняння шуканої бісекторної площини має вигляд

$$-2(x-3)+9(y-0)+5(z-0)=0, \text{ або } -2x+9y+5z+6=0.$$

Зауваження. Якщо потрібно скласти рівняння бісекторної площини тупого двогранного кута, то можна взяти суму двох векторів нормалей однієї довжини, таких, що утворюють між собою тупий кут. Сума буде вектором нормалі шуканої площини.

1.3.4. Пряма лінія у просторі

Пряму лінію L у просторі можна задавати різними рівняннями. Перелічимо найуживаніші рівняння, в яких $(x; y; z)$ – координати довільної точки M, що належить L, а $\vec{r}(x; y; z)$ – її радіус-вектор (табл. 1.3.3).

Таблиця 1.3.3

Назва рівняння	Вигляд	Параметри
Векторне	$\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{a}t$, $\vec{a}\neq 0$	$\vec{r}_0$ – радіус-вектор заданої точки на прямій; $\vec{a}$ – вектор, паралельний L, $t\in(-\infty;\infty)$
Параметричне	$\begin{cases} x=x_0+lt, \\ y=y_0+mt, \\ z=z_0+nt, \end{cases}$ $l^2+m^2+n^2\neq 0$	$(x_0; y_0; z_0)$ – координати точки M_0 на L; $(l;m;n)$ – координати напрямного вектора $\vec{a}$, паралельного L, $t\in(-\infty;\infty)$
Канонічне	$\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$, $l^2+m^2+n^2\neq 0$	$M_0(x_0; y_0; z_0)\in L$, $(l;m;n)$ – координати напрямного вектора $\vec{a}\parallel L$
Рівняння прямої, що проходить через дві точки	$\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}=\dfrac{z-z_0}{z_1-z_0}$	$(x_0; y_0; z_0)$, $(x_1; y_1; z_1)$ – координати двох різних точок на L
Рівняння лінії перетину двох площин	$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0, \\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \end{cases}$	$(A,B,C)\neq k(A_1,B_1,C_1)$

Зауваження. Іноді у канонічному рівнянні або у рівнянні прямої, що проходить через дві точки, один або два знаменники дорівнюють 0. Наприклад, координатна вісь Ox проходить через точку $(0; 0; 0)$ паралельно напрямному вектору $\vec{i}\,(1; 0; 0)$, і тоді її рівняння набуває вигляду

$$\frac{x-0}{1}=\frac{y-0}{0}=\frac{z-0}{0},$$

що слід розуміти як

$$\begin{cases} y=0, \\ z=0. \end{cases}$$

Підкреслимо, що задачі на пряму лінію у просторі часто мають не єдиний шлях розв'язання. У наведених далі прикладах іноді розглянуто декілька способів, щоб кожний читач мав можливість їх порівняти і вибрати найзручніший.

Приклад 1.3.17. Скласти рівняння прямих, що проходять через точку $M_0(1, 2, 3)$:

1) паралельно осі Oy;

2) перпендикулярно до площини $x+y+z-3=0$;

3) через M_0 та $M_1(2; -1; 0)$.

Розв’язання.

1. Оскільки напрямний вектор осі Oy – це $\vec{j}(0;1;0)$, то, користуючись канонічним рівнянням, маємо

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{0},$$

що можна розуміти просто як систему

$$\begin{cases} x-1=0, \\ z-3=0. \end{cases}$$

2. Площина $x+y+z-3=0$ має вектор нормалі $\vec{n}(1;1;1)$, який і буде напрямним вектором шуканої прямої; отже, маємо рівняння

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{1}.$$

3. Складаємо рівняння прямої, що проходить через M_0 та M_1:

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-2}{-1-2}=\frac{z-3}{0-3}, \text{ або } \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-3}{-3}.$$

Зауваження. Рівняння можна складати у вигляді $\frac{x-2}{1-2}=\frac{y+1}{2+1}=\frac{z-0}{3-0}$, або $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{3}$. Якщо уважно його розглянути, то очевидно, що воно задає ту ж саму пряму, оскільки координати точки $M_0(1; 2; 3)$ йому задовольняють: $\frac{1-2}{-1}=\frac{2+1}{3}=\frac{3}{3}$.

Приклад 1.3.18. Записати рівняння прямої L: $\begin{cases} x+y+z-3=0, \\ 2x-y+3z-4=0 \end{cases}$ у канонічному та параметричному вигляді.

Розв’язання. Подібно до багатьох задач аналітичної геометрії у просторі ця задача має не єдиний шлях розв’язання.

1-й спосіб. Для того щоб скласти канонічне рівняння прямої L, необхідно знайти координати її напрямного вектора $\vec{a}$. Оскільки пряма L розташована у площині $x+y+z-3=0$, її напрямний вектор має бути перпендикулярним до $\vec{n}_1(1;1;1)$. Аналогічно $\vec{a}\perp\vec{n}_2(2;-1;3)$. Отже, вектор $\vec{a}$ перпендикулярний одночасно до $\vec{n}_1$ та $\vec{n}_2$, і його можна знайти у вигляді $\vec{a}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$:

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}\,.$$

Потрібно також знайти координати будь-якої спільної точки площин. Можна взяти одну координату довільно, наприклад $z = 1$. Тоді

$$\begin{cases} x + y + 1 - 3 = 0, \\ 2x - y + 3 - 4 = 0, \end{cases}$$

звідки $x = 1$, $y = 1$.

Складаємо канонічне рівняння:

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-3}\,.$$

Щоб одержати параметричне рівняння, залишилось записати

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-3} = t\,, \text{ або } \begin{cases} x = 4t + 1, \\ y = -t + 1, \\ z = -3t + 1. \end{cases}$$

2-й спосіб. Із системи $\begin{cases} x + y + z - 3 = 0, \\ 2x - y + 3z - 4 = 0 \end{cases}$ можна знайти координати двох точок прямої. Наприклад, покладемо $z = 0$, тоді $\begin{cases} x + y = 3, \\ 2x - y = 4, \end{cases}$ звідки маємо точку $M_1\left(\frac{7}{3};\ \frac{2}{3};\ 0\right)$. Аналогічно у випадку $z = 1$: $\begin{cases} x + y = 2, \\ 2x - y = 1; \end{cases}$ $M_0(1;1;1)$. Рівняння прямої, що проходить через M_0 та M_1:

$$\frac{x-1}{\frac{7}{3}-1} = \frac{y-1}{\frac{2}{3}-1} = \frac{z-1}{0-1}, \text{ і остаточно: } \frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-3}\,.$$

3-й спосіб. Покладаючи $z = t$, маємо

$$\begin{cases} x + y = 3 - t, \\ 2x - y = 4 - 3t. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему відносно x та y:

$$x = \frac{7}{3} - \frac{4}{3}t, \quad y = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}t, \quad z = t.$$

Це параметричне рівняння прямої.

Цікаво зауважити, що це рівняння не збігається з тими, що були одержані способами 1 і 2. Це пов'язано з тим, що у рівнянні прямої точку M_0 можна брати довільно. У перших двох випадках ми брали точку $M_0(1;\ 1;\ 1)$. Легко переконатися в тому, що точка $M_0(1;1;1)$ належить прямій $x = \frac{7}{3} - \frac{4}{3}t$, $y = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}t$, $z = t$, їй відповідає значення $t = 1$. Напрямний вектор такої прямої має координати $\left(-\frac{4}{3}; \frac{1}{3}; 1\right)$, тобто він паралельний вектору $(4; -1; -3)$. Отже, незважаючи на різний вигляд, рівняння, одержані способами 1, 2, 3, задають одну пряму.

Приклад 1.3.19. Знайти координати точки перетину прямої $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-2}{-1}$ (L) та площини P: $2x + 6y - 3z - 5 = 0$. Визначити кут між L та P (рис. 1.3.7).

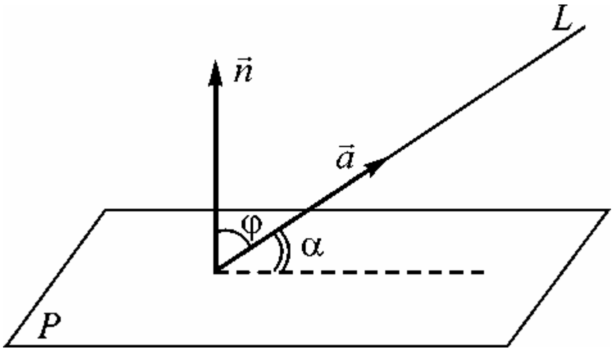


Рис. 1.3.7

Розв'язання. Для знаходження координат точки перетину зручно використати параметричне рівняння

$$\frac{x+1}{-2} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-2}{-1} = t \text{, або}$$

$$\begin{cases} x = -2t - 1, \\ y = 2t + 4, \\ z = -t + 2. \end{cases}$$

Підставимо ці вирази у рівняння площини P:

$$2(-2t-1) + 6(2t+4) - 3(-t+2) - 5 = 0, \; 11t + 11 = 0,$$

звідки $t = -1$ – значення параметра, що відповідає точці перетину.

Знаходимо координати точки перетину: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

Для знаходження кута α між прямою та площиною спочатку знайдемо кут φ між напрямним вектором $\vec{a}$ прямої L та вектором нормалі $\vec{n}$ площини P:

$$\cos\varphi = \frac{-2\cdot 2 + 2\cdot 6 - 3\cdot(-1)}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}\sqrt{2^2+6^2+3^2}} = \frac{11}{21}, \; \varphi = \arccos\frac{11}{21}.$$

Тоді шуканий кут дорівнюватиме $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{11}{21} = \arcsin\frac{11}{21}$.

Приклад 1.3.20. Довести, що прямі L_1: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$ та L_2: $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+4}{-3}$ паралельні, і скласти рівняння площини, якій належать L_1 та L_2.

Розв'язання. Напрямні вектори $\vec{a}_1(-1; 2; 3)$ та $\vec{a}_2(1; -2; -3)$ прямих L_1 та L_2 паралельні, отже, прямі L_1 та L_2 або паралельні, або збігаються. Щоб відрізнити один випадок від іншого, візьмемо координати точки $M_1(1; -1; 0)$, що належить прямій L_1, та підставимо їх у рівняння прямої L_2:

$$\frac{1}{1} = \frac{-1}{-2} = \frac{0+4}{-3}.$$

Легко переконатися в тому, що координати точки M_1 не задовольняють рівнянню L_2, таким чином, $M_1 \in L_1$, але $M_1 \notin L_2$, отже, прямі паралельні.

Для складання рівняння площини P необхідно знайти її вектор нормалі $\vec{n}$. Знаходимо координати $\overrightarrow{M_1M_2}$, де $M_1 \in L_1$, $M_2 \in L_2$:

$$M_1(1;\ -1;\ 0),\ M_2(0;\ 0;\ -4),\ \text{отже,}\ \overrightarrow{M_1M_2}\ (-1;\ 1;\ -4).$$

Шуканий вектор $\vec{n}$ має бути перпендикулярним до $\overrightarrow{M_1M_2}$ і водночас до $\vec{a}_1(-1;2;3)$ – напрямного вектора L_1. Тому

$$\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{a}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 11\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k}.$$

Точка $M_1(1;-1;0) \in P$, отже, рівняння площини P має вигляд $11(x-1)+7(y+1)-z=0$, або остаточно $11x+7y-z-4=0$.

Приклад 1.3.21. Дослідити, яким буде взаємне розміщення прямої $L:\ \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{b} = \dfrac{z-b}{1}$ та площини $P: 3x-by+z-4=0$ у просторі залежно від числа b.

Розв'язання. Перш за все знайдемо координати напрямного вектора $\vec{a}$ прямої L: $\vec{a}(1;b;1)$ та вектора $\vec{n} \perp P$: $\vec{n}(3;-b;1)$. Якщо пряма L паралельна площині P (або L належить P), то $\vec{a}$ має бути перпендикулярним до $\vec{n}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{n} = 3 - b^2 + 1 = 4 - b^2.$$

Отже, у випадку $b^2 = 4$ пряма L або паралельна площині P, або їй належить. Окремо дослідимо випадки $b=2$, $b=-2$. Якщо $b=2$, то рівняння мають вигляд

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{1} \text{ та } 3x-2y+z-4=0.$$

Легко переконатися в тому, що точка $M(2;2;2)$, яка належить прямій L, належить також площині P: $3\cdot 2 - 2\cdot 2 + 2 - 4 = 0$. Оскільки $\vec{a} \perp \vec{n}$, а площина і пряма мають спільну точку, пряма L розташована у площині P.

Якщо $b=-2$, то маємо $\begin{cases} \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+2}{1}, \\ 3x+2y+z-4=0. \end{cases}$

Точка $M(2;2;-2) \in L$, але $3\cdot 2 + 2\cdot 2 - 2 - 4 \neq 0$, тобто $M \notin P$. У такому випадку пряма L паралельна площині P.

Якщо $b^2 \neq 4$, то напрямний вектор $\vec{a}$ не буде перпендикулярним до $\vec{n}$, а тому пряма L не може бути навіть паралельною площині P.

Таким чином, можна зробити висновки:

– якщо $b=2$, то пряма розташована в площині P;

– якщо $b=-2$, то пряма паралельна площині P;

– якщо $b \neq \pm 2$, то пряма і площина перетинаються.

Корисно поміркувати, чи не має задача іншого способу розв'язання.

Приклад 1.3.22. Визначити координати проекції точки $M(1;2;3)$ на площину $x+y+z-15=0$.

Розв'язання. Запишемо рівняння прямої, яка проходить через точку M перпендикулярно до площини (її напрямним вектором буде вектор нормалі площини):

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{1}, \text{ або } \begin{cases} x=t+1, \\ y=t+1, \\ z=t+3. \end{cases}$$

Знайдемо координати точки перетину перпендикуляра та площини:

$$\begin{cases} x=t+1, \\ y=t+2, \\ z=t+3, \\ x+y+z-15=0, \end{cases}$$

$3t-9=0$, $t=3$, звідки $x=4$, $y=5$, $z=6$.

Приклад 1.3.23. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(1;2;3)$ перпендикулярно до прямої L: $\frac{x+4}{0}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{2}$.

Розв'язання.

1-й спосіб. Знайдемо координати будь-якої точки на прямій L, наприклад $M_1(-4;1;0)$. Вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ має координати $(-5;-1;-3)$. Векторний добуток вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$ та напрямного вектора $\vec{a}(0;3;2)$ буде вектором нормалі до площини P, якій належать M_0 та L:

$$\vec{n}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}=7\vec{i}+10\vec{j}-15\vec{k}.$$

Тепер знову знайдемо векторний добуток векторів:

$$\vec{n}_1=\vec{n}\times\vec{a}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 7 & 10 & -15 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}=65\vec{i}-14\vec{j}-21\vec{k}.$$

Вектор $\vec{n}_1$ перпендикулярний до $\vec{n}$, а це означає, що він розташований у площині P. При цьому він перпендикулярний і до вектора $\vec{a}$, і до прямої L. Отже, вектор $\vec{n}_1$ і буде напрямним вектором шуканого перпендикуляра із точки M_0 на пряму L:

$$\frac{x-1}{65}=\frac{y-2}{-14}=\frac{z-3}{21}.$$

2-й спосіб. Розглянемо параметричне рівняння прямої L:

$$\frac{x+4}{0}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{2}=t, \text{ або } \begin{cases} x=-4, \\ y=3t+1, \\ z=2t. \end{cases}$$

Нехай $M_1 \in L$ – будь-яка точка на прямій L, якій відповідає значення параметра t_1, тобто M_1 має координати $(-4; 3t_1+1; 2t_1)$. Складаємо рівняння прямої L_1, що проходить через точки M_0 та M_1:

$$\frac{x-1}{-4-1}=\frac{y-2}{3t_1+1-2}=\frac{z-3}{2t_1-3}, \text{ або } \frac{x-1}{-5}=\frac{y-2}{3t_1-1}=\frac{z-3}{2t_1-3}.$$

Умовою перпендикулярності двох прямих є $\vec{a}(0;3;2) \perp \overrightarrow{M_0M_1}(-5; 3t_1-1; 2t_1-3)$, або $3(3t_1-1)+2(2t_1-3)=0$. Отже, при $t=\dfrac{9}{13}$ прямі L та M_0M_1 перпендикулярні. Підставимо значення t_1 у рівняння прямої L_1:

$$\frac{x-1}{-5}=\frac{y-2}{3\cdot\dfrac{9}{13}-1}=\frac{z-3}{2\cdot\dfrac{9}{13}-3}, \quad \frac{x-1}{65}=\frac{y-2}{-14}=\frac{z-3}{21}.$$

Приклад 1.3.24. Скласти рівняння відрізка M_0M_1, якщо задано точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$, $M_1(x_1;y_1;z_1)$.

Розв'язання. Запишемо рівняння прямої, що проходить через точки M_0 та M_1:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}=t, \quad t \in R.$$

Легко переконатися в тому, що точці M_0 відповідає значення $t=0$. При $t=0$ маємо $\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}=1$, $x-x_0=x_1-x_0 \Rightarrow x=x_1$, $y=y_1$, $z=z_1$, тобто точку M_1. Таким чином, рівняння відрізка має вигляд

$$\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}=\dfrac{z-z_0}{z_1-z_0}=t,\\ t\in[0;1].\end{cases}$$

Приклад 1.3.25. З'ясувати, чи перетинає відрізок M_1M_2 площину P: $8x+y+z=0$, якщо задано точки $M_1(-1;\ 2;\ 0)$, $M_2(3;\ 4;\ 5)$.

Розв'язання. Запишемо рівняння відрізка: $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{5}=t$, $t\in[0;1]$. Точку перетину прямої, яка проходить через точки M_1 та M_2, та площини P знайдемо, розв'язавши систему:

$$\begin{cases}\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{5}=t,\\ 8x+y+z=0,\end{cases} \quad 8(4t-1)+(2t+2)+5t=0,\ 39t=6,\ t=\frac{6}{39}.$$

Значення параметра $t=\dfrac{6}{39}\in[0;1]$ відповідає деякій точці відрізка M_1M_2; точка перетину прямої та площини P розташована між точками M_1 та M_2. Отже, відрізок перетинає площину.

Приклад 1.3.26. Знайти відстань від точки $M(0;0;1)$ до прямої L:

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-1}.$$

Розв'язання.

1-й спосіб (дозволяє також знайти координати проекції точки M на пряму L). Складаємо рівняння площини P, що проходить через точку M перпендикулярно до прямої L: $0(x-0)+2(y-0)-1(z-1)=0$. Воно має вигляд $2y-z+1=0$.

Проекція M на L – це точка перетину P та L:

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{-1}=t,\\ 2y-z+1=0,\end{cases}$$

$t=\dfrac{1}{5}\Rightarrow x=1,\ y=-\dfrac{3}{5},\ z=-\dfrac{1}{5}$ (точка M_1 – проекція M на L).

Шукана відстань d дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{MM_1}$:

$$d=\sqrt{(1-0)^2+\left(-\frac{3}{5}-0^2\right)+\left(-\frac{1}{5}-1\right)^2}=\sqrt{1+\frac{9}{25}+\frac{36}{25}}=\sqrt{\frac{14}{5}}.$$

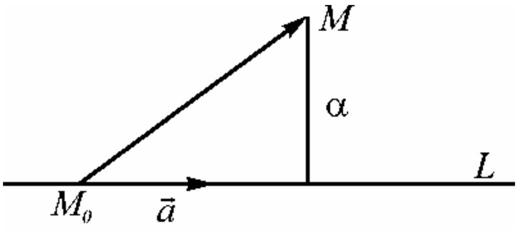


Рис. 1.3.8

2-й спосіб. Знайдемо будь-яку точку на прямій L, наприклад $M_0(1;-1;0)$, і визначимо проекцію вектора $\overrightarrow{M_0M}(-1;1;1)$ на напрямний вектор $\vec{a}(0;2;-1)$ прямої L (рис 1.3.8):

$$Пр_{\vec{a}}\overrightarrow{M_0M}=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Шукана відстань за теоремою Піфагора

$$d=\sqrt{\left|\overrightarrow{M_0M}\right|^2-(Пр_{\vec{a}}\overrightarrow{M_0M})^2}=\sqrt{1+1+1-\frac{1}{5}}=\sqrt{\frac{14}{5}}.$$

Приклад 1.3.27. Довести, що прямі L_1: $\dfrac{x-6}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-10}{-1}$ і L_2: $\dfrac{x+4}{-7}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-4}{3}$ мимобіжні. Знайти відстань між ними.

Розв'язання. Знайдемо точки $M_1\in L_1$ та $M_2\in L_2$: $M_1(6;1;10)$, $M_2(-4;3;4)$. Вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ має координати $(-10;2;-6)$. Вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}_1(1;2;-1)$, $\vec{a}_2(-7;2;3)$ не компланарні, оскільки

$$\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{a}\cdot\vec{a}=\begin{vmatrix}-10 & 2 & -6\\ 1 & 2 & -1\\ -7 & 2 & 3\end{vmatrix}=-168\neq 0,$$

тому прямі L_1 та L_2 не розташовані в одній площині, тобто мимобіжні.

Пошук відстані можна здійснити по-різному.

1-й варіант. Складаємо рівняння площини P_2, що містить пряму L_2 і паралельна прямій L_1. Її вектор нормалі одночасно має бути перпендикулярним до $\vec{a}_1$ та $\vec{a}_2$:

$$\vec{n} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -7 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 8\vec{i} + 4\vec{j} + 16\vec{k}\,.$$

Щоб скласти рівняння площини, вектор нормалі можна скоротити в чотири рази: $\vec{n}_1 = 2\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$. Площина P_2 проходить через L_2, а тому містить точку $M_2(-4; 3; 4)$, отже, її рівняння має вигляд $(x+4)+1(y-3)+$ $+4(z-4)=0$, і остаточно:

$$2x + y + 4z - 11 = 0\,.$$

Залишається знайти відстань від будь-якої точки $M_1 \in L_1$, наприклад від $M_1(6; 1; 10)$: $d = \left| \dfrac{2\cdot 6 + 1\cdot 1 + 4\cdot 10 - 11}{\sqrt{2^2+1^2+4^2}} \right| = 2\sqrt{21}\,.$

2-й варіант. Знайдемо вектор, одночасно перпендикулярний до прямих L_1 та L_2:

$$\vec{n} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -7 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 8\vec{i} + 4\vec{j} + 16\vec{k}\,,$$

а потім – абсолютне значення проекції $\overrightarrow{M_1M_2}$ на $\vec{n}$:

$$d = \left| \frac{-10\cdot 8 + 2\cdot 4 - 6\cdot 16}{\sqrt{8^2+4^2+16^2}} \right| = 2\sqrt{21}\,.$$

Можна навіть скласти загальну формулу для відшукання d – відстані між $\dfrac{x-x_1}{l_1} = \dfrac{y-y_1}{m_1} = \dfrac{z-z_1}{n_1}$ та $\dfrac{x-x_2}{l_2} = \dfrac{y-y_2}{m_2} = \dfrac{z-z_2}{n_2}$:

$$d = \left| \frac{\overrightarrow{M_1M_2} \cdot (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|} \right|,$$

де $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $\vec{a}_1$ та $\vec{a}_2$ – напрямні.

Зауважимо, що чисельник можна записати у вигляді мішаного добутку.

3-й варіант. Запишемо рівняння прямих L_1 та L_2 у параметричному вигляді:

$$\begin{cases} x = t + 6, \\ y = 2t + 1, \\ z = -t + 10 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} x = -7\tau - 4, \\ y = 2\tau + 3, \\ z = 3\tau + 4. \end{cases}$$

Нехай $M_1 \in L_1$, $M_2 \in L_2$, тобто $M_1(t+6; 2t+1; -t+10)$, $M_2(-7\tau-4; 2\tau+3; 3\tau+4)$. Знайдемо t і τ із умов $\overrightarrow{M_1M_2} \perp \vec{a}_1(1; 2; -1)$, $\overrightarrow{M_1M_2} \perp \vec{a}_2(-7; 2; 3)$:

$$\begin{cases}(-7\tau-4-t-6)\cdot 1+(2\tau+3-2t-1)\cdot 2+(3\tau+4+t-10)\cdot(-1)=0,\\ (-7\tau-4-t-6)\cdot(-7)+(2\tau+3-2t-1)\cdot 2+(3\tau+4+t-10)\cdot 3=0,\end{cases}$$

звідки $\tau=-1$, $t=1$, $M_1(7;3;9)$, $M_2(3;1;1)$, а відстань

$$d=\sqrt{(7-3)^2+(3-1)^2+(9-1)^2}=2\sqrt{21}.$$

Приклад 1.3.28. Скласти рівняння спільного перпендикуляра мимобіжних прямих L_1: $\frac{x-6}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-14}{1}$ та L_2: $\frac{x-4}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-12}{-1}$, тобто прямої L, що перетинає L_1 та L_2 під прямим кутом. Знайти координати точок перетину прямої L з прямими L_1 та L_2, тобто найближчих точок мимобіжних прямих.

Розв'язання. Розглянемо параметричні рівняння прямих L_1 та L_2:

$$\frac{x-6}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-14}{1}=t;\ \frac{x-4}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-12}{-1}=\tau,$$

$$\text{або}\ \begin{cases}x=t+6,\\ y=-t+2,\\ z=t+14;\end{cases}\quad \begin{cases}x=\tau+4,\\ y=2\tau-3,\\ z=-\tau+12.\end{cases}$$

Нехай точки $M_1\in L_1$, $M_2\in L_2$ мають координати $M_1(t+6;-t+2;t+14)$, $M_2(\tau+4;2\tau-3;-\tau+12)$. Знайдемо t і τ так, щоб вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ був одночасно перпендикулярним до $\vec{a}_1$ та $\vec{a}_2$ (напрямних векторів прямих L_1 та L_2):

$$\overrightarrow{M_1M_2}(\tau-t-2;2\tau+t-5;-\tau-t-2),\ \vec{a}_1(1;-1;1),\ \vec{a}_2(1;2;-1).$$

За умовою перпендикулярності

$$\begin{cases}\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\vec{a}_1=(\tau-t-2)-(2\tau+t-5)+(-\tau-t-2)=0,\\ \overrightarrow{M_1M_2}\cdot\vec{a}_2=(\tau-t-2)+2(2\tau+t-5)-(-\tau-t-2)=0.\end{cases}$$

Розв'язавши систему двох рівнянь із двома невідомими, маємо $t=-1$, $\tau=2$. Таким значенням параметрів відповідають точки $M_1(5;3;13)$ та $M_2(6;1;10)$ (саме вони є найближчими точками мимобіжних прямих).

Рівнянням спільного перпендикуляра є

$$\frac{x-5}{6-5}=\frac{y-3}{1-3}=\frac{z-13}{10-13},\ \text{або}\ \frac{x-5}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-13}{-3}.$$

Зауваження. Подібно до багатьох інших ця задача має не єдиний спосіб розв'язання.

1.4. МАТРИЦІ ТА ДІЇ НАД НИМИ

1.4.1. Види матриць. Лінійні дії над матрицями

Матрицею $m\times n$ називається прямокутна таблиця чисел, розташованих в m рядках і n стовпцях:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ ... & ... & .... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа a_{ij} – елементи матриці. Перший індекс i – номер рядка, а другий індекс j – номер стовпця. Якщо $m=n$, то матриця A називається квадратною матрицею.

Відзначимо деякі типи матриць:

1) матриця-рядок – прямокутна матриця розміром $1\times n$:

$$\mathrm{A}\begin{pmatrix} a_1 \ a_2 \ ... \ a_n \end{pmatrix};$$

2) матриця-стовпець – прямокутна матриця розміром $m\times 1$:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix};$$

3) нульова матриця – матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю;

4) діагональна матриця розміром n – квадратна матриця, всі елементи якої, крім діагональних, дорівнюють нулю:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Якщо $\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_n=\alpha$, то діагональна матриця називається скалярною. Якщо $\alpha=1$, то матриця називається одиничною:

$$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \text{(позначається також } E\text{)}.$$

Транспонування матриці – це заміна рядків матриці її стовпцями без зміни послідовності їх. Транспонована матриця позначається штрихом або літерою *T*. Якщо

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ то } \mathrm{A}'=\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що $\left(\mathrm{A}'\right)'=\mathrm{A}$.

Матриця називається симетричною, якщо вона збігається зі своєю транспонованою матрицею $\mathrm{A}'=\mathrm{A}$. В такому разі елементи, симетричні відносно головної діагоналі, дорівнюють один одному: $a_{ij}=a_{ji}$. Якщо $\mathrm{A}'=-\mathrm{A}$, то матриця називається кососиметричною.

Детермінантом (визначником) квадратної матриці A розміром n (позначається $\det \mathrm{A}$ або $|\mathrm{A}|$, або $\Delta \mathrm{A}$) є визначник n-го порядку, складений з елементів матриці A:

$$\det \mathrm{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Квадратна матриця називається невиродженою, якщо $\det \mathrm{A} \neq 0$ (у протилежному випадку матриця називається виродженою).

Дві матриці $\mathrm{A} = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$ називаються рівними, якщо вони мають однакову розмірність та їх відповідні елементи дорівнюють один одному:

$$a_{ij} = b_{ij} \quad (\forall i, j).$$

Лінійні операції над матрицями:

1) сумою $\mathrm{A} + B$ двох матриць $\mathrm{A} = (a_{ij})$ та $B = (b_{ij})$, що мають однакові розміри, називається матриця $C = (c_{ij})$ з таким же розміром, кожний елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць A та B:

$$a_{ij} + b_{ij} \quad (\forall i, j).$$

2) добутком $\alpha \mathrm{A}$ матриці A на число α називається матриця $B = (b_{ij})$, кожний елемент якої дорівнює відповідному елементу матриці A, помноженому на число α:

$$b_{ij} = \alpha a_{ij} \quad (\forall i, j).$$

Властивості лінійних операцій над матрицями:

1) $\mathrm{A} + B = B + \mathrm{A}$;
2) $(\mathrm{A} + B) + C = \mathrm{A} + (B + C)$;
3) $\lambda(\mathrm{A} + B) = \lambda \mathrm{A} + \lambda B$, де λ – довільне число;
4) $(\mu + \lambda)\mathrm{A} = \mu \mathrm{A} + \lambda \mathrm{A}$, де μ, λ – довільні числа;
5) $(\mathrm{A} + B)' = \mathrm{A}' + B'$.

Приклад 1.4.1. Обчислити $3\mathrm{A} + B$, якщо

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \\ -1 & -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. $3\mathrm{A} + B = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 3 \\ 15 & 9 & -6 \\ 0 & 3 & 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \\ -1 & -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -12 & 7 \\ 20 & 11 & -5 \\ -1 & -3 & 21 \end{pmatrix}.$

Приклад 1.4.2. Знайти $f(\mathrm{A})$, якщо $f(x) = 2x - 3$, $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 5 \\ -1 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$

Розв'язання.

$$f(\mathrm{A}) = 2\mathrm{A} - 3I = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 0 & 4 & 10 \\ -2 & -6 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & 10 \\ -2 & -6 & 9 \end{pmatrix}.$$

1.4.2. Добуток матриць

Добуток $\mathrm{A}B$ двох матриць A та B визначений тоді і тільки тоді, коли матриця A має розмір $m\times n$, а матриця B – розмір $n \times k$, тобто коли кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B. Цим добутком є матриця C розміром $m \times k$, елемент c_{ij} якої дорівнює

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj} ,$$

тобто c_{ij} дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B.

Наведемо кілька властивостей операції множення матриць:

1) $\mathrm{A}E = E\mathrm{A} = \mathrm{A}$;
2) $(\mathrm{A}B)C = \mathrm{A}(BC)$ (асоціативність);
3) $\lambda(\mathrm{A}B) = (\lambda\mathrm{A})B = \mathrm{A}(\lambda B)$;
4) $\mathrm{A}B \neq B\mathrm{A}$, тобто множення матриць не комутативне, проте може трапитись, що $\mathrm{A}B = B\mathrm{A}$, і такі матриці називаються переставними;
5) за означенням $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}\mathrm{A}$; $\mathrm{A}^3 = \mathrm{A}^2\mathrm{A}$ і т.д., крім того, $\mathrm{A}^0 = E$.

Теорема (про визначник добутку двох квадратних матриць). Визначник добутку двох квадратних матриць дорівнює добутку визначників цих матриць:

$$\det(\mathrm{A}B) = \det \mathrm{A} \cdot \det B .$$

Приклад 1.4.3. Знайти добутки матриць $\mathrm{A}B$ та $B\mathrm{A}$, якщо

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ -3 & 5 & -1 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Нагадаємо, що елемент c_{ij} матриці $C = \mathrm{A}B$ дорівнює $c_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j}$, тобто, для того щоб заповнити перший рядок матриці C, треба перший рядок матриці A "помножити" на всі стовпці матриці B; для того щоб заповнити другий рядок матриці C, треба другий рядок матриці A "помножити" на всі стовпці матриці B і т.д. (правило "рядок на стовпець"):

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ -3 & 5 & -1 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} 3\cdot 2+(-5)(-3)+1\cdot 1 & 3\cdot 0+(-5)5+1(-4) & 3(-6)+(-5)(-1)+1\cdot 7 \\ 4\cdot 2+2(-3)+0\cdot 1 & 4\cdot 0+2\cdot 5+0(-4) & 4(-6)+2(-1)+0\cdot 7 \\ (-1)2+(-2)(-3)+6\cdot 1 & (-1)0+(-2)5+6(-4) & (-1)(-6)+(-2)(-1)+6\cdot 7 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 22 & -29 & -6 \\ 2 & 10 & -26 \\ 10 & -34 & 50 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо $B\text{A}$: $B\text{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ -3 & 5 & -1 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & 2 & -34 \\ 12 & 27 & -9 \\ -20 & -27 & 43 \end{pmatrix}.$

Приклад 1.4.4. Знайти $\text{A}B$, якщо $\text{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Чи можна знайти добуток $B\text{A}$?

Розв'язання. Знайдемо $\text{A}B$ (цей добуток існує, оскільки число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B):

$$\text{A}B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & -1 & -18 \\ 10 & -7 & 9 \end{pmatrix}.$$

Добуток $B\text{A}$ не існує, тому що число стовпців матриці B не дорівнює числу рядків матриці A.

Приклад 1.4.5. Знайти добуток $\text{A}B$, якщо:

1) $\text{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$;

2) $\text{A}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

1. $\text{A}B=(1\ 3\ -5\ 4)\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}=1\cdot 2+3\cdot 6+(-5)(-3)+4(-1)=31.$

$$2.\quad \mathrm{A}B=\begin{pmatrix}1\\3\\5\\2\end{pmatrix}(2\ \ 6\ \ -1\ \ -3)=\begin{pmatrix}2&6&-1&-3\\6&18&-3&-9\\10&30&-5&-15\\4&12&-2&-6\end{pmatrix}.$$

Приклад 1.4.6. Знайти $f(\mathrm{A})$, якщо $f(x)=x^2-2x+3$, $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&3&-4\\2&0&5\\-1&-2&6\end{pmatrix}$.

Розв'язання.

$$f(\mathrm{A})=\mathrm{A}^2-2\mathrm{A}+3\mathrm{I},$$

$$\mathrm{A}^2=\begin{pmatrix}1&3&-4\\2&0&5\\-1&-2&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&-4\\2&0&5\\-1&-2&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&11&-13\\-3&-4&-22\\-11&-15&30\end{pmatrix},$$

$$f(\mathrm{A})=\begin{pmatrix}11&11&-13\\-3&-4&22\\-11&-15&30\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&6&-8\\4&0&10\\-2&-4&12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&5&-5\\-7&-1&12\\-9&-11&11\end{pmatrix}.$$

Приклад 1.4.7. Обчислити A^n, якщо $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$, $n\in N$.

Розв'язання. Обчислимо A^2 та A^3:

$$\mathrm{A}^2=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix},\quad \mathrm{A}^3=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}.$$

Зробимо припущення, що $\mathrm{A}^n=\begin{pmatrix}1&0\\n&1\end{pmatrix}$, і доведемо його методом математичної індукції. Для $n=2$ припущення правильне. Припустивши, що воно справедливе для $n=k$, доведемо його справедливість для $n=k+1$:

$$\mathrm{A}^{k+1}=\mathrm{A}^k\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&0\\k&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\k+1&1\end{pmatrix},$$

тобто $\mathrm{A}^n=\begin{pmatrix}1&0\\n&1\end{pmatrix}$.

Приклад 1.4.8. Довести, що $(\mathrm{A}B)'=B'\mathrm{A}'$.

Розв'язання. Дійсно, в матриці $(\mathrm{A}B)'$ елемент, який знаходиться на перетині *i*-го рядка та *j*-го стовпця, дорівнює елементу матриці $\mathrm{A}B$, який знаходиться на перетині *j*-го рядка та *i*-го стовпця, тобто $\sum\limits_{k=1}^{n}a_{jk}b_{ki}$. Але цей вираз – сума добутків елементів *i*-го рядка матриці B' на відповідні елементи *j*-го стовпця матриці A'.

Приклад 1.4.9. Довести, що добуток $C=\mathrm{A}\mathrm{A}'$ кожної матриці на свою транспоновану – симетрична матриця.

Розв'язання. Маємо $C' = (AA')' = (A')' A' = AA' = C$, тобто $C' = C$, а це означає, що C – симетрична матриця.

Приклад 1.4.10. Обчислити A^n, якщо $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Обчислимо A^2 та A^3:

$$A^2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\varphi - \sin^2\varphi & -2\cos\varphi\sin\varphi \\ 2\sin\varphi\cos\varphi & \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{pmatrix};$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\varphi\cos\varphi - \sin 2\varphi\sin\varphi & -\cos 2\varphi\sin\varphi - \sin 2\varphi\cos\varphi \\ \sin 2\varphi\cos\varphi + \cos 2\varphi\sin\varphi & -\sin 2\varphi\sin\varphi + \cos 2\varphi\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 3\varphi & -\sin 3\varphi \\ \sin 3\varphi & \cos 3\varphi \end{pmatrix}.$$

Зробимо припущення, що $A^n = \begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}$, і доведемо його методом математичної індукції. Для $n = 2$ припущення правильне. Доведемо справедливість припущення для $n = k+1$, якщо воно правильне для $n = k$:

$$A^{k+1} = A^k A = \begin{pmatrix} \cos k\varphi & -\sin k\varphi \\ \sin k\varphi & \cos k\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos k\varphi\cos\varphi - \sin k\varphi\sin\varphi & -\cos k\varphi\sin\varphi - \sin k\varphi\cos\varphi \\ \sin k\varphi\cos\varphi + \cos k\varphi\sin\varphi & -\sin k\varphi\sin\varphi + \cos k\varphi\cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(k+1)\varphi & -\sin(k+1)\varphi \\ \sin(k+1)\varphi & \cos(k+1)\varphi \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.4.11. Обчислити добуток $ABCD$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 213 & 510 & 128 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix};\ D = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Використаємо асоціативність дії множення матриць:

$$ABCD = A(BC)D.$$

Знайдемо BC:

$$BC = \begin{pmatrix} 213 & 510 & 128 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}' = 639 - 510 - 128 = 1.$$

Враховуючи це, одержуємо

$$ABCD = AD = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 3 \\ -5 & -10 & 5 \\ -7 & -14 & 7 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.4.12. Слідом квадратної матриці називається сума елементів її головної діагоналі. Слід матриці A позначається як $tr\,A$.

Довести, що виконуються такі рівності:

а) $tr(\mathrm{A}+B)=tr\mathrm{A}+trB$;

б) $tr(\alpha \mathrm{A})=\alpha tr\mathrm{A}$;

в) $tr(\mathrm{A}B)=tr(B\mathrm{A})$.

Розв'язання. Властивості "a", "$б$" очевидні. Доведемо властивість "$в$". Нехай

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$tr\mathrm{A}B=\sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j1}+\sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j2}+\dots+\sum_{j=1}^{n} a_{nj}b_{jn}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{kj}b_{jk};$$

$$trB\mathrm{A}=\sum_{k=1}^{n} b_{1k}a_{k1}+\sum_{k=1}^{n} b_{2k}a_{k2}+\dots+\sum_{k=1}^{n} b_{nk}a_{kn}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{jk}a_{kj}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{kj}b_{jk},$$

тобто $tr\mathrm{A}B=trB\mathrm{A}$.

1.4.3. Обернена матриця

Оберненою до матриці A називається така матриця A^{-1}, що

$$\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A}=\mathrm{A}\mathrm{A}^{-1}=E.$$

Для того щоб матриця мала обернену матрицю, необхідно і достатньо, щоб її визначник $\det \mathrm{A}\neq 0$. Якщо ця умова виконується, то обернена матриця єдина і має таку будову:

$$\mathrm{A}^{-1}=\frac{1}{\det \mathrm{A}}\begin{pmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{21} & \dots & \mathrm{A}_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{A}_{1n} & \mathrm{A}_{2n} & \dots & \mathrm{A}_{nn} \end{pmatrix}.$$

Елементами її k-го стовпця ($k = 1, 2,\dots,n$) є алгебричні доповнення відповідних елементів k-го рядка матриці A, поділені на det A.

Матриця, елементами якої є алгебричні доповнення відповідних елементів матриці A, називається *приєднаною* до матриці A.

Знаходити обернену матрицю можна також методом елементарних перетворень. Елементарними називаються такі перетворення:

а) перестановка рядків (стовпців);

б) множення рядка (стовпця) на число, відмінне від нуля;

в) додавання до елементів рядка (стовпця) відповідних елементів другого рядка (стовпця), помножених на число.

Для знаходження оберненої до A матриці припишемо до A справа одиничну матрицю, тобто утворимо матрицю $(\mathrm{A}|E)$ розміром $n\times 2n$. Далі елементарними перетвореннями зведемо матрицю до вигляду $(E|C)$, що завжди можливо, якщо $\det \mathrm{A}\neq 0$. Тоді $\mathrm{A}^{-1}=C$.

Приклад 1.4.13. Методом приєднаної матриці знайти обернену матрицю, якщо вона існує:

1) $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 5 & -2\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -12 & 4\end{pmatrix}$; 3) $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & 5 & 4\\ -6 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Розв'язання.

1. Знайдемо $\det A$ та алгебричні доповнення:

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 5 & -2\end{vmatrix}=-2-20=-22,\ A_{11}=-2;\ A_{12}=-5;\ A_{21}=-4;\ A_{22}=1.$$

Тоді

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{A_{11}}{\det A} & \frac{A_{21}}{\det A}\\ \frac{A_{12}}{\det A} & \frac{A_{22}}{\det A}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{11} & \frac{2}{11}\\ \frac{5}{22} & \frac{-1}{22}\end{bmatrix}.$$

2. Маємо $\det A=\begin{vmatrix}3 & -1\\ -12 & 4\end{vmatrix}=12-12=0$, тобто матриця A невироджена і оберненої матриці A^{-1} не існує.

3. $\det A=\begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & 5 & 4\\ -6 & 0 & 1\end{vmatrix}=-103;$

$$A_{11}=\begin{vmatrix}5 & 4\\ 0 & 1\end{vmatrix}=5;\qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 4\\ -6 & 1\end{vmatrix}=-26;\quad A_{13}=\begin{vmatrix}2 & 5\\ -6 & 0\end{vmatrix}=30;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}3 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-3;\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -6 & 1\end{vmatrix}=-5;\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ -6 & 0\end{vmatrix}=-18;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 5 & 4\end{vmatrix}=17;\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{vmatrix}=-6;\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{vmatrix}=-1;$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{103}\begin{pmatrix}5 & -3 & 17\\ -26 & -5 & -6\\ 30 & -18 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{103} & \frac{3}{103} & -\frac{17}{103}\\ \frac{26}{103} & \frac{5}{103} & \frac{6}{103}\\ -\frac{30}{103} & \frac{18}{103} & \frac{1}{103}\end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що доповнення елементів першого рядка розташовані в першому стовпці, а алгебричні доповнення елементів другого рядка розташовані в другому стовпці, і т.д. Правильність обчислень можна перевірити, помноживши A на A^{-1}.

Приклад 1.4.14. Методом елементарних перетворень знайти матрицю, обернену до матриці A:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 4 & 5 & 0\\ -3 & 6 & 1\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. За допомогою послідовних елементарних перетворень переведемо матрицю A в одиничну матрицю, при цьому матриця E стане оберненою до A:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 6 & -1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -\frac{13}{4} & 2 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{10} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{30} & \frac{1}{15} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{10} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -\frac{3}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{30} & \frac{1}{15} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{10} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{11}{30} & \frac{4}{15} & -\frac{1}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{30} & \frac{1}{15} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{10} \end{array}\right).$$

Отже, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{30} & \frac{4}{15} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{30} & \frac{1}{15} & \frac{1}{10} \\ -\frac{13}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$, або $A^{-1} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} -11 & 8 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -39 & 12 & 3 \end{pmatrix}$.

Приклад 1.4.15. Знайти матрицю, обернену до матриці А, якщо:

а) $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\lambda_i \neq 0 \ (\forall i)$; б) $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \dots & \lambda_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Знайдемо обернені матриці методом елементарних перетворень:

а) $$\mathrm{A}\,|\,E=\left(\begin{array}{cccc|cccc}\lambda_1&0&\ldots&0&1&0&\ldots&0\\0&\lambda_2&\ldots&0&0&1&\ldots&0\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&0&\ldots&\lambda_n&0&0&\ldots&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&\ldots&0&\frac{1}{\lambda_1}&0&\ldots&0\\0&1&\ldots&0&0&\frac{1}{\lambda_2}&\ldots&0\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&0&\ldots&1&0&0&\ldots&\frac{1}{\lambda_n}\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\lambda_1}&0&\ldots&0\\0&\frac{1}{\lambda_2}&\ldots&0\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&0&\ldots&\frac{1}{\lambda_n}\end{pmatrix};$$

б) $$\mathrm{A}\,|\,E=\left(\begin{array}{cccc|cccc}0&\ldots&0&\lambda_1&1&0&\ldots&0\\0&\ldots&\lambda_2&0&0&1&\ldots&0\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\\lambda_n&\ldots&0&0&0&0&\ldots&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}\lambda_n&0&\ldots&0&0&0&\ldots&1\\0&\lambda_{n-1}&\ldots&0&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&0&1&\ldots&0\\0&0&\ldots&\lambda_1&1&0&\ldots&0\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&\ldots&0&0&\ldots&0&\frac{1}{\lambda_n}\\0&1&\ldots&0&0&\ldots&\frac{1}{\lambda_{n-1}}&0\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&0&\ldots&1&\frac{1}{\lambda_1}&\ldots&0&0\end{array}\right)\Rightarrow \mathrm{A}^{-1}=\begin{pmatrix}0&\ldots&0&\frac{1}{\lambda_n}\\0&\ldots&\frac{1}{\lambda_{n-1}}&0\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\\frac{1}{\lambda_1}&\ldots&0&0\end{pmatrix};$$

в) $$\mathrm{A}|E=\left(\begin{array}{cccccc|ccccc}1&-1&0&\ldots&0&0&1&0&\ldots&0&0\\0&1&-1&\ldots&0&0&0&1&\ldots&0&0\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&0&0&\ldots&1&-1&0&0&\ldots&1&0\\0&0&0&\ldots&0&1&0&0&\ldots&0&1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccccc|ccccc}1&-1&0&\ldots&0&0&1&0&\ldots&0&0\\0&1&-1&\ldots&0&0&0&1&\ldots&0&0\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&0&0&\ldots&1&0&0&0&\ldots&1&1\\0&0&0&\ldots&0&1&0&0&\ldots&0&1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

(до (n–1)-го рядка додали n-й, після чого до (n–2)-го додали (n–1)-й і т.д.);

г) $$\mathrm{A}|E=\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & -a & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -a & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & a^2 & -a & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -a & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & a_2 & -a & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 1 & (-a)^{n-1} & (-a)^{n-2} & (-a)^{n-3} & \ldots & -a & -1 \end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a^2 & -a & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -a^3 & a^2 & -a & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (-a)^{n-1} & (-a)^{n-2} & (-a)^{n-3} & (-a)^{n-4} & \ldots & -a & 1 \end{pmatrix}$$

(до другого рядка додали перший, помножений на $(-a)$, після чого до третього рядка додали другий, помножений на $(-a)$, і т. д.).

1.4.4. Розв'язання систем лінійних рівнянь матричним методом. Розв'язання матричних рівнянь

Систему n лінійних алгебричних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \quad .... \quad ... \quad .... \quad .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

враховуючи правила множення матриць і умову рівності двох матриць, можна записати у вигляді $\mathrm{A}X = B$, де

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Якщо матриця A невироджена, то вона має обернену матрицю A^{-1}. Помножимо зліва обидві частини рівності $\mathrm{A}X = B$ на A^{-1}. Враховуючи, що $\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} = E$, а $EX = X$, одержимо матрицю-стовпець невідомих $X = \mathrm{A}^{-1}B$. Матриця X може бути не тільки матрицею-стовпцем, але й матрицею розміром $n \times m$. У такому разі і матриця В повинна мати розмір $n \times m$.

Загалом кажучи, наявність оберненої матриці дозволяє ввести для невироджених квадратних матриць операцію ділення, тобто множення на обернену матрицю. При цьому, оскільки множення матриць некомутативне, треба розрізняти ділення зліва і справа.

Так, якщо $\mathrm{A}X = B$, то $X = \mathrm{A}^{-1}B$ (ділення зліва), а якщо $X\mathrm{A} = B$, то $X = B\mathrm{A}^{-1}$ (ділення справа).

Приклад 1.4.16. Матричним методом розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо дану систему рівнянь у матричній формі:

$$\mathrm{A}X = B, \text{ де } \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

За допомогою елементарних перетворень знайдемо матрицю A^{-1}, якщо вона існує:

$$(\mathrm{A} \mid E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{array}\right)\Rightarrow \mathrm{A}^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тоді $X=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

Приклад 1.4.17. Розв'язати матричні рівняння:

1) $\mathrm{A}X=B$, де $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $Y\mathrm{A}=B$, де $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

3) $\mathrm{A}XB=C$, де $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

1. Домноживши обидві частини рівності $\mathrm{A}X=B$ зліва на A^{-1} і враховуючи, що $\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A}=E$, одержимо $X=\mathrm{A}^{-1}B$. Знайдемо A^{-1}:

$$\det\mathrm{A}=4,\ \mathrm{A}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{4} \\ 1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$X=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 22 & -19 \\ 14 & -9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{11}{2} & -\frac{19}{4} \\ \frac{7}{2} & -\frac{9}{4} \end{pmatrix}.$$

2. $Y=B\mathrm{A}^{-1}$;

$$\det\mathrm{A}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix}=-7,\ \mathrm{A}^{-1}=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 15 & -10 & 11 \\ -8 & 3 & -4 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$Y=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3&2&-2\\1&5&-3\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}15&-10&11\\-8&3&-4\\6&-4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{17}{7}&\frac{16}{7}&-\frac{19}{7}\\\frac{43}{7}&-\frac{17}{7}&\frac{18}{7}\\-\frac{8}{7}&\frac{3}{7}&-\frac{4}{7}\end{pmatrix}.$$

3. Домноживши обидві частини рівності $\mathrm{A}XB=C$ зліва на A^{-1} та справа на B^{-1} і враховуючи, що $\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A}=E$ та $BB^{-1}=E$, одержимо $X=\mathrm{A}^{-1}CB^{-1}$, після чого знайдемо A^{-1} та B^{-1} і, нарешті, X:

$$\det\mathrm{A}=\begin{vmatrix}1&3\\4&0\end{vmatrix}=-12;\ \det B=\begin{vmatrix}-2&2\\4&1\end{vmatrix}=-10;$$

$$\mathrm{A}^{-1}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}0&3\\4&-1\end{pmatrix};\ B^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-1&2\\4&2\end{pmatrix};$$

$$X=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}0&3\\4&-1\end{pmatrix}\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-1&2\\4&2\end{pmatrix}=\frac{1}{120}\begin{pmatrix}12&6\\-8&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{10}&\frac{1}{20}\\-\frac{1}{15}&\frac{1}{20}\end{pmatrix}.$$

1.4.5. Ранг матриці та його обчислення

Мінором k-го порядку матриці розміром $m\times n$ називається визначник, одержаний із k рядків і k стовпців матриці.

Мінор першого порядку – це відповідний елемент матриці.

Означення. Максимальний порядок відмінних від нуля мінорів матриці А називається *рангом* матриці А і позначається $rg\mathrm{A}$.

Ранг матриці можна обчислювати різними способами:

1. Безпосереднє обчислення всіх мінорів, починаючи з мінорів другого порядку. Як тільки знайдено мінор другого порядку, відмінний від нуля, переходять до обчислення мінорів третього порядку до першого ненульового, після чого – до обчислення мінорів четвертого порядку і т. д. доти, аж поки не виявиться, що всі мінори $(l+1)$-го порядку дорівнюють нулю. Ранг матриці дорівнюватиме l. Можна починати обчислення всіх мінорів найвищого порядку і знижувати порядок мінорів доти, поки не буде знайдено відмінний від нуля мінор. Його порядок дорівнюватиме рангу матриці.

2. Спосіб обвідних мінорів (окантування). Серед мінорів другого порядку вибирають ненульовий мінор. Після цього обчислюють мінори третього порядку, які містять вибраний ненульовий, і т.д. Порядок останнього з одержаних ненульових мінорів і буде рангом матриці. Але обчислення мінорів – трудомісткий процес. На практиці краще використовувати наступний метод обчислення рангу.

3. Метод елементарних перетворень. Нагадаємо, що прямокутну матрицю називають ступінчастою, якщо її перший рядок містить відмінний від нуля елемент і в кожному наступному рядку перший відмінний від нуля елемент розташований праворуч від першого відмінного від нуля елемента в попередньому рядку. Квадратна ступінчаста матриця називається трикутною

$\left(a_{ij} = 0, \quad \forall i > j\right)$:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Визначник трикутної матриці дорівнює $a_{11}\, a_{22} \dots a_{nn}$.

Ступінчаста матриця має ранг, який дорівнює кількості її відмінних від нуля рядків. За допомогою елементарних перетворень (див. підрозд. 1.4.3) кожна ненульова матриця може бути зведена до ступінчастого вигляду.

Зауважимо, що елементарні перетворення не змінюють рангу матриці, тобто ранг матриці A дорівнює рангу ступінчастої матриці, одержаної з матриці A елементарними перетвореннями.

Зауважимо також, що транспонування не змінює рангу матриці.

Приклад 1.4.18. Обчислити ранг матриць:

$$1)\ \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}; \qquad 2)\ \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

1. Усі мінори другого та третього порядку матриці A дорівнюють нулю, оскільки рядки пропорційні, отже, ранг матриці A дорівнює одиниці.

2. Усі мінори третього порядку дорівнюють нулю, тому що один із трьох рядків нульовий, звідки випливає, що $rg\mathrm{A} \le 2$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \ne 0,$$

а це означає, що $rg\mathrm{A} = 2$.

Приклад 1.4.19. За допомогою методу елементарних перетворень обчислити ранг матриць:

$$1)\ \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix};\ 2)\ \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 3 \\ 4 & 8 & 6 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & -11 & 15 & 8 \end{pmatrix};\ 3)\ \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 & 1 \\ 5 & -4 & 6 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

1. Перетворимо матрицю A в ступінчасту, для чого спочатку переставимо місцями рядки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Далі, віднявши від другого рядка перший, помножений на 2, а від третього рядка – перший, помножений на 3, дістанемо матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Віднімемо від третього рядка другий:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Маємо ступінчасту матрицю, отже, ранг матриці A дорівнює 3 (мінор третього порядку $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ дорівнює –2, тобто відмінний від нуля).

2. Віднявши від четвертого рядка перший, а від другого – перший, помножений на 4, маємо матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & -14 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -10 & 11 & 5 \end{pmatrix}.$$

Додамо до четвертого рядка другий, помножений на $\frac{1}{2}$, та віднімемо від третього рядка другий:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -10 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -9 \end{pmatrix}.$$

Помножимо четвертий рядок на $\left(-\frac{1}{9}\right)$, переставимо третій та четвертий рядки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -10 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

Додамо до четвертого рядка третій, помножений на (–7):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -10 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тепер бачимо, що ранг матриці дорівнює 4 (мінор четвертого порядку

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -10 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ дорівнює 20).

3.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 & 1 \\ 5 & -4 & 6 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 1 \\ 5 & -4 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & -9 & -3 \\ 0 & 11 & -9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & -9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$rg\mathrm{A} = 3$ (кількість відмінних від нуля рядків ступінчастої матриці).

1.4.6. Розв'язання довільних систем лінійних рівнянь. Теорема Кронекера – Капеллі

Теорема Кронекера – Капеллі. Для того, щоб система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

мала хоча б один розв'язок (була сумісною), необхідно і достатньо, щоб $rg\mathrm{A} = rg\overline{\mathrm{A}}$, де

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \overline{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Матриця $\overline{\mathrm{A}}$ називається розширеною.

Приклад 1.4.20. Дослідити сумісність систем та знайти їх загальний розв'язок:

$$1)\begin{cases} 2x - y + z = -2, \\ x + 2y + 3z = -1, \\ x - 3y - 2z = 3; \end{cases} \quad 2)\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2; \end{cases} \quad 3)\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$$

Розв'язання.

1. Запишемо матрицю системи A і розширену матрицю $\overline{\mathrm{A}}$ та знайдемо їх ранги:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}; \ \overline{\mathrm{A}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right),$$

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&2&3\\1&-3&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\2&-1&1\\1&-3&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-5&-5\\0&-5&-5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},\ rg\mathrm{A}=2;$$

$$\overline{\mathrm{A}}=\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&1&-2\\1&2&3&-1\\1&-3&-2&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&-1\\2&-1&1&-2\\1&-3&-2&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&-1\\0&-5&-5&0\\0&-5&-5&4\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&-1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right),\quad rg\overline{\mathrm{A}}=3.$$

Система несумісна, оскільки $rg\mathrm{A}\neq rg\overline{\mathrm{A}}$.

2. Знайдемо ранги матриць A та $\overline{\mathrm{A}}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-4&1\\2&1&-5&-1\\1&-1&-1&-2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-4&1\\2&1&-5&-1\\1&-1&-1&-2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-4&1\\0&-1&1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

тобто $rg\mathrm{A}=rg\overline{\mathrm{A}}=2$ і система сумісна. Запишемо систему з відкинутим останнім рівнянням:

$$\begin{cases}x_1+2x_2-4x_3=1,\\-x_2+x_3=-1.\end{cases}$$

Маємо систему, еквівалентну даній. Невідомі x_1, x_2 називаються базисними (кількість їх дорівнює рангу r матриць A та $\overline{\mathrm{A}}$), мінор $M_2=\begin{vmatrix}1&2\\0&-1\end{vmatrix}$, складений з коефіцієнтів при невідомих x_1,x_2 і відмінний від нуля, має назву базисного мінора, а невідоме x_3 – вільне (кількість вільних невідомих дорівнює $n-r$, де n – загальна кількість невідомих).

Перенесемо вільні невідомі в праві частини рівнянь:

$$\begin{cases}x_1+2x_2=1+4x_3,\\-x_2=-1-x_3.\end{cases}$$

Для кожного значення x_3 (для кожного набору значень вільних невідомих $x_{r+1}=\gamma_1,...,x_n=\gamma_{n-r}$) система має єдиний розв'язок (x_1,x_2,x_3) $(x_1,x_2,...,x_r,\gamma_1,...,\gamma_{n-r})$, який називається загальним розв'язком системи. Нехай $x_3=\gamma_1$. Розв'язавши систему, одержимо $x_1=2\gamma_1-1$, $x_2=1+\gamma_1$, $x_3=\gamma_1$,

або $\vec{X}=\begin{pmatrix}2\gamma_1-1\\1+\gamma_1\\\gamma_1\end{pmatrix}$.

3. Знайдемо ранги матриць A та $\overline{\mathrm{A}}$:

$$\overline{\mathrm{A}}=\left(\begin{array}{cccc|c}2&7&3&1&6\\3&5&2&2&4\\9&4&1&7&2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}2&7&3&1&6\\1&-2&-1&1&-2\\9&4&1&7&2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-2&-1&1&-2\\2&7&3&1&6\\9&4&1&7&2\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-2&-1&1&-2\\0&11&5&-1&10\\0&22&10&-2&20\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-2&-1&1&-2\\0&11&5&-1&10\\0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

Отже, $rg\mathrm{A}=rg\overline{\mathrm{A}}=2$ і система сумісна.

Виберемо мінор $\begin{vmatrix}1&-2\\0&11\end{vmatrix}$ як базисний. У такому разі змінні x_1 та x_2 – базисні, а x_3 та x_4 – вільні. Система, еквівалентна даній, має вигляд

$$\begin{cases}x_1-2x_2=x_3-x_4-2,\\11x_2=-5x_3+x_4+10.\end{cases}$$

Якщо $x_3=\gamma_1$, $x_4=\gamma_2$, то загальним розв'язком буде

$$\vec{X}=\begin{pmatrix}\frac{1}{11}\gamma_1-\frac{9}{11}\gamma_2-\frac{2}{11}\\-\frac{5}{11}\gamma_1+\frac{1}{11}\gamma_2+\frac{10}{11}\\\gamma_1\\\gamma_2\end{pmatrix}.$$

Приклад 1.4.21. Дослідити систему та знайти її загальний розв'язок залежно від значення параметра λ:

$$\begin{cases}5x_1-3x_2+2x_3+4x_4=3,\\4x_1-2x_2+3x_3+7x_4=1,\\8x_1-6x_2-x_3-5x_4=9,\\7x_1-3x_2+7x_3+17x_4=\lambda.\end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо матрицю $\overline{\mathrm{A}}$ та знайдемо $rg\mathrm{A}$ та $rg\overline{\mathrm{A}}$ залежно від λ:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}5&-3&2&4&3\\4&-2&3&7&1\\8&-6&-1&-5&9\\7&-3&7&17&\lambda\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&-1&-3&2\\4&-2&3&7&1\\8&-6&-1&-5&9\\7&-3&7&17&\lambda\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&-1&-3&2\\0&2&7&19&-7\\0&2&7&19&-7\\0&4&14&38&\lambda-14\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&-1&-3&2\\0&2&7&19&-7\\0&4&14&38&\lambda-14\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 19 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

При $\lambda \neq 0$ система несумісна. Якщо $\lambda = 0$, то система сумісна, $rg\text{A} = rg\overline{\text{A}} = 2$ і загальний розв'язок має вигляд

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2}\gamma_1 - \frac{13}{2}\gamma_2 - \frac{3}{2} \\ -\frac{7}{2}\gamma_1 - \frac{19}{2}\gamma_2 - \frac{7}{2} \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}.$$

Однорідна система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

завжди сумісна, оскільки має тривіальний розв'язок $\vec{X} = (0 \cdots 0)'$. Якщо $rg\text{A} = r < n$ (тобто $\det \text{A} = 0$), то система має нетривіальні розв'язки. Множина розв'язків однорідної системи – це лінійний простір, розмірність якого $n - r$. Вектори

$$\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} x_1^1 & \cdots & x_r^1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}', \ \vec{E}_2 = \begin{pmatrix} x_1^2 & \cdots & x_r^2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}', ...,$$
$$\vec{E}_{n-r} = \begin{pmatrix} x_1^{n-r} & \cdots & x_r^{n-r} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}'$$

утворюють базис цього простору, який має назву фундаментальної системи розв'язків.

Одержати ці базисні розв'язки можна, якщо вільним невідомим надавати по черзі значення (1,0,…,0), (0,1,0…0),…, (0,0,…,1) (див. приклад 1.4.21).

Довільний розв'язок має вигляд $\vec{X} = c_1\vec{E}_1 + c_2\vec{E}_2 + ... + c_{n-r}\vec{E}_{n-r}$, де c_1, $c_2, \ldots, c_{n-r}$ – довільні сталі.

Приклад 1.4.22. Знайти фундаментальну систему розв'язків і загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо матрицю системи та знайдемо її ранг:

$$\text{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матриці A дорівнює одиниці, що менше кількості невідомих, тому система має нетривіальні розв'язки. Розмір простору розв'язків дорівнює 2.

Система, еквівалентна даній, має вигляд $x_1 = 2x_2 + 3x_3$, де невідомі x_2 та x_3 – вільні. Покладаючи $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ та $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, одержуємо фундаментальну систему розв'язків

$$\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{E}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Загальним розв'язком є

$$\vec{X} = c_1\vec{E}_1 + c_2\vec{E}_2 = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 + 3c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1 = 2c_1 + 3c_2$, $x_2 = c_1$, $x_3 = c_2$, де c_1 та c_2 – довільні сталі.

Приклад 1.4.23. Розв'язати систему

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Він дорівнює 3, тобто система має єдиний тривіальний розв'язок.

1.5. ЛІНІЙНІ ПРОСТОРИ

1.5.1. Лінійний простір. Лінійна залежність. Базис і координати. Перетворення координат при заміні базису

Існують різноманітні множини, елементи яких можна додавати один до одного та множити на числа. Такою множиною є, наприклад, множина звичайних геометричних векторів у просторі. Матриці розміром $n \times m$ теж можна додавати та множити на числа. Те ж саме стосується множини неперервних функцій і т.п. Незважаючи на різну природу елементів, операції додавання та множення на числа мають спільні властивості (наприклад, сума не змінюється при перестановці доданків і т.п.). Тому доцільно розглянути множину елементів будь-якої природи із двома операціями – додаванням елементів один до одного та множенням елементів на дійсні (або комплексні) числа.

Множина L називається *лінійним простором*, якщо:

1. Задано закон, згідно з яким кожним двом елементам $x \in L$, $y \in L$ відповідає елемент множини L, який називається сумою $x + y$.

2. Задано закон, згідно з яким кожному елементу $x \in L$ та кожному числу $\alpha \in R$ (або $\alpha \in C$) відповідає елемент αx, який називається добутком елемента на число.

3. Виконуються вісім властивостей (для будь-яких елементів множини

L та будь-яких чисел):

а) $x + y = y + x$;

б) $(x + y) + z = x + (y + x)$;

в) існує такий елемент $0 \in L$, що $x + 0 = x$;

г) для кожного $x \in L$ існує такий елемент $(-x) \in L$, що $x + (-x) = 0$; $(-x)$ називають протилежним елементом;

д) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;

е) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;

ж) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;

з) $1 \cdot x = x$.

Зауважимо, що у випадку, коли елементи множини L дозволяється множити лише на дійсні числа $\alpha \in R,$ множину L називають дійсним лінійним простором, а якщо розглядають можливість множити на комплексні числа, – комплексним.

Елементи лінійних просторів часто називають *векторами*.

Лінійною комбінацією векторів (елементів лінійного простору L) називається сума

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n .$$

У випадку $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$ комбінація називається *тривіальною.*

Система елементів лінійного простору називається *лінійно незалежною,* якщо не існує її нетривіальної комбінації, яка дорівнює нулю, тобто якщо $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0$, то $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.

Система $x_1, x_2, ..., x_n$ *лінійно залежна,* якщо існує її нульова нетривіальна лінійна комбінація. Система лінійно залежна у тому і тільки тому випадку, коли хоча б один з її елементів є лінійною комбінацією інших.

Система векторів $x_1, x_2, ..., x_n \in L$ називається *базисом* лінійного простору L, якщо:

1) вона лінійно незалежна;

2) кожний елемент $x \in L$ можна подати у вигляді лінійної комбінації $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n$.

Коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ називаються *координатами* вектора x у базисі $x_1, x_2, ..., x_n$.

Кількість елементів базису називається *розмірністю* лінійного простору L.

Існують лінійні простори, в яких для будь-якого числа n знайдеться система n лінійно незалежних векторів. Такі простори називають нескінченновимірними.

Зрозуміло, що координати одного і того ж елемента $x \in L$ залежать від вибору базису. Нехай у просторі L вибрано два базиси: $e_1, e_2, ..., e_n$ (так званий старий) та $e_1', e_2', ..., e_n'$ (так званий новий). Зрозуміло, що кожний із векторів $e_1', e_2', ..., e_n'$ має у базисі $e_1, e_2, ..., e_n$ власні координати:

$$e_1' = h_{11} e_1 + h_{21} e_2 + ... + h_{n1} e_n ,..., \; e_n' = h_{1n} e_1 + h_{2n} e_2 + ... + h_{nn} e_n .$$

Розташуємо координати нових базисних векторів по *стовпцях* матриці:

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ця матриця називається *матрицею переходу* від базису $e_1, e_2, ..., e_n$ до базису $e'_1, e'_2, ..., e'_n$ (обов'язково $DetH \neq 0$).

Якщо вектор x має у старому базисі стовпець координат $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, а у новому – стовпець $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}$, то $X = HX'$.

Непорожня множина $L_1 \subset L$ називається *лінійним підпростором*, якщо:

а) сума будь-яких елементів $x, y \in L_1$ належить множині L_1: $x + y \in L_1$;

б) добуток будь-яких $x \in L_1$ та α належить множині L_1: $\alpha x \in L_1$.

Звернемо увагу на те, що наведені означення збігаються із відповідними означеннями для множини геометричних векторів.

Приклад 1.5.1. Множина геометричних векторів у просторі утворює лінійний простір, розмірність якого дорівнює 3.

Прикладами лінійних підпросторів є:

а) множина векторів, що належать деякій площині (дійсно, їх сума і добуток вектора на число знаходяться на площині);

б) множина векторів, розташованих на будь-якій прямій.

Множина, наприклад, одиничних векторів не утворює лінійного підпростору, оскільки довжина суми відрізняється від 1.

Множина векторів, що мають у деякому базисі першу координату 1, теж не утворює лінійного підпростору.

Приклад 1.5.2. Розглянемо множину квадратних матриць розміром 2×2. Вона утворює лінійний простір розмірністю 4. Базисом цього простору є, наприклад, четвірка

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що їх лінійна комбінація дорівнює

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}$$

і може бути нульовою лише у випадку $\alpha_1 = ... = \alpha_4 = 0$. Прикладами лінійних підпросторів є:

а) множина матриць із нульовим першим рядком;

б) множина діагональних матриць;

в) множина симетричних матриць (базис $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$);

г) множина верхньотрикутних матриць.

Множина матриць A, у яких $\det\mathrm{A} = 0$, не утворює підпростору, наприклад:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,\ \det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0, \text{ але } \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1.$$

Приклад 1.5.3. Розглянемо множину стовпців $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_i \in R \right\}$. Вона називається *арифметичним простором* R^n. Його базис утворюють n стовпців

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

(або інші стовпці, якщо тільки визначник матриці із стовпців ненульовий).

Розмірність простору дорівнює n. Прикладом підпростору є множина стовпців, перше число яких дорівнює 0. А от стовпці з одиницею на першій позиції не утворюють підпростору, оскільки сума

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ x_2 + y_2 \\ \dots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

першою має двійку і не є стовпцем такого ж вигляду.

Приклад 1.5.4. Розглянемо множину $C[a;b]$ функцій, неперервних на відрізку $[a;b]$.

Оскільки сума $f(x) + g(x)$ та добуток $\alpha f(x)$ – неперервні функції, $C[a;b]$ – лінійний простір. На відміну від попередніх прикладів розмірність цього простору дорівнює ∞. Дійсно, для будь-якого числа n можна вказати n лінійно незалежних функцій, наприклад, 1, $x, x^2, \dots, x^{n-1}$.

Доведемо лінійну незалежність. Нехай

$$\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_{n-1} x^{n-1} = 0.$$

Відомо, що багаточлен хоча б з одним ненульовим коефіцієнтом має не більше $n-1$ дійсних коренів, отже, він дорівнює 0 не більше, ніж у $n-1$ точках і дорівнює 0 у *будь-яких* точках лише у випадку

$\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0$.

Розглянемо у множині неперервних функцій деякі підмножини та з'ясуємо, які з них утворюють лінійні підпростори.

1. Багаточлени, степінь яких дорівнює 2, не утворюють лінійного підпростору. Це одразу ж видно з того, що, наприклад, $x^2 + 4$, $1 - x^2$ – багаточлени степеня 2, а їх сума дорівнює 5, тобто багаточлену степеня 0.

2. Багаточлени вигляду $ax^2 + bx + c$, де $a,\ b,\ c$ – довільні числа, тобто багаточлени степеня, *не вищого* за 2, утворюють лінійний підпростір.

Дійсно, сума $(ax^2 + bx + c) + (a_1x^2 + b_1x + c_1)$ має степінь, не вищий за 2, а добуток багаточлена на сталу k – степінь ≤ 2.

Приклад 1.5.5. Довести, що у просторі R^3 стовпці

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}5\\4\\0\end{pmatrix}$$

утворюють лінійно залежну систему.

Розв'язання. Доведемо, що існують числа x_1, x_2, x_3, x_4 $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \neq 0)$, такі, що

$$x_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix}5\\4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Це рівняння можна перетворити до вигляду

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Маємо однорідну систему трьох рівнянь із чотирма невідомими. Із загальної теорії лінійних систем відомо, що така система має безліч розв'язків і кількість "вільних" невідомих $n - R$ (n – кількість невідомих, R – ранг матриці коефіцієнтів). У нашому випадку R≤3, отже, хоча б одне із x_1, x_2, x_3, x_4 можна вибирати будь-яким. Наприклад, в системі

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -5x_4, \\ 2x_1 + 2x_3 = -4x_4, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

спробуємо взяти $x_4 = 1$:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -5, \\ 2x_1 + 2x_3 = -4, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \end{cases}$$

звідки $x_1 = 1$, $x_2 = 6$, $x_3 = -3$. Отже, нетривіальна лінійна комбінація стовпців дорівнює 0, а це є означенням лінійної залежності.

Приклад 1.5.6. Довести, що стовпці $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ утворюють лінійно незалежну систему. Знайти координати стовпця $e = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ в базисі e_1, e_2, e_3.

Розв'язання. Розглянемо лінійну комбінацію $xe_1 + ye_2 + ze_3 = 0$:

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} x + 2y - 7z = 0, \\ x + z = 0, \\ -x + 3y = 0. \end{cases}$$

Визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -26 \neq 0,$$

тому система має єдиний розв’язок $x = y = z = 0$, тобто e_1, e_2, e_3 – лінійно незалежні.

Нехай x_1, x_2, x_3 – координати *e* в базисі e_1, e_2, e_3, тобто

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 7x_3 = -3, \\ x_1 + x_3 = 3, \\ -x_1 + 3x_2 = 1. \end{cases}$$

Отже, система сумісна, $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ – координати *e*.

Зауваження. Легко бачити, що стовпці $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$, ..., $\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$ утворюють лінійно незалежну систему в просторі R^n у тому і лише тому випадку, коли

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

а множина будь-яких $n+1$ стовпців у просторі R^n завжди лінійно залежна.

Приклад 1.5.7. Наведемо приклади нескінченновимірних лінійних просторів:

1. Множина P усіх багаточленів. Дійсно, для будь-якого числа n існує лінійно незалежна система, що містить n функцій, наприклад:

$$1,\ x,\ x^2, ..., x^{n-1}.$$

2. Множина непарних тригонометричних багаточленів

$$\{b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + ... + b_n \sin nx + ...\}.$$

3. Множина парних тригонометричних багаточленів

$$\{a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + ... + a_n \cos nx + ...\}.$$

4. Множина тригонометричних багаточленів

$$\{a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + ... + a_n \cos nx + b_n \sin nx + ...\}.$$

5. Множина $C[a;b]$ неперервних функцій.

Приклад 1.5.8. На площині розглянуто два базиси: $\vec{i}, \vec{j}$ та новий, одержаний із $\vec{i}, \vec{j}$ поворотом на 30^0 проти годинникової стрілки (рис. 1.5.1). Записати матрицю переходу H.

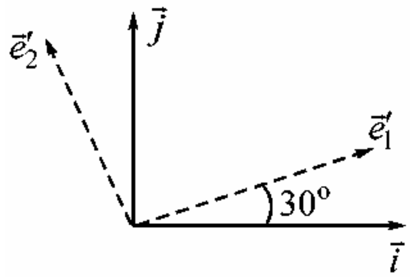


Рис. 1.5.1

Розв'язання. Відомо, що матриця H утворена із стовпців координат $\vec{e}_1'$ та $\vec{e}'_2$ у базисі $\vec{i}, \vec{j}$. Оскільки $|\vec{e}'_1| = |\vec{e}'_2| = 1$, їх координатами є

$$\vec{e}'_1 = \begin{pmatrix} \cos 30^0 \\ \sin 30^0 \end{pmatrix},\ \ \vec{e}'_2 = \begin{pmatrix} -\sin 30^0 \\ \cos 30^0 \end{pmatrix}.$$

Маємо $H = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.

Приклад 1.5.9. У просторі P_2 поліномів степеня, не вищого за 2, розглянуто базиси $e_1,\ e_2,\ e_3\ (e_1 = 1,\ e_2 = x,\ e_3 = x^2)$, $e'_1, e'_2, e'_3\ (e'_1 = 1 + x$, $e'_2 = -1 + 2x + x^2, e'_3 = 3 - 2x^2)$. Скласти матрицю H. Знайти координати полінома $f(x)$ у базисі $e_1,\ e_2,\ e_3$, якщо його координати у базисі e'_1, e'_2, e'_3 дорівнюють $(1; -1; 2)$.

Розв'язання. Оскільки $e'_1 = 1 + x$, стовпець його координат у старому базисі $1,\ x,\ x^2$ – $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Аналогічно для e'_2 маємо $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, а для e'_3 – $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Запишемо матрицю переходу: $H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Поліном $f(x) = e'_1 - e'_2 + 2e'_3$ у новому базисі e'_1, e'_2, e'_3 має стовпець координат

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

тому у базисі e_1, e_2, e_3 він має координати

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Цікаво перевірити відповідь безпосередньо:

$$f(x) = 1(1+x) - 1(-1+2x+x^2) + 2(3-2x^2) = 8 - x - 5x^2.$$

1.5.2. Лінійні відображення. Лінійні перетворення (лінійні оператори). Матриця лінійного відображення

Нехай L та L_1 – два лінійних простори. Під відображенням A простору L у простір L_1 розуміємо закон, за яким кожному елементу x простору L відповідає єдиний елемент y простору L_1:

$$y = A(x), \quad A : L \to L_1.$$

Відображення A називається *лінійним*, якщо для будь-яких елементів $x_1, x_2 \in L$ та будь-якого числа α виконуються рівності

$$A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2), \; A(\alpha x_1) = \alpha A(x_1).$$

Зауважимо, що знаки “+” ліворуч і праворуч означають дві, взагалі кажучи, різні операції додавання елементів: $x_1 + x_2$ – сума елементів у просторі L, а $A(x_1) + A(x_2)$ – у просторі L_1 (див. приклад 1.5.10).

Лінійне відображення A називається *лінійним перетворенням*, якщо L_1 збігається з L, тобто $A\colon L \to L$.

Часто лінійне відображення та лінійне перетворення називають також *лінійним оператором*.

Відображення іноді зручно зображати схематично (рис. 1.5.2) у вигляді “перетворювача”, на вхід якого надходить елемент $x \in L$, а на виході з’являється елемент $y \in L_1$.

Якщо в лінійних просторах L та L_1 вибрано базиси $e_1, \ldots, e_n$ та $f_1, \ldots, f_m$, то лінійне відображення можна задавати у координатній формі. Розглянемо координати елементів x та y (рис. 1.5.3).

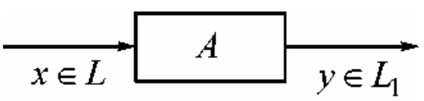


Рис. 1.5.2

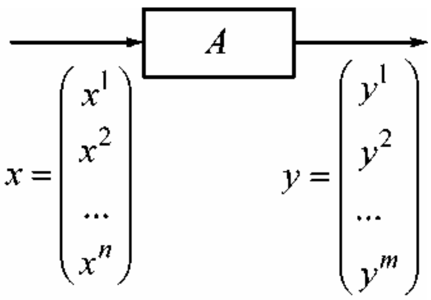


Рис. 1.5.3

У матричному вигляді $y = \mathrm{A}x$, або

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \dots \\ y^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix},$$

де матриця $\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ \dots \\ a_{m1} \end{matrix}} & \begin{matrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} a_{1n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{matrix}} \end{pmatrix}$ утворена із n стовців. Перший *стовпець* – це координати вектора $A(e_1)$, другий – вектора $A(e_2)$ і т.п. Отже, матриця утворена із координат *образів базисних елементів* при відображенні A і називається матрицею лінійного відображення A. Її позначають, як правило, теж літерою A, отже, у матричному вигляді $y = \mathrm{A}x$, де y та x – матриці-стовпці. Зауважимо, що в записі відсутні дужки.

Якщо $A: L \to L$, то його матриця – квадратна розміром $n \times n$.

Приклад 1.5.10. Нехай L – множина геометричних векторів на площині, $L_1 = R$. Розглянемо відображення A, що скалярно помножає будь-який вектор $\vec{x} \in L$ на який-небудь вектор $\vec{a}$ (наприклад $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$):

$A: \vec{x} \to \vec{x} \cdot \vec{a} \in R$ (число). Довести, що A – лінійне відображення.

Розв'язання. За властивістю звичайного скалярного добутку

$$A(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \cdot \vec{a} = \vec{x}_1\vec{a} + \vec{x}_2\vec{a},$$

звідки

$$A(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = A(\vec{x}_1) + A(\vec{x}_2).$$

Звернемо увагу, що ліворуч знак “+” означає суму *векторів*, а праворуч – суму звичайних *чисел.*

Зрозуміло, що $A(\alpha\vec{x}_1) = (\alpha\vec{x}_1)\vec{a} = \alpha(\vec{x}_1 \cdot \vec{a}) = \alpha A(\vec{x}_1)$, що й треба було довести.

Приклад 1.5.11. Нехай A – лінійне відображення L у L_1. Довести, що $A(0) = 0$.

Розв'язання. За властивістю лінійності $A(-x) = -A(x)$ (ми розглянули $\alpha = -1$), тоді

$$A(0) = A(x - x) = A(x) - A(x) = 0,$$

отже, образом нуля при будь-якому лінійному відображенні завжди буде нуль.

Приклад 1.5.12. Нехай $A: R \to R$ за правилом $A(x) = x^2$. Чи буде A лінійним перетворенням?

Розв'язання. Ні, не буде, тому що $A(x+y) = (x+y)^2$ (за означенням), але $A(x) = x^2$, $A(y) = y^2$, $(x+y)^2 \neq x^2 + y^2$.

Можна розглянути і другу властивість лінійності:

$$A(5x) = (5x)^2 = 25x^2 \neq 5A(x).$$

Приклад 1.5.13. Чи буде лінійним перетворенням функція $f: R \to R$, така, що $f(x)=2x+3$?

Розв'язання. Ні, не буде. Дуже просто переконатися в цьому, підставивши нуль замість x (див. приклад 1.5.11):

$$f(0)=2\cdot 0+3=3\neq 0.$$

Підкреслимо, що звичайна лінійна функція $y=kx+b$ при $b\neq 0$ не є лінійним оператором.

Приклад 1.5.14. Розглянемо простір R^3. Нехай для $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ визначено операцію

$$y=A(x)=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&2\\4&5&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$$

Довести, що A – лінійний оператор.

Розв'язання. За означенням добутку матриць

$$y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+2x_2+3x_3\\-x_2+2x_3\\4x_1+5x_2\end{pmatrix}.$$

Очевидно, що $A(\alpha x)=\alpha A(x)$, тому що кожна координата x_1, x_2 та x_3 одержує однаковий множник α. Знайдемо $A(x+z)$:

$$A(x+z)=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&2\\4&5&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1+z_1\\x_2+z_2\\x_3+z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+z_1+2(x_2+z_2)+3(x_3+z_3)\\ \ldots\\ \ldots\end{pmatrix}=Ax+Az,$$

звідки випливає, що A – лінійний оператор.

Зауваження. Зрозуміло, що множення будь-якої матриці розміром 3×3 на стовпець із R^3 буде лінійним оператором, що діє у просторі R^3, аналогічно множення матриці $n\times n$ на стовпець із n чисел буде лінійним оператором, що діє в просторі R^n.

Приклад 1.5.15. Нехай $L=R^n$, перетворення A діє за правилом

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\rightarrow \boxed{A} \rightarrow\begin{pmatrix}x_1-2x_2\\0\\x_3+x_1\end{pmatrix}.$$

Довести, що A – лінійне перетворення, і записати його матрицю в базисі $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Розв'язання. За означенням

$$A(x+y)=\begin{pmatrix}(x_1+y_1)-2(x_2+y_2)\\0\\(x_3+y_3)+(x_1+y_1)\end{pmatrix}.$$

Легко бачити, що

$$A(x+y)=\begin{pmatrix}x_1-2x_2\\0\\x_3+x_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1-2y_2\\0\\y_3+y_1\end{pmatrix}=A(x)+A(y).$$

Аналогічно $A(\alpha x)=\begin{pmatrix}\alpha x_1-2\alpha x_2\\0\\\alpha x_3+\alpha x_1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}x_1-2x_2\\0\\x_3+x_1\end{pmatrix}=\alpha A(x),$

отже, A – лінійне перетворення $R^3\to R^3$. Щоб скласти його матрицю, подамо на вхід перетворювача A по черзі три базисні вектори:

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\to\boxed{A}\to\begin{pmatrix}1-2\cdot0\\0\\0+1\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\to\boxed{A}\to\begin{pmatrix}0-2\\0\\0+0\end{pmatrix},$$

$$e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\to\boxed{A}\to\begin{pmatrix}0-2\cdot0\\0\\1+0\end{pmatrix}.$$

Залишилось записати три одержаних стовпці у матрицю:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

Звернемо ще раз увагу читача на те, що добуток матриці A на матрицю-стовпець

$$\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-2x_2\\0\\x_1+x_3\end{pmatrix}$$

збігається з результатом дії лінійного перетворення на елемент $x\in R^3$.

Приклад 1.5.16. Нехай A – відображення $R^3\to R^2$, що діє за правилом

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\to\boxed{A}\to\begin{pmatrix}x_2\\x_1\end{pmatrix}.$$

Довести, що A – лінійне відображення, і записати його матрицю у стандартних базисах $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ та $f_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $f_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Розв'язання. За означенням

$$A(x+y)=\begin{pmatrix} x_2+y_2 \\ x_1+y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}=Ax+Ay,\ A(\alpha x)=\begin{pmatrix} \alpha x_2 \\ \alpha x_1 \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}=\alpha A(x),$$

отже, A – лінійне відображення.

Знайдемо образи елементів базису при відображенні A:

$$e_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Запишемо матрицю

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.5.17. Розглянемо множину векторів на площині, що починаються у точці (0;0). Нехай A – перетворення, що здійснює поворот кожного вектора на кут φ проти годинникової стрілки.

Записати матрицю перетворення A у стандартному базисі $\vec{i},\vec{j}$.

Розв'язання. Зобразимо результати дії перетворення A на базисні вектори $\vec{i},\vec{j}$ (рис. 1.5.4).

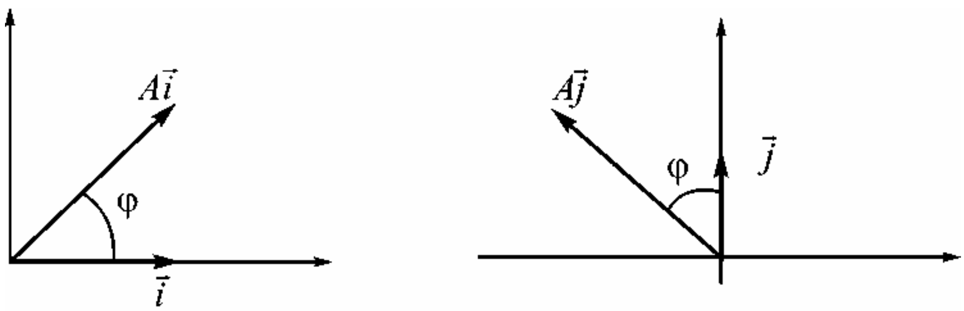


Рис. 1.5.4

Оскільки при повороті довжина векторів не змінюється, вектор $A\vec{i}$ має координати $(\cos\varphi;\sin\varphi)$, а вектор $A\vec{j}-(-\sin\varphi;\cos\varphi)$. Отже, матриця $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ називається матрицею повороту. Вона має деякі цікаві властивості. Наприклад, лінійне перетворення із оберненою матрицею здійснює поворот на кут φ вже за годинниковою стрілкою. Дійсно,

$$\mathrm{A}^{-1}=\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},\ \mathrm{A}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix},$$

тобто вектор $\vec{i}$ повернувся за годинниковою стрілкою. Перетворення із матрицею A^2 здійснює поворот на подвійний кут 2φ:

$$\mathrm{A}^2=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos^2\varphi-\sin^2\varphi & -2\sin\varphi\cos\varphi\\ 2\sin\varphi\cos\varphi & \cos^2\varphi-\sin^2\varphi\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\cos 2\varphi & -\sin 2\varphi\\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi\end{pmatrix}.$$

Взагалі дія A^n приводить до повороту на кут $n\varphi$.

Приклад 1.5.18. Очевидно, що за властивостями похідної операція $\frac{d}{dx}:\ f(x)\xrightarrow{D} f'(x)$ є лінійним перетворенням лінійного простору функцій, нескінченно диференційовних на інтервалі (a,b). Розглянемо підпростір P_n багаточленів степеня, не вищого за n. Записати матрицю $D:\ P_n\to P_n$ у базисах:

1) $1,\ x,\ x^2,\ldots,\ x^n$;
2) $1,\ x-1,\ (x-1)^2,\ldots,\ (x-1)^n$;
3) $1,\frac{x}{1!},\frac{x^2}{2!},\ldots,\frac{x^n}{n!}$.

Розв'язання.

1. Знайдемо образи елементів базису при перетворенні D:

$$D(1)=0,$$
$$D(x)=x'=1,$$
$$D(x^2)=2x,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$D(x^n)=nx^{n-1}.$$

Залишилося розкласти одержані багаточлени за базисом $1,\ x,\ldots,\ x^n$:

$$0=0\cdot 1+0\cdot x+\ldots+0\cdot x^n,$$
$$1=1\cdot 1+0\cdot x+\ldots+0\cdot x^n,$$
$$2x=0\cdot 1+2\cdot x+\ldots+0\cdot x^n,$$
$$3x^2=0\cdot 1+0\cdot x+3\cdot x^2+\ldots+0\cdot x^n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$nx^{n-1}=0\cdot 1+0\cdot x+\ldots+n\cdot x^{n-1}+0\cdot x^n.$$

Запишемо результати по стовпцях матриці:

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0\end{pmatrix}.$$

2. Оскільки $\left((x-1)^i\right)'=i(x-1)^{i-1}$, матриця матиме такий же вигляд, як і в п. 1.

3. Знайдемо похідні від багаточленів $1, x, ..., \frac{x^n}{n!}$:

$$1' = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + ... + 0 \cdot \frac{x^n}{n!},$$

$$x' = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + ... + 0 \cdot \frac{x^n}{n!},$$

$$\left(\frac{x^2}{2!}\right)' = x = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + ... + 0 \cdot \frac{x^n}{n!},$$

$$\left(\frac{x^3}{3!}\right)' = \frac{x^2}{2!} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot \frac{x^2}{2!} + ... + 0 \cdot \frac{x^n}{n!},$$

$$\left(\frac{x^n}{n!}\right)' = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot \frac{x^2}{2!} + ... + 1 \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + 0 \cdot \frac{x^n}{n!}.$$

Запишемо необхідні координати по стовпцях і одержимо матрицю

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.5.19. Записати матрицю відображення, що діє у просторі функцій вигляду $f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + ... + a_n \cos nx + b_n \sin nx$ (тригонометричних багаточленів) за правилом $f(x) \xrightarrow{D} f'(x)$. Базис – $\{1, \cos x, \sin x, ..., \cos nx, \sin nx\}$.

Розв'язання. За означенням

$$D(1) = 0,$$

$$D(\cos x) = -\sin x,$$

$$D(\sin x) = \cos x,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$D(\cos nx) = -n \sin nx = 0 \cdot 1 + 0 \cdot \cos x + 0 \cdot \sin x + ... + 0 \cdot \cos nx - n \cdot \sin nx,$$

$$D(\sin nx) = n \cdot \cos nx = 0 \cdot 1 + ... + n \cdot \cos nx + 0 \cdot \sin nx.$$

Запишемо матрицю із стовпців:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & ... & -n & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.5.20. Розглянемо лінійний простір L – множину матриць розміром 2×2. Нехай перетворення A діє за правилом

$$B \to \boxed{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 10 & -1 \end{pmatrix} B.$$

Записати матрицю A, якщо у просторі L вибрано базис

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Знайдемо, на що перетворяться матриці E_i при перетворенні A:

$$E_1 \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} = 1\cdot E_1 + 0\cdot E_2 + 10\cdot E_3 + 0\cdot E_4;$$

$$E_2 \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = 0\cdot E_1 + 1\cdot E_2 + 0\cdot E_3 + 10\cdot E_4;$$

$$E_3 \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2\cdot E_1 - 1\cdot E_3;$$

$$E_4 \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2\cdot E_2 - 1\cdot E_4.$$

Координати запишемо по стовпцях:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 10 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матриця A має розмір 4×4, оскільки простір L має розмірність 4.

Приклад 1.5.21. Нехай $C[a;b]$ – множина функцій, неперервних на відрізку $[a;b]$, а перетворення A діє за правилом

$$f(x) \to \boxed{A} \to \int_a^b f(x)dx.$$

Довести, що A – лінійне відображення.

Розв'язання. Дійсно, за властивостями визначеного інтервала

$$A(f+g) = \int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,$$

$$A(\alpha f) = \int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx.$$

Таке лінійне відображення, що діє над елементами функціональних просторів і ставить у відповідність функції число, має назву *"лінійний функціонал"*.

Якщо розглянутий лінійний функціонал діє у просторі $L = P_n$ багаточленів степеня, не вищого за n, то можна записати у базисі $1, x, x^2, ..., x^n$ його матрицю. Як завжди, знаходимо, на що перетворюються елементи базису при відображенні A:

$$1 \to \int_a^b 1dx = b - a;\; x \to \int_a^b xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b = \frac{1}{2}(b^2 - a^2),$$

а у загальному випадку

$$x^n \to \int_a^b x^n dx = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_a^b = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n-1}).$$

Оскільки перетворення A діє із простору P_n (розмірність $n+1$) у простір R^1 (розмірність 1), то його матриця A має розмір $1 \times (n+1)$, тобто

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} b-a & \dfrac{b^2-a^2}{2} \; ... \; \dfrac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1} \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.5.22. При лінійному перетворенні $A\colon\ R^2 \to R^2$ вектор $-\vec{i} + \vec{j}$ перетворюється на вектор $\vec{i} + \vec{j}$, а $2\vec{i} + 3\vec{j}$ – на $8\vec{i} + 18\vec{j}$. Записати матрицю перетворення у базисі $\vec{i}, \vec{j}$.

Розв'язання. У матричному вигляді

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

де $(x_1; x_2)$ – координати входу, а $(y_1; y_2)$ – виходу. За умовою маємо

$$\begin{matrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 18 \end{pmatrix}, \end{matrix} \quad \text{або} \quad \begin{cases} -a_{11} + a_{12} = 1, \\ -a_{21} + a_{22} = 1, \\ 2a_{11} + 3a_{12} = 8, \\ 2a_{21} + 3a_{22} = 18. \end{cases}$$

Легко переконатися в тому, що система має єдиний розв'язок, а саме:

$$a_{11} = 1,\ a_{12} = 2,\ a_{21} = 3,\ a_{22} = 4,$$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.5.3. Змінення матриці лінійного відображення при заміні базису

Розглянемо лінійне відображення $A\colon\ L \to L_1$. Якщо в лінійних просторах L та L_1 відповідно вибрано базиси $e_1, ..., e_n$ та $f_1, ..., f_m$, то відображенню відповідає його матриця

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Нехай у просторах L та L_1 вибрано інші базиси – $e_1', ..., e_n'$ та $f_1', ..., f_m'$. Відомо, що базиси $e_1, ..., e_n$ та $e_1', ..., e_n'$ зв'язані матрицею переходу H, яку було розглянуто у підрозд. 1.5.1. Аналогічно базиси $f_1, ..., f_m$ та $f_1', ..., f_m'$ у просторі L_1 зв'язані матрицею переходу G. Нагадаємо, що $Det\, H \neq 0$, $Det\, G \neq 0$.

Лінійне відображення A має у базисах $e_1', ..., e_n'$ та $f_1', ..., f_m'$ матрицю $\mathrm{A}' = G^{-1}\mathrm{A}H$, де G^{-1} – обернена матриця.

Важливим випадком цієї формули є такий, коли A – лінійне перетворення $A\colon L \to L$.

Якщо $e_1, ..., e_n$ та $e_1', ..., e_n'$ – базиси у просторі L, зв'язані матрицею переходу H, то матриця A' лінійного перетворення у базисі $e_1', ..., e_n'$ має вигляд $\mathrm{A}' = H^{-1}\mathrm{A}H$.

Приклад 1.5.23. Матриця лінійного перетворення $A\colon R^2 \to R^2$ дорівнює $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ у базисі $\vec{i}, \vec{j}$. Знайти матрицю A' перетворення A у базисі f_1, f_2, одержаному із базису $\vec{i}, \vec{j}$ поворотом на кут 45° проти годинникової стрілки (рис. 1.5.5).

Розв'язання. Відомо, що $\mathrm{A}' = H^{-1}\mathrm{A}H$, де H – матриця переходу від базису $\vec{i}, \vec{j}$ до базису $\vec{f}_1, \vec{f}_2$.

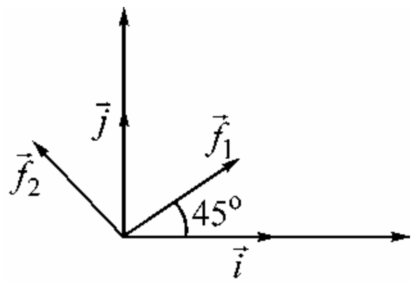


Рис. 1.5.5

Знайдемо H. Для цього необхідно знайти координати векторів $\vec{f}_1$ та $\vec{f}_2$ і записати їх по стовпцях. Зрозуміло, що

$$\vec{f}_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \vec{f}_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \text{ отже, } H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Знайдемо обернену матрицю H^{-1} довільним методом. Легко бачити, що

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Для запису матриці лінійного перетворення A у базисі $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ виконуємо такі дії:

$$\mathrm{A}' = H^{-1}\mathrm{A}H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.5.24. Нехай D – операція знаходження похідної у лінійному просторі P_2 поліномів степеня, не вищого за 2. Знайти матрицю перетворення D у базисі $e_1' = 1 + x$, $e_2' = x + 2x^2$, $e_3' = 3x^2 - 1$.

Розв'язання. У базисі 1, x, x^2 матриця D має вигляд

$$D=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Знайдемо H – матрицю переходу від базису 1, x, x^2 до базису e_1', e_2', e_3':

$$e_1'=1\cdot 1+1\cdot x+0\cdot x^2,\ e_2'=0\cdot 1+1\cdot x+2\cdot x^2,\ e_3'=-1\cdot 1+0\cdot x+3\cdot x^2,$$

отже,

$$H=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&0\\0&2&3\end{pmatrix}.$$

Знайдемо будь-яким способом H^{-1}:

$$H^{-1}=\begin{pmatrix}3&-2&1\\-3&3&-1\\2&-2&1\end{pmatrix},$$

тоді

$$\Delta'=H^{-1}DH=\begin{pmatrix}3&-2&1\\-3&3&-1\\2&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&0\\0&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-5&-12\\-3&9&18\\2&-6&-12\end{pmatrix}.$$

Приклад 1.5.25. Як зміниться матриця лінійного перетворення $A:\ L\to L_1$, якщо в базисі поміняти місцями два елементи?

Розв'язання. Розглянемо випадок, коли простір L має розмірність 3, а матриця в базисі e_1, e_2, e_3 має вигляд

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}.$$

Перейдемо до базису e_1, e_2, e_3. Матрицею переходу буде

$$H=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Легко переконатися в тому, що $H^{-1}=H$, отже, в базисі e_1, e_2, e_3 матриця лінійного перетворення матиме вигляд

$$\mathrm{A}'=H^{-1}\mathrm{A}H=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{22}&a_{21}&a_{23}\\a_{12}&a_{11}&a_{13}\\a_{32}&a_{31}&a_{33}\end{pmatrix}.$$

Таким чином, місцями помінялись два рядки та два стовпці.

1.5.4. Власні вектори. Матриця лінійного оператора в базисі з власних векторів

Якщо A – лінійний оператор у дійсному векторному просторі L, то вектор $\vec{x} \neq 0$, який задовольняє співвідношенню $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, де λ – скаляр, називається власним вектором оператора A, а число λ – власним значенням оператора, яке відповідає власному вектору $\vec{x}$.

Для знаходження власного вектора $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, який відповідає власному значенню λ, треба розв'язати таку систему лінійних рівнянь:

$$(\mathrm{A} - \lambda E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Це рівняння має ненульовий розв'язок, якщо $Det(\mathrm{A} - \lambda E) = 0$. Рівняння $Det(\mathrm{A} - \lambda E) = 0$ відносно невідомого λ називається характеристичним рівнянням оператора A. Власними значеннями оператора A є дійсні корені характеристичного рівняння. Розгорнутий вигляд характеристичного рівняння:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

або (якщо розкрити визначник)

$$(-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} A_1 \lambda^{n-1} + (-1)^{n-2} A_2 \lambda^{n-2} + ... + (-1) A_{n-1} \lambda + A_n = 0,$$

де A_1 – сума діагональних елементів матриці A (слід матриці), A_2 – сума всіх діагональних мінорів другого порядку; A_n – визначник матриці A. Враховуючи теорему Вієта, маємо: сума коренів характеристичного рівняння дорівнює її сліду. Характеристичний багаточлен не залежить від вибору базису.

Якщо лінійний оператор A в n-вимірному просторі L має n попарно різних власних значень, то власні вектори, що відповідають цим значенням, лінійно незалежні і утворюють "власний базис" у просторі L. Матриця A оператора A у цьому базисі має діагональний вигляд:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix},$$

причому діагональними елементами будуть саме ці власні значення. Нагадаємо, що матриця лінійного оператора в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ – це матриця, стовпці якої – координати векторів $A\vec{e}_1, A\vec{e}_2, ..., A\vec{e}_n$ у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$. А якщо $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ – власні, то

$A\vec{e}_1 = \lambda_1 e_1 = (\lambda_1, 0, ..., 0)$; $A\vec{e}_2 = \lambda_2 e_2 = (0, \lambda_2, 0, ..., 0)$;...; $A\vec{e}_n = \lambda_n e_n = (0, 0, ..., \lambda_n)$.

Наявність у лінійного оператора, заданого в n-вимірному просторі, n різних власних чисел є достатньою, але не необхідною умовою зведення матриці до діагонального вигляду.

Приклад 1.5.26. Довести, що якщо $\vec{x}$ – власний вектор лінійного оператора A, який відповідає власному значенню λ, то $\alpha\vec{x}$ – теж власний вектор оператора A, який відповідає тому ж самому значенню λ ($\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$).

Розв'язання. Треба довести, що $A(\alpha\vec{x}) = \lambda(\alpha\vec{x})$, якщо $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Скористаємося лінійністю оператора A: $A(\alpha\vec{x}) = \alpha A\vec{x} = \alpha\lambda\vec{x} = \lambda(\alpha\vec{x})$.

Приклад 1.5.27. Довести, що якщо власному значенню λ лінійного оператора A відповідає k лінійно незалежних власних векторів $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_k$, то кожний вектор $\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + ... + \alpha_k\vec{x}_k$ – це власний вектор оператора A, який відповідає тому ж значенню λ (α_1, $\alpha_2, \ldots$, $\alpha_k \in R$).

Розв'язання. За означенням лінійного оператора

$$A(\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + ... + \alpha_k\vec{x}_k) = \alpha_1 A\vec{x}_1 + \alpha_2 A\vec{x}_2 + ... + \alpha_k A\vec{x}_k =$$
$$= \alpha_1\lambda\vec{x}_1 + \alpha_2\lambda\vec{x}_2 + ... + \alpha_k\lambda\vec{x}_k = \lambda(\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + ... + \alpha_k\vec{x}_k),$$

тобто $A(\alpha_1\vec{x}_1 + ... + \alpha_k\vec{x}_k) = \lambda(\alpha_1\vec{x}_1 + ... + \alpha_k\vec{x}_k)$, а це й означає, що $\alpha_1\vec{x}_1 + ... + \alpha_k\vec{x}_k$ – власний вектор оператора A, який відповідає власному значенню λ. Підпростір L_λ простору L, який породжується власними векторами $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_k$ оператора A, що відповідають одному і тому ж значенню λ, називається власним підпростором оператора A, який відповідає власному значенню λ.

Приклад 1.5.28. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора A у лінійному просторі L, якщо матриця А цього оператора в деякому базисі має вигляд:

1) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, L – дійсний лінійний простір;

2) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, L – комплексний лінійний простір;

3) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & -3 \\ 7 & 1 & -6 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

1. Оскільки $\mathrm{A} - \lambda E = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 8 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$, то характеристичне рівняння має вигляд $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 8 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$, або $(3-\lambda)^2 - 16 = 0$. Корені цього рівняння: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 7$.

Для знаходження власного вектора $\vec{x}$, який відповідає власному значенню λ, треба розв’язати таку систему лінійних рівнянь:

$$(A-\lambda E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для $\lambda_1=-1$ та $\lambda_2=7$ відповідно маємо системи

$$\begin{cases} 4x_1+8x_2=0, \\ 2x_1+4x_2=0, \end{cases} \quad \begin{cases} -4x_1+8x_2=0, \\ 2x_1-4x_2=0. \end{cases}$$

Розв'язками цих систем є $\vec{x}^1=c_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}^2=c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, де c_1 і c_2 – довільні дійсні числа (відмінні від нуля).

2. Розв'яжемо характеристичне рівняння $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0$,

$$(1-\lambda)^2+4=0,\ (1-\lambda)^2=-4,\ 1-\lambda=\pm 2i.$$

Тоді $\lambda_1=1+2i$, $\lambda_1=1-2i$ – власні значення лінійного оператора (нагадаємо, що простір L – комплексний).

Для $\lambda_1=1+2i$ і $\lambda_1=1-2i$ маємо системи (або рівняння) для знаходження власних векторів

$$\begin{cases} -2ix_1+2x_2=0, \\ -2x_1-2ix_2=0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2ix_1+2x_2=0, \\ -2x_1+2ix_2=0. \end{cases}$$

Розв'язки (тобто власні вектори) цих систем такі: $c_1\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ та $c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$, де c_1 і c_2 – довільні відмінні від нуля числа.

3. Складемо та розв'яжемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 1 & -5 \\ 3 & 2-\lambda & -3 \\ 7 & 1 & -6-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Розкриваючи визначник, одержуємо рівняння $-\lambda^3+2\lambda^2+\lambda-2=0$ (зверніть увагу на те, що коефіцієнт при λ^2 дорівнює сліду матриці $6+2-6=2$, а визначник матриці A дорівнює -2, як і вільний член рівняння). Розв'язки цього рівняння: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=-1$ (сума коренів збігається зі слідом матриці).

Знайдемо координати власних векторів, підставляючи в систему

$$\begin{cases} (6-\lambda)x_1+x_2-5x_3=0, \\ 3x_1+(2-\lambda)x_2-3x_3=0, \\ 7x_1+x_2-(6+\lambda)x_3=0 \end{cases}$$

послідовно власні значення $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=-1$:

$$\begin{cases} 5x_1+x_2-5x_3=0, \\ 3x_1+x_2-3x_3=0, \\ 7x_1+x_2-7x_3=0, \end{cases} \quad \begin{cases} 4x_1+x_2-5x_3=0, \\ 3x_1-3x_3=0, \\ 7x_1+x_2-8x_3=0, \end{cases} \quad \begin{cases} 7x_1+x_2-5x_3=0, \\ 3x_1+3x_2-3x_3=0, \\ 7x_1+x_2-5x_3=0. \end{cases}$$

Нагадаємо, що визначники цих систем дорівнюють нулю. Одне з рівнянь можна одержати з двох інших, тобто для знаходження власних векторів треба розв’язати системи двох рівнянь з трьома невідомими. Розв’язавши ці системи, одержимо власні вектори

$$\vec{x}^1 = c_1\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}',\ \ \vec{x}^2 = c_2\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}',\ \ \vec{x}^3 = c_3\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\end{pmatrix}'.$$

Приклад 1.5.29. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора A, який є оператором диференціювання багаточленів, степінь яких менший за n або дорівнює йому, з дійсними коефіцієнтами.

Розв'язання. Матрицю такого оператора в базисі 1, t, t^2, …, t^n побудовано в прикладі 1.5.16. Вона має вигляд

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді характеристичне рівняння можна записати так:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

У лівій частині рівняння детермінант верхньої діагональної матриці – $(n+1)$-го порядку, тому він дорівнює $(-\lambda)^{n+1}$, а характеристичне рівняння має вигляд $(-1)^{n+1}\lambda^{n+1} = 0$.

Усі власні значення дорівнюють нулю (дійсно, ніякий багаточлен не може після диференціювання дорівнювати самому собі, помноженому на число, відмінне від нуля). Знайдемо власні вектори (багаточлени), які відповідають значенню $\lambda = 0$. Система для знаходження власного вектора, який відповідає значенню $\lambda = 0$, така:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \ldots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Розв’язок цієї системи: $x_2 = x_3 = ... = x_{n+1} = 0$, x_1 – довільне. Нагадаємо, що $(x_1, x_2, ..., x_{n+1})$ – координати вектора в базисі $1, t, t^2, ..., t^n$, тобто власний вектор оператора диференціювання – це константа (не розв’язуючи системи можна здогадатися, що такий вектор один і це – константа: похідна від константи 0, що дорівнює константі, помноженій на $\lambda = 0$).

Приклад 1.5.30. Звести матрицю $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ лінійного оператора A, заданого у дійсному векторному просторі L, до діагонального вигляду. Знайти базис, в якому вона має такий вигляд.

Розв'язання. Знайдемо власні значення матриці, щоб з’ясувати питання, чи можна матрицю A звести до діагонального вигляду в результаті переходу до нового базису.

Розв’яжемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Оператор має три різних власних значення: $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 2$; $\lambda_3 = -1$. А це означає, що матриця A має діагональний вигляд

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

у базисі з власних векторів.

Знайдемо цей базис, тобто власні вектори, що відповідають значенням $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 2$; $\lambda_3 = -1$:

$$c_1\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}'; \quad c_2\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}'; \quad c_3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}'$$

(c_1, c_2, c_3 – довільні сталі, відмінні від нуля).

1.6. ПРОСТІР ЗІ СКАЛЯРНИМ ДОБУТКОМ

1.6.1. Скалярний добуток у лінійному просторі. Норма. Ортогональність

Розглянемо лінійний простір L, в якому існують операції додавання елементів і множення будь-якого елемента на число $\alpha \in R$ (випадок $\alpha \in C$ розглянемо окремо).

Нехай будь-якій парі елементів $x, y \in L$ відповідає число, що позначається (x, y), $(x, y) \in R$, і виконуються такі умови:

1) $(x, y) = (y, x)$;
2) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
3) $(\alpha x, y) = \alpha (x, y)$;

4) $(x,x)>0$ для $x\neq 0$.

Операція (x, y), що задовольняє такі чотири умови, називається операцією *скалярного добутку*.

Лінійний простір з операцією скалярного добутку має назву "*евклідів простір*" (як правило, евклідовими називають простори, що мають скінченну розмірність).

Число $\sqrt{(x,x)}$ називається *нормою* (або довжиною) елемента $x\in L$ і позначається $|x|$ або $\|x\|$, отже,

$$|x|=\|x\|=\sqrt{(x,x)}\ .$$

У будь-якому евклідовому просторі виконується нерівність

$$(x,y)^2\le(x,x)(y,y),$$

що має назву "нерівність Коші – Буняковського". Нерівність дає можливість коректно визначити кут між елементами x та y, якщо $x\neq 0$ та $y\neq 0$:

$$\cos\varphi=\frac{(x,y)}{|x|\cdot|y|}.$$

Має місце так звана нерівність трикутника:

$$|x+y|\le|x|+|y|.$$

Елементи x та y називаються ортогональними (або перпендикулярними), якщо $(x,y)=0$ (їх скалярний добуток дорівнює нулю).

Якщо елементи простору L можна множити на комплексні числа, то операція скалярного добутку відрізняється від тієї, означення якої наведено вище, насамперед тим, що (x,y) – комплексне число. Властивості цієї операції:

1) $(x,y)=\overline{(y,x)}$ – комплексно спряжене;
2) $(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$;
3) $(x+y,\ z)=(x,z)+(y,z)$;
4) $(x,x)\in R$, $(x,x)\ge 0$.

Простір L називають унітарним простором.

Приклад 1.6.1. Звичайна множина векторів простору з операцією скалярного добутку векторів є евклідовим простором (усі умови виконуються).

Приклад 1.6.2. Розглянемо R^n – множину стовпців висотою n:

$$R^n=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\ \dots\\ x_n\end{pmatrix}, x_i\in R\right\}.$$

Якщо $x=\begin{pmatrix}x_1\\ \dots\\ x_n\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}y_1\\ \dots\\ y_n\end{pmatrix}$, то нехай $(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n$, або у матричному вигляді $(x,y)=x^Ty$, де x^T – матриця-рядок, y – матриця-стовпець.

Очевидно, що виконуються чотири умови скалярного добутку. Нормою елемента x буде

$$|x| = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\,.$$

Нерівність Коші – Буняковського має вигляд

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots x_n y_n)^2 \le (x_1^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + \ldots + y_n^2).$$

Кут між елементами x та y знаходимо за формулою

$$\cos\varphi = \frac{x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n}{\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}}$$

(зрозуміло, що $|\cos\varphi| \le 1$, оскільки виконується нерівність Коші – Буняковського).

Для прикладу знайдемо норми елементів x та y і кут між ними у просторі R^4, якщо $x = (1 \quad -1 \quad 1 \quad -1)'$, $y = (-1 \quad 1 \quad -1 \quad 1)'$:

$$\|x\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2\,;\ \|y\| = 2\,;$$

$$(x, y) = 1(-1) + (-1)\cdot 1 + 1(-1) + (-1)\cdot 1 = -4\,;\ \cos\varphi = \frac{-4}{2\cdot 2} = -1 \Rightarrow \varphi = \pi\,.$$

Приклад 1.6.3. Довести нерівність $(x, y)^2 \le (x, x)(y, y)$.

Розв'язання. За четвертою властивістю скалярного добутку $(tx + y, tx + y) \ge 0$ для будь-яких $x, y \in L$ та будь-якого $t \in R$. Перетворимо ліву частину нерівності, користуючись властивостями 1, 2 та 3 скалярного добутку:

$$(tx + y, tx + y) = (tx, tx + y) + (y, tx + y) = (tx, tx) + (tx, y) + (y, tx) + (y, y) =$$
$$= t^2(x, x) + t(x, y) + t(y, x) + (y, y) = t^2(x, x) + 2t(x, y) + (y, y) \ge 0\,.$$

Із шкільного курсу математики відомо, що $at^2 + bt + c \ge 0$ при будь-якому t лише в тому випадку, коли дискримінант цього виразу $D \le 0$, тобто $b^2 - 4ac \le 0$. Маємо $b = 2(x, y)$, $a = (x, x)$, $c = (y, y)$, отже, $4(x, y)^2 - 4(x, x)(y, y) \le 0$, а це й треба було довести.

Висновок. Доведемо так звану нерівність трикутника: $|x + y| \le |x| + |y|$. Дійсно,

$$(x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) = |x|^2 + 2(x, y) + |y|^2 \le |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2,$$

що й треба було довести.

Приклад 1.6.4. У просторі $C[a, b]$ функцій, неперервних на відрізку $[a, b]$, розглянемо операцію $(f, g) = \int\limits_a^b f(x) g(x) dx$.

Доведемо, що виконуються властивості скалярного добутку. Дійсно:

1) $(g, f) = \int\limits_a^b g(x) f(x) dx = (f, g)$;

2) $(f+g,h)=\int\limits_a^b (f(x)+g(x))h(x)dx=(f,h)+(g,h)$;

3) $(\alpha f,g)=\alpha(f,g)$;

4) $(f,f)=\int\limits_a^b f^2(x)dx \ge 0$.

Нормою елемента у просторі $C[a,b]$ є $\|f\|=\sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)dx}$, а нерівність Коші – Буняковського має вигляд $\left(\int\limits_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int\limits_a^b f^2(x)dx\int\limits_a^b g^2(x)dx$.

Приклад 1.6.5. Знайти кут між функціями $f(x)=\cos mx$, $g(x)=\cos nx$ у просторі $C[-\pi,\pi]$ (m, n – натуральні числа).

Розв'язання. Знайдемо (f,g) за означенням $(m\ne n)$:

$$(f,g)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\cos nxdx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\cos(m+n)x+\cos(m-n)x)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(m+n)x}{m+n}+\frac{\sin(m+n)x}{m-n}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=0.$$

Отже, у випадку $m\ne n$ функції cosmx і cosnx ортогональні у просторі $C[-\pi,\pi]$, а у випадку $m=n$, тобто $f=g$, маємо $\cos\varphi=\dfrac{(f,f)}{|f||f|}=1\Rightarrow\varphi=0$.

Приклад 1.6.6. Розглянемо у множині стовпців висотою 2 дві операції: $F(x,y)=2x_1y_1+5x_2y_2$; $G(x,y)=x_1y_2+x_2y_1$, де $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$. Перевірити, чи будуть F та G операціями скалярного добутку.

Розв'язання. Операція $F(x,y)=2x_1y_1+5x_2y_2$ задовольнятиме чотири умови:

а) $F(y,x)=2x_1y_1+5x_2y_2=F(x,y)$;

б) $F(x+y,z)=2(x_1+y_1)z_1+5(x_2+y_2)z_2=2x_1z_1+5x_2z_2+2y_1z_1+$
$+5y_2z_2=F(x,z)+F(y,z)$;

в) $F(\alpha x,y)=\alpha F(x,y)$;

г) $F(x,x)=2x_1x_1+5x_2x_2=2x_1^2+5x_2^2>0$ для $x\ne 0$.

Операція $G(x,y)=x_1y_2+x_2y_1$ не буде скалярним добутком, тому що не виконується умова $G(x,y)\ge 0$:

$$G(x,x)=x_1x_2+x_2x_1=2x_1x_2.$$

Цей вираз може бути від'ємним, наприклад, для $x=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.

1.6.2. Ортогональні системи елементів. Ортогональний базис. Ортогоналізація. Скалярний добуток елементів, розкладених за базисом. Матриця Грама

Система елементів $e_1,...,e_m$ евклідова простору називається *ортогональною*, якщо для будь-яких i, j, $i \neq j$ $(e_i, e_j) = 0$.

Система називається *ортонормованою,* якщо $(e_i, e_j) = 0$, $i \neq j$, $(e_i, e_i) = 1$.

Ортонормована система завжди лінійно незалежна.

У будь-якому n-вимірному евклідовому просторі існує ортонормований базис $e_1,...,e_n$.

Ортонормований базис можна побудувати із довільного базису $f_1,...,f_n$ за допомогою так званого *процесу ортогоналізації*:

1) вектор $e_1 = \dfrac{f_1}{|f_1|}$;

2) вектор e_2' знайдемо із умови $(e_2', e_1) = 0$ у вигляді $e_2' = f_2 - \alpha e_1$ (число α знаходимо так, щоб вектор e_2' був ортогональним e_1, тобто $(f_2 - \alpha e_1, e_1) = 0$), потім пронормуємо $e_2 = \dfrac{e'_2}{|e'_2|}$, таким чином, система $e_1,$ e_1 – ортонормована;

3) вектор e_3' знайдемо у вигляді $e_3' = f_3 - \beta e_1 - \gamma e_2$ так, щоб $(e_3', e_1) = (e_3', e_2) = 0$, тобто числа β, γ можна визначити з умов ортогональності; потім $e_3 = \dfrac{e'_3}{|e_3|}$ і т.д.

Якщо $e_1,...,e_n$ – ортонормований базис простору L, а елементи $x, y \in L$ розкладені за цим базисом, тобто

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n,\ y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + ... + y_n e_n,$$

то їх скалярний добуток дорівнює

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

Якщо $e_1,...,e_n$ – довільний базис, то формула скалярного добутку має більш складний вигляд:

$$(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j (e_i, e_j),$$

або у матричному вигляді $(x, y) = x^T \Gamma y$, де x^T – матриця-рядок, y – матриця-стовпець.

Матриця Γ називається матрицею Грама базису $e_1,...,e_n$:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & ... & (e_1, e_n) \\ ... & ... & ... \\ (e_n, e_1) & ... & (e_n, e_n) \end{pmatrix}.$$

Ця матриця – симетрична $\left(\Gamma^T = \Gamma\right)$, а у випадку ортонормованого базису – одинична.

Приклад 1.6.7. Довести, що будь-яка ортонормована система $f_1,...,f_m$ елементів евклідова простору завжди лінійно незалежна.

Розв'язання. Складемо лінійну комбінацію $f_1,...,f_m$ і визначимо, у якому випадку вона дорівнює 0:

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + ... + \lambda_m f_m = 0 .$$

Помножимо скалярно обидві частини рівняння на f_1:

$$\lambda_1 (f_1, f_1) + \lambda_2 (f_1, f_2) + ... + \lambda_m (f_1, f_m) = 0 .$$

Оскільки $(f_1, f_i) = 0$ при $i \neq 1$, а $(f_1, f_1) = 1$, то маємо $\lambda_1 = 0$. Аналогічно $\lambda_2 = ... = \lambda_m = 0$. Отже, якщо лінійна комбінація $f_1,...,f_m$ дорівнює 0, то вона тривіальна, а це означає лінійну незалежність.

Приклад 1.6.8. Довести, що якщо $f_1,...,f_m$ – ортогональна система елементів, то

$$|f_1 + ... + f_m|^2 = |f_1|^2 + ... + |f_m|^2$$

(узагальнення теореми Піфагора).

Розв'язання. За властивостями скалярного добутку і за визначенням норми

$$| f_1 + ... + f_m |^2 = (f_1 + ... + f_m, f_1 + ... + f_m) = (f_1, f_1) + (f_1, f_2) + ... + (f_1, f_m) +$$
$$+ (f_2, f_1) + ... + (f_m, f_m) = (f_1, f_1) + (f_2, f_2) + ... + (f_m, f_m) = | f_1 |^2 + ... + | f_m |^2$$

(добутки $(f_i, f_j) = 0$ внаслідок ортогональності).

Приклад 1.6.9. У просторі R^n зі стандартним скалярним добутком $(x, y) = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$ прикладом ортонормованого базису є

$$e_1 = (1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0)', \; e_2 = (0 \quad 1 \quad \cdots \quad 0)', ..., e_n = (0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1)' .$$

Але це – не єдиний приклад ортонормованого базису у просторі R^n. Розглянемо інші випадки.

1. Простір R^2. Він має простий геометричний зміст, його можна подати як множину звичайних геометричних векторів на площині, а ортонормованим базисом є пара векторів $\vec{i}, \vec{j}$.

Інший приклад – два вектори

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}', \; \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}' .$$

Очевидно, що $(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 0$ (розглядаємо звичайний скалярний добуток), $(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 1$.

Прикладом ортонормованого базису буде пара

$$f_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix},$$

де φ – будь-який кут.

Зрозуміло, що
$(f_1, f_2) = \cos\varphi \cdot (-\sin\varphi) + \sin\varphi \cdot \cos\varphi = 0, (f_1, f_1) = (f_2, f_2) = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.$

Зауважимо, що f_1, f_2 одержано поворотом $\vec{i}, \vec{j}$ на кут φ.

2. Простір R^3. Розглянемо стовпці

$$e_1 = (2/3 \quad 2/3 \quad 1/3)', \; e_2 = (-2/3 \quad 1/3 \quad 2/3)', \; e_3 = (1/3 \quad -2/3 \quad 2/3)',$$

$(e_1, e_2) = 2/3(-2/3) + 2/3 \cdot 1/3 + 1/3 \cdot 2/3 = 0$, аналогічно $(e_1, e_3) = (e_2, e_3) = 0$. Далі $(e_1, e_1) = 2/3 \cdot 2/3 + 2/3 \cdot 2/3 + 1/3 \cdot 1/3 = 1$, аналогічно $(e_2, e_2) = (e_3, e_3) = 1$. Отже, e_1, e_2, e_3 – ортонормований базис у просторі R^3.

Приклад 1.6.10. У просторі R^3 зі стандартним скалярним добутком розглянуто вектори

$$e_1 = (1 \quad 2 \quad 2)', \; e_2 = (3 \quad -11 \quad -4)'.$$

Побудувати такий ортонормований базис f_1, f_2, f_3, щоб f_1 був паралельний e_1, а f_2 – розташований у площині векторів e_1, e_2 (процес ортогоналізації).

Розв'язання. Побудуємо ортогональну трійку e_1', e_2', e_3'. Нехай $e_1' = e_1$, а вектор e_2' відшукуємо у вигляді

$$\begin{cases} e'_2 = e_2 - \alpha e_1, \\ (e'_2, e_1) = 0, \end{cases} \text{ тобто } e'_2 = \begin{pmatrix} 3-\alpha \\ -11-2\alpha \\ -4-2\alpha \end{pmatrix}, \; (e'_2, e_1) = 0, \text{ або}$$

$$(3-\alpha)\cdot 1 + (-11-2\alpha)\cdot 2 + (-4-2\alpha)\cdot 2 = 0.$$

Знаходимо α: $-9\alpha - 27 = 0$, $\alpha = -3$. Отже, $e'_2 = (6 \quad -5 \quad 2)'$.

Тепер маємо два перпендикулярних вектори: e_1', e_2'. Побудуємо e_3' з умови $e'_3 \perp e'_1, e'_3 \perp e'_2$. Звичайно, можна шукати цей вектор, складаючи систему рівнянь відносно його координат, але доцільно згадати векторну алгебру, а саме векторний добуток:

$$e'_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 6 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 14\vec{i} + 10\vec{j} - 17\vec{k},$$

або у вигляді стовпця $e'_3 = (14 \quad 10 \quad -17)'$.

Побудовано трійку ортогональних один до одного векторів:

$$e'_1 = (1 \quad 2 \quad 2)', \quad e'_2 = (6 \quad -5 \quad 2)', \quad e'_3 = (14 \quad 10 \quad -17)'.$$

Щоб одержати ортонормовану систему, треба поділити кожний вектор на його довжину:

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \; f_2 = \begin{pmatrix} 6/\sqrt{65} \\ -5/\sqrt{65} \\ 2/\sqrt{65} \end{pmatrix}, \; f_3 = \begin{pmatrix} 14/\sqrt{585} \\ 10/\sqrt{585} \\ -17/\sqrt{585} \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.6.11. Маємо простір багаточленів степеня, не вищого за 3, зі скалярним добутком $(f,g)=\int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.

За допомогою процесу ортогоналізації побудувати із базису $\{1,x,x^2,x^3\}$ ортогональний базис.

Розв'язання. Скалярний добуток $(1,x)$ дорівнює нулю: $\int\limits_{-1}^{1} 1\cdot xdx=0$, тому функції 1 та x ортогональні відносно даного скалярного добутку. Шукаємо третій елемент базису $e_3=x^2-\alpha\cdot 1-\beta\cdot x$, для чого числа α та β знайдемо з умов ортогональності:

$$\begin{cases}\int\limits_{-1}^{1}(x^2-\alpha-\beta x)1dx=0,\\ \int\limits_{-1}^{1}(x^2-\alpha-\beta x)xdx=0,\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{2}{3}-2\alpha=0,\\ -\dfrac{2}{3}\beta=0\end{cases}$$

(доданки $\int\limits_{-1}^{1} xdx$ та $\int\limits_{-1}^{1} x^3dx$ дорівнюють 0), звідки $\alpha=\frac{1}{3},\quad \beta=0,\ \ e'_3=x^2-\frac{1}{3}$.

Залишається знайти e_4: $e_4=x^3-ax^2-bx-c$, де числа a, b, c також відшукуємо з умови ортогональності:

$$(e_4,1)=\int\limits_{-1}^{1}(x^3-ax^2-bx-c)dx=-\frac{2}{3}a-2c=0;$$

$$(e_4,x)=\int\limits_{-1}^{1}(x^3-ax^2-bx-c)xdx=\frac{2}{5}-\frac{2}{3}b=0;$$

$$(e_4,x^2-\frac{1}{3})=\int\limits_{-1}^{1}(x^3-ax^2-bx-c)(x^2-\frac{1}{3})=-\frac{2}{5}a-\frac{2}{3}c+\frac{2}{9}a+\frac{2}{3}c=0,$$

звідки $b=\frac{3}{5},\quad a=c=0$. Маємо ортогональну на відрізку [–1; 1] систему багаточленів: $1; x; x^2-\frac{1}{3}; x^3-\frac{3}{5}x$.

1.6.3. Спряжений та самоспряжений оператори

У прикладі 1.5.21 дано означення лінійного функціонала. Нагадаємо його. Нехай L – n-вимірний евклідів простір. Якщо лінійний оператор у просторі L кожному вектору $\vec{x}\in L$ ставить у відповідність дійсне число, то він називається лінійним функціоналом. Таким чином, якщо L – лінійний простір, то $\forall\vec{x}\in L,\ f(\vec{x})\in R$ та $\forall\vec{x},\vec{y}\in L$ і виконуються умови:

1) $f(\vec{x}+\vec{y})=f(\vec{x})+f(\vec{y})$;

2) $f(\alpha\vec{x})=\alpha f(\vec{x})$, $\alpha\in R$.

Якщо зафіксувати в просторі L базис $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$, то вектору $\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+...+x_n\vec{e}_n$ відповідатиме число $f(\vec{x})$:

$$f(\vec{x}) = f(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + x_n\vec{e}_n) = x_1 f(\vec{e}_1) + ... + x_n f(\vec{e}_n) = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n,$$

де $\alpha_i = f(\vec{e}_i),\ \ i = 1,...,n.$.

Якщо базис ортонормований, то $\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n = (\vec{x}, \vec{\alpha})$, де $\vec{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, тобто лінійний функціонал можна задати у вигляді скалярного добутку.

Легко довести, що при фіксованому векторі $\vec{y}$ скалярний добуток $(A\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{x})$ є лінійним функціоналом відносно вектора $\vec{x}$ (A – лінійний оператор).

Означення. Оператор A^*, що діє в евклідовому просторі L, називається спряженим з лінійним оператором A, якщо виконується рівність

$$(A\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, A^*\vec{y}),\ \forall \vec{x}, \vec{y} \in L.$$

Неважко довести, що A^* – лінійний оператор, який має властивості:

1) $E^* = E$;

2) $(A + B)^* = A^* + B^*$;

3) $(\alpha A)^* = \alpha A^*$;

4) $(A^*)^* = A$;

5) $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$;

6) $(AB)^* = B^* A^*$.

Нагадаємо, що A^{-1} – оператор, обернений до оператора A. Лінійний оператор A^{-1} у просторі L називають оберненим до лінійного оператора A, якщо $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, де E – одиничний оператор. Якщо оператору A в ортонормованому базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ відповідає матриця A, то спряженому оператору A^* відповідає транспонована матриця A^T. Звідси маємо висновок: характеристичні багаточлени A і A^* однакові, отже, і спектри їх (множина розв′язків характеристичного рівняння) збігаються.

Означення. Лінійний оператор A, що діє в евклідовому просторі L, називається самоспряженим, якщо він збігається зі своїм спряженим оператором, тобто якщо $(A\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, A\vec{y})$.

Самоспряжені оператори в евклідовому просторі називають симетричними, а в унітарному – ермітовими.

Теорема 1.6.1. Кожний симетричний оператор у n-вимірному евклідовому просторі в будь-якому ортонормованому базисі задається симетричною матрицею. Навпаки, якщо лінійний оператор в евклідовому просторі в деякому ортонормованому базисі задається симетричною матрицею, то цей оператор симетричний.

Теорема 1.6.2. Усі характеристичні корені симетричного оператора дійсні.

Теорема 1.6.3. Лінійний оператор A в евклідовому просторі L є симетричним тоді і тільки тоді, коли в просторі L існує ортонормований базис, складений із власних векторів цього оператора.

З цієї теореми маємо висновок: *кожна симетрична матриця з дійсними елементами зводиться до діагонального вигляду.*

При розв'язуванні задач часто необхідно знайти не лише діагональну матрицю, що задає самоспряжений оператор A, а й ортонормований базис, що складається з власних векторів оператора A.

Для побудови цього базису важливі два твердження:

1. Власні вектори самоспряженого оператора, які відповідають різним власним значенням, ортогональні між собою.

2. Якщо характеристичний корінь λ_0 самоспряженого оператора A має кратність m, то $rg(\mathrm{A}-\lambda E)=n-m$ і кореню λ_0 відповідає m і тільки m лінійно незалежних власних векторів оператора A.

Для побудови ортонормованого базису, що складається з власних векторів самоспряженого оператора A, знайдемо корені характеристичного багаточлена $f(\lambda)=|\mathrm{A}-\lambda E|$. Всі вони дійсні, але можуть бути кратними. Припустимо, що характеристичний багаточлен має l різних коренів $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_l$ з кратностями $m_1,m_2,\ldots,m_l$. Кореню λ_1 відповідає m_1 лінійно незалежних векторів $\vec{e}_1,...,\vec{e}_{m_1}$. Після ортогоналізації цієї системи векторів будемо мати m_1 ортонормованих векторів $\vec{e}'_1,...,\vec{e}'_{m_1}$. Ці вектори є власними векторами оператора A, що відповідають характеристичному кореню λ_1. Аналогічно побудуємо ортонормовану систему векторів $\vec{e}'_{m_1+1},\vec{e}'_{m_1+2},...,\vec{e}_{m_1+m_2}$. Всі вектори цієї системи – власні вектори оператора A, що відповідають власному значенню λ_2. Кожний із цих векторів ортогональний до кожного з векторів $\vec{e}'_1,...,\vec{e}'_m$. Отже, система $\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,...,\vec{e}'_{m_1},...,\vec{e}'_{m_1+m_2}$ – ортонормована. Продовжуючи цей процес, будемо мати потрібний базис із власних векторів.

Приклад 1.6.12. Довести, що скалярний добуток $f(\vec{x})=(\vec{a},\vec{x})$ є лінійним функціоналом відносно $\vec{x}$.

Розв'язання. Для будь-яких векторів $\vec{x},\vec{y}\in L$

$$f(\vec{x}+\vec{y})=(\vec{x}+\vec{y},\vec{a})=(\vec{x},\vec{a})+(\vec{y},\vec{a})=f(\vec{x})+f(\vec{y}),$$
$$f(\alpha\vec{x})=(\alpha\vec{x},\vec{a})=\alpha(\vec{x},\vec{a})=\alpha f(\vec{x}).$$

Приклад 1.6.13. Довести твердження: якщо лінійний оператор A в ортонормованому базисі задається матрицею А, то спряжений з ним оператор A^* задається в цьому ж базисі транспонованою матрицею A^{T}.

Розв'язання. Нехай оператору A в ортонормованому базисі $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$ евклідового простору L відповідає матриця $\mathrm{A}=\left\|a_{ij}\right\|$, $i,j=1,\ldots,n$.

Якщо $X=\begin{pmatrix}x_1 & \cdots & x_n\end{pmatrix}'$ і $Y=\begin{pmatrix}y_1 & \cdots & y_n\end{pmatrix}'$ – координати векторів у цьому ортонормованому базисі, то $(\vec{x},\vec{y})=(\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\cdot Y)$. В такому разі

$$(A\vec{x},\vec{y})=(\mathrm{A}X)^{\mathrm{T}}\cdot Y=X^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\cdot Y=(\vec{x},A^{\mathrm{T}}\vec{y}),\text{ але }(A\vec{x},\vec{y})=(\vec{x},A^{*}\vec{y}).$$

Отже, маємо $\mathrm{A}^*=\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$.

Приклад 1.6.14. Довести, що оператор A^*, спряжений з лінійним оператором A, що діє в n-вимірному евклідовому просторі L, лінійний.

Розв'язання. Для будь-яких векторів $\vec{x}, \vec{y}_1, \vec{y}_2 \in L$ та для будь-яких чисел α_1, α_2

$$(A\vec{x}, \alpha_1\vec{y}_1 + \alpha_2\vec{y}_2) = \alpha_1(A\vec{x}, \vec{y}_1) + \alpha_2(A\vec{x}, \vec{y}_2) = \alpha_1(\vec{x}, A^*\vec{y}_1) + \alpha_2(\vec{x}, A^*\vec{y}_2) =$$
$$= (\vec{x}, \alpha_1 A^*\vec{y}_1) + (\vec{x}, \alpha_2 A^*\vec{y}_2) = (\vec{x}, \alpha_1 A^* y_1 + \alpha_2 A^*\vec{y}_2).$$

З іншого боку,

$$(A\vec{x}, \alpha_1\vec{y}_1 + \alpha_2\vec{y}_2) = (\vec{x}, A^*(\alpha_1\vec{y}_1 + \alpha_2\vec{y}_2)).$$

Таким чином, $A^*(\alpha_1\vec{y}_1 + \alpha_2\vec{y}_2) = \alpha_1 A^*\vec{y}_1 + \alpha_2 A^*\vec{y}_2$, а це й означає, що оператор A^* – лінійний.

Приклад 1.6.15. Довести теорему 1.6.1.

Розв'язання. Нехай A – симетричний оператор в евклідовому просторі L, $\mathrm{A} = \|a_{ik}\|$ (k, i = 1,…, n) – матриця цього оператора в ортонормованому базисі $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$. Матрицею спряженого оператора A^* в цьому базисі, як доведено в прикладі 1.6.13, буде *транспонована матриця* A^{T}. Оскільки $A = A^*$, то $\mathrm{A} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}$, а це означає, що матриця А – симетрична.

Навпаки, нехай лінійний оператор A в деякому ортонормованому базисі простору L задається симетричною матрицею $\mathrm{A} = \|a_{ik}\|$. Тоді матрицею спряженого оператора A^* в тому ж базисі буде транспонована матриця A^{T}. Оскільки матриця А – симетрична, то $\mathrm{A} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}$, і тому $A = A^*$, отже, оператор A – симетричний.

Приклад 1.6.16. Знайти ортонормований базис із власних векторів і матрицю $\widetilde{\mathrm{A}}$ в цьому базисі для лінійного оператора A, заданого в деякому ортонормованому базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ евклідова простору L матрицею

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 4 & -7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Оператор A – симетричний, оскільки він заданий в ортонормованому базисі евклідова простору симетричною матрицею. Тому в евклідовому просторі існує ортонормований базис, що складається з власних векторів оператора A. Побудуємо цей базис. Запишемо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 8-\lambda & 4 & -1 \\ 4 & -7-\lambda & 4 \\ -1 & 4 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ або } -(\lambda-9)^2(\lambda+9) = 0 \text{ і } \lambda_1 = \lambda_2 = 9,\ \lambda_3 = -9.$$

Запишемо систему для знаходження власних векторів

$$\begin{cases} (8-\lambda)x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 + (-7-\lambda)x_2 + 4x_3 = 0, \\ -x_1 + 4x_2 + (8-\lambda)x_3 = 0. \end{cases}$$

Якщо $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$, то маємо систему $\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 - 16x_2 + 4x_3 = 0, \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

Ранг цієї системи дорівнює 1. Як власні вектори можна взяти вектори $\vec{f}_1 = (1; 0; -1); \vec{f}_2 = (0; 1; 4)$. Застосуємо для цих векторів процес ортогоналізації (див. підрозд. 1.6.2):

$$\vec{e}\,'_1 = \frac{\vec{f}_1}{|\vec{f}_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_3;$$

$\vec{e}_2'' = f_2' - \alpha\vec{e}_1'$, причому α виберемо так, щоб $(\vec{e}_2'', \vec{e}_1') = 0$, або $(\vec{f}_2 - \alpha\vec{e}_1', \vec{e}_1') = 0$;

$$\vec{f}_2 - \alpha\vec{e}_1' = \vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 - \alpha\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_3\right) = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \left(4 + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)\vec{e}_3;$$

$$(\vec{f}_2 - \alpha\vec{e}_1', \vec{e}_1') = -\frac{\alpha}{2} - \frac{4}{\sqrt{2}} - \frac{\alpha}{2} = 0;\ \alpha = -4/\sqrt{2}.$$

Отже, $\vec{e}_2'' = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$ – власний вектор, ортогональний до вектора $\vec{e}_1'$. Нормуємо вектор $\vec{e}_2''$: $\vec{e}_2' = \dfrac{\vec{e}_2''}{|\vec{e}_2''|} = \dfrac{2}{3}\vec{e}_1 + \dfrac{1}{3}\vec{e}_2 + \dfrac{2}{3}\vec{e}_3$.

Залишилось знайти власний вектор довжиною *l* оператора *A*, який відповідає значенню $\lambda_3 = -9$:

$$\vec{e}_3' = \frac{\sqrt{2}}{6}\vec{e}_1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}\vec{e}_2 + \frac{\sqrt{2}}{6}\vec{e}_3.$$

Дістали шуканий базис $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$. У цьому базисі оператор *A* задається діагональною матрицею $\widetilde{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$, на головній діагоналі якої розміщені власні значення в тому ж порядку, в якому у базисі розташовані відповідні їм власні вектори.

1.6.4. Ортогональний оператор і його матриця

1. Ортогональний оператор. Лінійний оператор *A* в *n*-вимірному евклідовому просторі *L* називається ортогональним (ізометричним), якщо він зберігає скалярний добуток векторів, тобто якщо для будь-яких векторів $\vec{x}$ та $\vec{y}$ цього простору $(A\vec{x}, A\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y})$.

Приклад 1.6.17. Довести, що ортогональний оператор зберігає кути між векторами.

Розв'язання. Покладемо в рівності $(A\vec{x}, A\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y})$ $\vec{y} = \vec{x}$, одержимо $\|A\vec{x}\|^2 = (A\vec{x}, A\vec{x}) = (\vec{x}, \vec{x}) = \|\vec{x}\|^2$, тобто ортогональний оператор зберігає довжину векторів. А оскільки $\cos\varphi = \dfrac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} = \dfrac{(A\vec{x}, A\vec{y})}{\|A\vec{x}\| \cdot \|A\vec{y}\|}$, то залишаються незмінними і кути між векторами.

Приклад 1.6.18. Довести, що лінійний оператор A у просторі L є ортогональним тоді і тільки тоді, коли $A^*A = E$, або $A^* = A^{-1}$.

Розв'язання. Якщо A – ортогональний, а A^* – спряжений з ним оператор, то $(\vec{x},\vec{y}) = (A\vec{x}, A\vec{y}) = (\vec{x}, A^*(A\vec{y})) = (\vec{x}, A^*A\vec{y})$ для довільних векторів $\vec{x},\vec{y}$, а це можливо тільки тоді, коли $\mathrm{A}^*\mathrm{A} = E$ або $\mathrm{A}^* = \mathrm{A}^{-1}$. Навпаки, якщо $\mathrm{A}^* = \mathrm{A}^{-1}$, то для будь-яких векторів із L $(A\vec{x}, A\vec{y}) = (\vec{x}, A^*A\vec{y}) = (\vec{x},\vec{y})$. Отже, оператор A – ортогональний.

Приклад 1.6.19. Довести: якщо лінійний оператор A у просторі L переводить ортонормований базис в ортонормований, то цей оператор ортогональний і, навпаки, кожний ортогональний оператор A у просторі L переводить будь-який ортонормований базис в ортонормований.

Розв'язання. Нехай лінійний оператор A у просторі L переводить ортонормований базис $\vec{e}_1,...,\vec{e}_n$ в ортонормований базис $\vec{e}\,'_1 = A\vec{e}_1$, $\vec{e}\,'_2 = A\vec{e}_2,...,\vec{e}\,'_n = A\vec{e}_n$. Тоді якщо $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + x_n\vec{e}_n$ і $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + ... + y_n\vec{e}_n$, то $A\vec{x} = x_1A\vec{e}_1 + ... + x_nA\vec{e}_n = x_1\vec{e}\,'_1 + x_2\vec{e}\,'_2 + ... + x_n\vec{e}\,'_n$, $A\vec{y} = y_1\vec{e}\,'_1 + y_2\vec{e}\,'_2 + ... + y_n\vec{e}\,'_n$ та $(A\vec{x}, A\vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n = (\vec{x},\vec{y})$, тобто оператор A – ортогональний.

Навпаки, якщо A – ортогональний оператор у просторі L, а $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$ – ортонормований базис простору L, то $(A\vec{e}_i, A\vec{e}_k) = (\vec{e}_i,\vec{e}_k) = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases}$

$i, k = 1,\ldots,n$. А це означає, що система векторів $A\vec{e}_1,..., A\vec{e}_n$ – ортонормована.

2. Матриця ортогонального оператора. Матриця A називається ортогональною, якщо $\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}^{-1}$.

Приклад 1.6.20. Довести, що кожний ортогональний оператор A в евклідовому просторі L в ортонормованому базисі задається ортогональною матрицею.

Розв'язання. Нехай A – ортогональний оператор у просторі L, A – його матриця в ортонормованому базисі $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$. Відомо: якщо A^* – оператор, спряжений з A, то $\mathrm{A}^* = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}$, оскільки A – ортогональний, тобто $A^* = A^{-1}$, то $\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}^{-1}$, а це означає, що матриця A – ортогональна.

Нагадаємо, що стовпці матриці лінійного оператора A в деякому базисі $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$ – це координати векторів $A\vec{e}_1, A\vec{e}_2,..., A\vec{e}_n$, тобто

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ де } \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \cdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = A\vec{e}_i, \quad i = 1,...,n.$$

Якщо базис $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$ – ортонормований, а оператор – ортогональний, то

$$(A\vec{e}_i, A\vec{e}_k) = a_{1i}a_{1k} + a_{2i}a_{2k} + ... + a_{ni}a_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}a_{jk} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases}$$

тому що ортогональний оператор переводить ортонормований базис в ортонормований.

Отже, очевидно, що стовпці матриці ортогонального оператора утворюють ортонормовану систему. Якщо врахувати, що $A^T = A^{-1}$, то ясно, що і рядки такої матриці – ортонормована система, тобто якщо $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ – ортогональна, то $a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1$; $a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1$; $a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1$; $a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1$;

$$a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0; \quad a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0.$$

Наприклад, матриці $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix}$ – ортогональні.

1.7. КВАДРАТИЧНА ФОРМА

1.7.1. Зведення квадратичної форми ортогональним перетворенням до канонічного вигляду

1. Білінійний функціонал.

Функція від векторів $\vec{x}, \vec{y}$ евклідова простору L називається білінійним функціоналом $F(\vec{x}, \vec{y})$, якщо:

а) при фіксованому $\vec{y}$ $F(\vec{x}, \vec{y})$ – лінійний функціонал від вектора $\vec{x}$:

$$F(\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y}) = F(\vec{x}_1, \vec{y}) + F(x_2, \vec{y}),\ F(\lambda\vec{x}, \vec{y}) = \lambda F(\vec{x}, \vec{y});$$

б) при фіксованому $\vec{x}$ $F(\vec{x}, \vec{y})$ – лінійний функціонал від $\vec{y}$:

$$F(\vec{x}, \vec{y}_1 + \vec{y}_2) = F(\vec{x}, \vec{y}_1) + F(\vec{x}, \vec{y}_2),\ F(\vec{x}, \lambda\vec{y}) = \lambda F(\vec{x}, \vec{y}).$$

Зафіксуємо в просторі L базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$, в якому $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + x_n\vec{e}_n$, а $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + ... + y_n\vec{e}_n$. У цьому випадку

$$F(\vec{x}, \vec{y}) = F(x_1\vec{e}_1 + ... + x_n\vec{e}_n, y_1\vec{e}_1 + ... + y_n\vec{e}_n) = x_1y_1F(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + x_1y_2F(\vec{e}_1, \vec{e}_2) +$$
$$+ ... + x_1y_nF(\vec{e}_1, \vec{e}_n) + ... + x_ny_nF(\vec{e}_n, \vec{e}_n),$$

або $F(\vec{x}, \vec{y}) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} x_iy_jF(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$.

Якщо позначити $F(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = a_{ij}$, то $F(\vec{x}, \vec{y}) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$.

Зауважимо, що числа a_{ij} не залежать від векторів $\vec{x}, \vec{y}$, а тільки від вибраного базису та функціонала.

Вираз $F(\vec{x}, \vec{y}) = \sum\limits_{ij=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ називають *білінійною формою.*

Матриця $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, де $a_{ij} = F(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$, називається *матрицею білінійної форми.*

Якщо позначити $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^T, Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix}^T$, то $F(\vec{x}, \vec{y}) = X^{\mathrm{T}} A Y$ (перевірте).

Зафіксуємо новий базис у просторі L: $\vec{e}'_n, ..., \vec{e}'_n$. В ньому білінійний функціонал $F(\vec{x}, \vec{y}) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a'_{ij}\, x'_i\, y'_j$, або, в матричному вигляді, $F(\vec{x}, \vec{y}) = (X')^{\mathrm{T}} A' Y'$, де

$$A' = \begin{pmatrix} F(e'_1, e'_1) & \dots & F(e'_1, e'_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ F(e'_n, e'_1) & \dots & F(e'_n, e'_n) \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 & \cdots & x'_n \end{pmatrix}^T, \quad Y' = \begin{pmatrix} y'_1 & \cdots & y'_n \end{pmatrix}^T.$$

Якщо згадати, що $X = HX'$, $Y = HY'$, де H – матриця переходу від старого базису до нового, то одержимо $A' = H^{\mathrm{T}} A H$.

Білінійний функціонал називають симетричним, якщо $\forall \vec{x}, \vec{y} \in L$:

$$F(\vec{x}, \vec{y}) = F(\vec{y}, \vec{x}).$$

Тоді білінійному функціоналу в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ відповідає білінійна форма, матриця якої – симетрична $(a_{ij} = F(e_i, e_j) = F(e_j, e_i) = a_{ji})$, тобто $A^T = A$. Така білінійна форма називається симетричною білінійною формою. Приклад симетричної білінійної форми – скалярний добуток в евклідовому просторі:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i y_j \text{, де } \alpha_{ij} = (\vec{e}_i, \vec{e}_j).$$

2. Квадратична форма.

Числова функція, яку можна одержати із симетричної білінійної форми $F(\vec{x}, \vec{y}) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$, якщо покласти $\vec{y} = \vec{x}$, називається *квадратичною формою* $F(\vec{x}, \vec{x})$:

$$F(\vec{x}, \vec{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j .$$

Якщо врахувати, що $a_{ij} = a_{ji}$, $x_i x_j = x_j x_i$, то квадратичну форму можна записати у вигляді

$$F(\vec{x}, \vec{x}) = a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 + 2a_{13} x_1 x_3 + ... + a_{nn} x_n^2 .$$

Квадратична форма – однорідний багаточлен другого степеня відносно координат вектора $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Матриця квадратичної форми

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

складається з коефіцієнтів при змінних $x_1, x_2, ..., x_n$. На головній діагоналі – коефіцієнти при квадратах змінних, на всіх інших місцях – половина коефіцієнтів при добутку змінних $x_i x_j$.

Будемо говорити, що квадратична форма має канонічний вигляд, якщо всі $a_{ij} = 0 \left(i \neq j\right)$:

$$F(\vec{x}, \vec{x}) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{nn}x_n^2.$$

Якщо згадати, що матриця квадратичної форми залежить від вибраного базису, то виникає питання пошуку такого базису, в якому квадратична форма має канонічний вигляд, тобто матриця – діагональна.

3. Зведення квадратичної форми до канонічного вигляду ортогональним перетворенням.

Зафіксуємо в евклідовому просторі L ортонормований базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$. Білінійний функціонал у цьому базисі задається білінійною формою

$$F(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j .$$

Матрицю цього функціонала можна розглядати як матрицю лінійного оператора A в тому ж самому базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$. Якщо перейти до нового базису $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, ..., \vec{e}'_n$, то матриця білінійної форми (як доведено вище) перетвориться в матрицю $H^{\mathrm{T}}\mathrm{A}H$, а матриця оператора A – в матрицю $H^{-1}\mathrm{A}H$ (див. підрозд. 1.5.3). Якщо новий базис $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, ..., \vec{e}'_n$ також ортонормований, то матриця H – ортогональна (див. підрозд. 1.6.3) і $H^{-1} = H^{\mathrm{T}}$.

У цьому випадку матриця білінійної форми і матриця лінійного оператора перетворюються однаково. Таким чином, в евклідовому просторі в ортонормованому базисі кожному білінійному функціоналу $F(\vec{x}, \vec{y})$ відповідає лінійний оператор A, який має ту ж саму матрицю, що і функціонал $F(\vec{x}, \vec{y})$. Якщо $F(\vec{x}, \vec{y})$ – симетричний білінійний функціонал, матриця якого в ортонормованому базисі $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, ..., \vec{e}'_n$ симетрична, то відповідний лінійний оператор A – самоспряжений (симетричний), а матриця цього оператора (див. підрозд. 1.6.2) має діагональний вигляд у базисі з власних векторів. Таким чином, якщо $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, ..., \vec{e}'_n$ – ортонормований базис із власних векторів оператора A, а $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ – власні значення, які відповідають цим векторам, то в цьому базисі $F(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x'_i y'_i$.

Якщо $\vec{y} = \vec{x}$, то маємо квадратичну форму, що набуває в цьому базисі канонічного вигляду

$$f(x_1,...,x_n) = F(\vec{x},\vec{x}) = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + ... + \lambda_n x_n'^2 .$$

Приклад 1.7.1. Записати матрицю квадратичної форми $F(\vec{x},\vec{x})$, якщо:

1) $F(\vec{x},\vec{x}) = 5x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2$;

2) $F(\vec{x},\vec{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 6x_1x_3 + 4x_3^2$.

Розв'язання.

1. Враховуючи, що на головній діагоналі матриці – коефіцієнти при x_1^2 та x_2^2 – 5 і 3, а на місцях (1 2) та (2 1) – половина коефіцієнта при добутку x_1 на x_2 – (-1), маємо матрицю

$$\text{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Аналогічно попередньому розв'язанню $a_{11} = 1$; $a_{22} = 3$; $a_{33} = 4$; $a_{12} = a_{21} = 1$; $a_{13} = a_{31} = -3$; $a_{23} = a_{32} = 0$. Отже,

$$\text{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.7.2. Записати квадратичну форму, якщо її матриця має вигляд

$$\text{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 11 \\ 2 & 0 & 5 \\ 11 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Маємо $f(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \text{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^{\text{T}}$.
Перемножимо послідовно матриці:

$$(x_1 \;\; x_2 \;\; x_3)\begin{pmatrix} -1 & 2 & 11 \\ 2 & 0 & 5 \\ 11 & 5 & 3 \end{pmatrix} = (-x_1 + 2x_2 + 11x_3 \quad 2x_1 + 5x_3 \quad 11x_1 + 5x_2 + 3x_3);$$

$$\begin{pmatrix} -x_1 + 2x_2 + 11x_3 & 2x_1 + 5x_3 & 11x_1 + 5x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}' = -x_1^2 + 2x_1x_2 + 11x_1x_3 +$$
$$+ 2x_1x_2 + 5x_3x_2 + 11x_1x_3 + 5x_2x_3 + 3x_3^2 = -x_1^2 + 4x_1x_2 + 22x_1x_3 + 3x_3^2 + 10x_2x_3.$$

Можна зробити це скоріше, якщо згадати, як побудована матриця квадратичної форми (див. попередній приклад).

Приклад 1.7.3. Звести квадратичну форму до канонічного вигляду ортогональним перетворенням:

1) $f(x_1,x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2$;

2) $f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + 9x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$.

Розв'язання.

1. Запишемо матрицю квадратичної форми $\text{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ і знайдемо її власні значення.

Характеристичне рівняння $(2-\lambda)^2 - 1 = 0$ має корені $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$.

Канонічний вигляд квадратичної форми: $f(x_1', x_2') = x_1'^2 + 3x_2'^2$ (коефіцієнти при квадратах – власні значення).

2. Запишемо матрицю квадратичної форми

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 9-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

має корені $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 10, \lambda_3 = 1$. Канонічний вигляд квадратичної форми:

$$f(x_1', x_2', x_3') = 2x_1'^2 + 10x_2'^2 + x_3'^2.$$

Приклад 1.7.4. Звести квадратичну форму до канонічного вигляду ортогональним перетворенням, знайти базис, в якому вона має канонічний вигляд, матрицю цього ортогонального перетворення та виразити старі координати через нові, якщо:

1) $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$;

2) $f(x_1, x_2, x_3) = 11x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 16x_1x_3 + 20x_2x_3$.

Розв'язання.

1. Запишемо матрицю квадратичної форми і знайдемо її власні значення:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}; \ \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 5.$$

Знайдемо власні вектори $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, що відповідають власним значенням $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 5$:

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta = 0, \\ -2\alpha + 4\beta = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -4\alpha - 2\beta = 0, \\ -2\alpha - \beta = 0, \end{cases} \Rightarrow c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(перевірте ортогональність векторів).

Ці вектори утворюють новий базис – ортогональний, але ще не нормований. Пронормувавши його, матимемо новий ортонормований базис із власних векторів:

$$\vec{e}'_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \ \vec{e}'_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Запишемо матрицю переходу від старого ортонормованого базису до нового ортонормованого базису із власних векторів:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

(переконайтеся в тому, що матриця ортогональна).

У цьому базисі матриця квадратичної форми має вигляд $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, а сама квадратична форма – $f(x_1', x_2') = 5x_2'^2$.

Виразимо старі змінні x_1, x_2 через нові x_1', x_2':

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}, \text{ або } \begin{cases} x_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} x_1' + \frac{1}{\sqrt{5}} x_2', \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} x_1' - \frac{2}{\sqrt{5}} x_2'. \end{cases}$$

2. Запишемо матрицю квадратичної форми в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$:

$$\text{A} = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

Після розв'язання характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} 11-\lambda & 2 & -8 \\ 2 & 2-\lambda & 10 \\ -8 & 10 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

одержуємо власні значення: $\lambda_1 = 18, \lambda_2 = 9, \lambda_3 = -9$.

Квадратична форма автоматично набуває вигляду $f(x_1', x_2', x_3') = 18x_1'^2 + 9x_2'^2 - 9x_3'^2$ в базисі з власних векторів.

Знайдемо новий ортонормований базис із власних векторів, в якому квадратична форма має канонічний вигляд:

$$\vec{e}'_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}', \ \vec{e}'_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}', \ \vec{e}'_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}'.$$

Запишемо матрицю переходу від базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ до базису $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3$ і зв′язок між старими координатами та новими:

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.7.5. Звести квадратичну форму

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

до канонічного вигляду. Знайти ортонормований базис, в якому вона має такий вигляд.

Розв'язання. Складемо матрицю квадратичної форми у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Запишемо характеристичне рівняння та знайдемо його корені:

$$(1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-10) = 0;\ \lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 10.$$

Рівняння має двократний корінь $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Знайдемо власні вектори, що відповідають цьому власному значенню. Маємо систему (ранг її матриці дорівнює 1)

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta - 2\gamma = 0, \\ 2\alpha + 4\beta - 4\gamma = 0, \\ -2\alpha - 4\beta + 4\gamma = 0. \end{cases}$$

Фундаментальна система розв'язків цієї системи, наприклад, така:

$$\vec{f}_1 = (2; -1; 0),\ \vec{f}_2 = (2; 0; 1).$$

Для того щоб одержати ортонормований базис із власних векторів, ортогоналізуємо цю систему (див. підрозд. 1.6.1, 1.6.2):

$$\vec{e}\,'_1 = \frac{\vec{f}_1}{|\vec{f}_1|} = \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_2,\ \vec{e}\,''_2 = \vec{f}_2 - \alpha\vec{e}\,'_1,$$

причому α вибираємо так, щоб $(\vec{e}\,''_2, \vec{e}\,'_1) = 0$, або

$$(\vec{f}_2 - \alpha\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_1) = \left(2 - \frac{2\alpha}{\sqrt{5}}\right)\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{\alpha}{\sqrt{5}}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 0.$$

З цього рівняння знаходимо $\alpha = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$. Маємо вектор

$$\vec{e}\,''_2 = \left(2 - \frac{8}{5}\right)\vec{e}_1 + \frac{4}{5}\vec{e}_2 + \vec{e}_3,$$

ортогональний до вектора $\vec{e}_1'$, причому $|\vec{e}\,''_2| = \sqrt{\dfrac{4}{25} + \dfrac{16}{25} + 1} = \dfrac{3\sqrt{5}}{5} = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$.

Пронормувавши вектор $\vec{e}\,''_2$: $\vec{e}\,'_2 = \dfrac{\vec{e}\,''_2}{|\vec{e}\,''_2|} = \dfrac{2\sqrt{5}}{15}\vec{e}_1 + \dfrac{4\sqrt{5}}{15}\vec{e}_2 + \dfrac{\sqrt{5}}{3}\vec{e}_3$,

одержимо два власних ортонормованих вектори, що відповідають кратному власному значенню $\lambda = 1$:

$$\vec{e}\,'_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_2,\ \vec{e}\,'_2 = \frac{2\sqrt{5}}{15}\vec{e}_1 + \frac{4\sqrt{5}}{15}\vec{e}_2 + \frac{\sqrt{5}}{3}\vec{e}_3.$$

Знайдемо одиничний власний вектор матриці *A*, що відповідає значенню $\lambda_3 = 10$:

$$\vec{e}\,'_3 = \frac{1}{3}\vec{e}_1 + \frac{2}{3}\vec{e}_2 - \frac{2}{3}\vec{e}_3.$$

Отже, в ортонормованому базисі, що складається з власних векторів

$\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$, квадратична форма має вигляд

$$f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = \tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 + 10\tilde{x}_3^2.$$

Матриця переходу від ортонормованого базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ до ортонормованого базису $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ – ортогональна:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

4. Додатно визначені квадратичні форми.

Квадратична форма $F(\vec{x}, \vec{x})$ називається додатно (від′ємно) визначеною, якщо

$$F(\vec{x}, \vec{x}) > 0 \quad (F(\vec{x}, \vec{x}) < 0)$$

для будь-якого вектора $\vec{x} \neq 0$.

Складемо ряд кутових мінорів квадратичної форми:

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Мають місце твердження (згідно з теоремою Сільвестра):

1) якщо $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$, то форма є додатно визначеною;

2) якщо $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \ldots, (-1)^n \Delta_n > 0$, то форма є від′ємно визначеною.

Приклад 1.7.6. Чи є додатно визначеною квадратична форма $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3y_2^2$?

Розв′язання. Запишемо матрицю квадратичної форми

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

та знайдемо її кутові мінори: $\Delta_1 = 3;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 8$.

Оскільки $\Delta_1 > 0$ та $\Delta_2 > 0$, за критерієм Сільвестра квадратична форма – додатно визначена.

Приклад 1.7.7. При яких значеннях λ буде додатно визначеною квадратична форма

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3?$$

Розв′язання. Матриця квадратичної форми

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Кутові мінори

$$\Delta_1 = 2 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 2 - \lambda^2,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 5 - 3\lambda^2.$$

Для додатної визначеності необхідно, щоб $\Delta_2 > 0$ та $\Delta_3 > 0$ (Δ_1 вже більше за 0), тобто треба розв′язати систему нерівностей $\begin{cases} 2-\lambda^2 > 0, \\ 5-3\lambda^2 > 0, \end{cases}$ або $\begin{cases} -2 < \lambda < 2, \\ -\sqrt{\dfrac{5}{3}} < \lambda < \sqrt{\dfrac{5}{3}}. \end{cases}$ Розв′язок системи: $|\lambda| < \sqrt{\dfrac{5}{3}}$. Отже, при $|\lambda| < \sqrt{\dfrac{5}{3}}$ квадратична форма додатно визначена.

1.8. КРИВІ ТА ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

1.8.1. Еліпс. Гіпербола. Парабола

Еліпс. Канонічне рівняння еліпса має вигляд $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. 1.8.1).

Точки A, A', B, B' називаються вершинами еліпса. Довжина $OA = a$ – велика піввісь, $OB = b$ – мала піввісь. Точки $F_1(-c;0)$ та $F_2(c;0)$, де $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, – фокуси еліпса. Якщо M – довільна точка еліпса, то $MF_1 + MF_2 = 2a$ – стала величина, тобто *еліпсом* називається геометричне місце точок, для яких сума відстаней до двох фіксованих точок (фокусів) площини – стала величина.

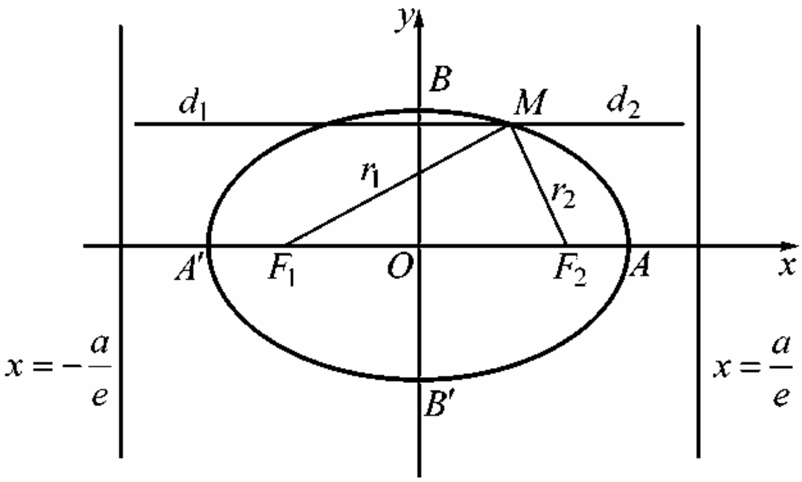


Рис. 1.8.1

Число $e = \dfrac{c}{a} < 1$ називається ексцентриситетом еліпса. Прямі $x = \pm\dfrac{a}{e}$ називаються директрисами. Для довільної точки еліпса $\dfrac{r_1}{d_1} = e,\ \dfrac{r_2}{d_2} = e$, де d_1 і d_2 – відстані від цієї точки до директрис, r_1 *і* r_2 – відстані від цієї точки до фокусів. Рівняння $\dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1$ – рівняння дотичної до еліпса в його точці $M_0(x_0; y_0)$. Зауважимо, що коли $a = b$, то рівняння $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ задає коло з центром у початку координат і радіусом a.

Гіпербола. Канонічне рівняння гіперболи має вигляд $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, де a, b – довжини півосей, дійсної та уявної (рис. 1.8.2).

Точки перетину гіперболи з дійсною віссю називаються вершинами. Точки $F_1(-c;0)$ та $F_2(c;0)$, де $c=\sqrt{a^2+b^2}$, називаються фокусами гіперболи. Для довільної точки M гіперболи величина $|MF_1-MF_2|$ є сталою $(2a)$, тобто *гіпербола* – це геометричне місце точок, для яких абсолютна величина різниці відстаней від фокусів є величиною сталою, яка дорівнює $2a$.

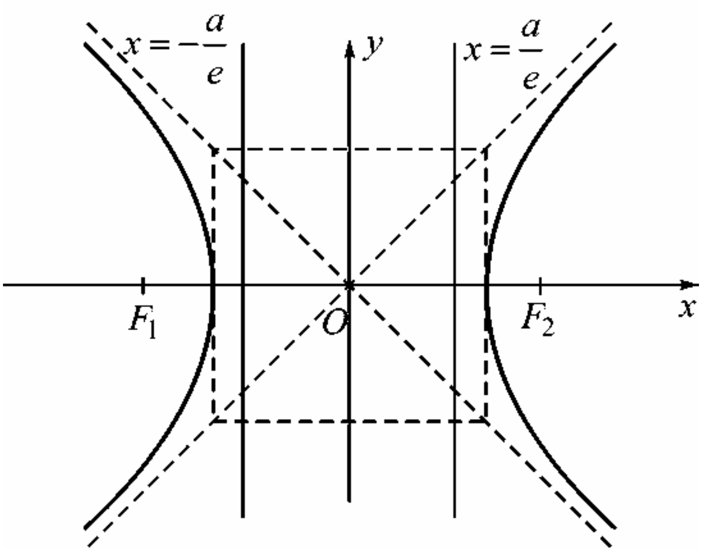


Рис. 1.8.2

Число $e=\frac{c}{a}>1$ називається ексцентриситетом гіперболи. Прямі, визначені рівняннями $x=\pm\frac{a}{e}$, називаються директрисами гіперболи. Рівняння дотичної до гіперболи в точці $M_0(x_0;y_0)$ має вигляд $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$. Рівнянням асимптот є $y=\pm\frac{b}{a}x$. При $a=b$ гіпербола називається рівнобічною.

Парабола. *Параболою* називається геометричне місце точок, для кожної з яких відстань до фіксованої точки площини (фокуса) дорівнює відстані до фіксованої прямої (директриси).

Відстань від фокуса до директриси позначається літерою p. Рівнянням параболи буде $y^2=2px$, якщо вісь абсцис декартової системи координат спрямовано через фокус цієї параболи перпендикулярно до директриси (від директриси до фокуса), а початок координат розташований посередині між фокусом і директрисою (рис. 1.8.3). Рівнянням директриси буде $x=-\frac{p}{2}$.

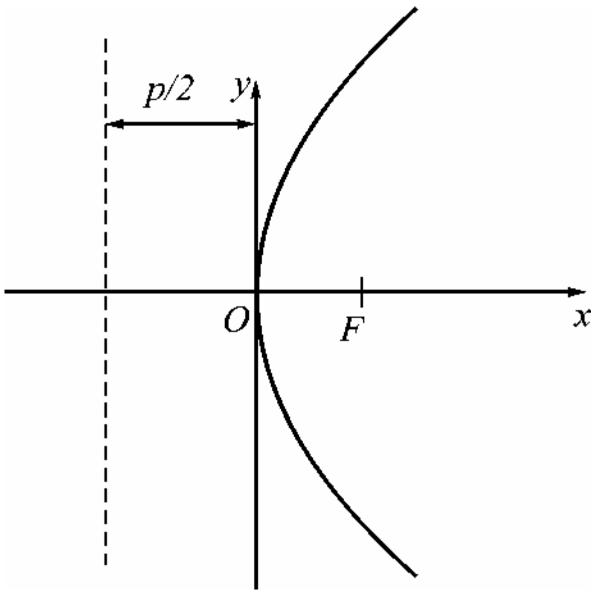


Рис. 1.8.3

Приклад 1.8.1. Знайти півосі еліпсів:

1) $x^2+5y^2=15$;

2) $16x^2+y^2=16$;

3) $9x^2+y^2=1$.

Розв'язання. Подамо рівняння еліпсів у вигляді:

$$1)\ \frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{3}=1;\ 2)\ x^2+\frac{y^2}{16}=1;\ 3)\frac{x^2}{\frac{1}{9}}+y^2=1.$$

Тепер бачимо, що півосі еліпса дорівнюють:

1) $a=\sqrt{15},\ \ b=\sqrt{3}$;

2) $a=1,\qquad b=4$;

3) $a=\dfrac{1}{3},\quad b=1$.

Приклад 1.8.2. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо:

1) півосі його дорівнюють відповідно 5 та 4;
2) відстань між фокусами дорівнює 8, а велика піввісь – 10;
3) велика піввісь дорівнює 26 і $e=\dfrac{12}{13}$;
4) задано точку $M(2;-2)$, що належить еліпсу, та його велику піввісь $a=4$;
5) задано точку $M(-\sqrt{5};2)$, що належить еліпсу, та відстань між директрисами, що дорівнює 10.

Розв'язання.

1. Якщо півосі еліпса дорівнюють 5 та 4, то канонічне рівняння еліпса матиме вигляд

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

2. Оскільки $2c=8$, а $2a=10$, то $c=4$, $a=5$. Знайдемо малу піввісь b: для еліпса $b^2=a^2-c^2$ (рис. 1.8.4); у даному випадку $b^2=25-16=9$.

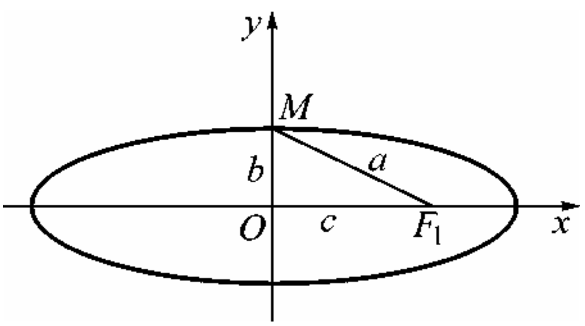


Рис. 1.8.4

Рівнянням еліпса є $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

3. Оскільки $a=13$, ексцентриситет $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{12}{13}$, звідки $c=12$. Із співвідношення $b^2=a^2-c^2$ знайдемо b^2:

$$b^2=169-144=25.$$

Рівняння еліпса має вигляд

$$\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1.$$

4. Якщо точка $M(2;-2)$ належить еліпсу, то її координати повинні задовольняти рівнянню еліпса

$$\frac{4}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1.$$

Враховуючи, що $a=4$, маємо $\frac{4}{16}+\frac{4}{b^2}=1$, звідки $b^2=\frac{16}{3}$, і рівняння еліпса має вигляд $\frac{x^2}{16}+\frac{3y^2}{16}=1$.

5. Оскільки рівняння директрис еліпса, фокуси якого розташовані на осі *Ox*, має вигляд $x=\pm\frac{a}{e}$, то відстань між директрисами дорівнює $\frac{2a}{e}$. Маємо $\frac{2a}{e}=10$, або $\frac{2a^2}{c}=10$, звідки $a^2=5c$. У такому разі $b^2=5c-c^2$. Підставивши координати точки M у рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, одержимо співвідношення $\frac{5}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1$, або $\frac{5}{5c}+\frac{4}{5c-c^2}=1$. Розв′язком цього рівняння є $c=3$, тому $a^2=15$, $b^2=6$, і рівняння еліпса набуває вигляду

$$\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{6}=1.$$

Приклад 1.8.3. Знайти півосі, фокуси та ексцентриситет еліпса $9x^2+25y^2=225$. Записати рівняння директрис.

Розв'язання. Запишемо рівняння еліпса у вигляді

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1,$$

тоді $a^2=25$, $b^2=9$, звідки $a=5$, $b=3$. Із співвідношення $c^2=a^2-b^2$ маємо $c^2=25-9=16$; $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$; $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$. Рівнянням директрис еліпса є $x=\pm\frac{a}{e}$, отже, $x=\pm\frac{25}{4}$.

Приклад 1.8.4. На еліпсі $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$ знайти точки, абсциси яких дорівнюють –3.

Розв'язання. Координати шуканої точки – $A(-3;\ y)$. Підставимо ці координати в рівняння еліпса:

$$\frac{9}{25}+\frac{y^2}{4}=1.$$

З цього рівняння маємо $y=\pm\frac{8}{5}$, тобто є дві точки, симетричні відносно осі абсцис: $A_1\left(-3;\ \frac{8}{5}\right)$, $A_2\left(-3;\ -\frac{8}{5}\right)$.

Приклад 1.8.5. Визначити, які з точок $A_1(-2;3)$, $A_2(2;-2)$, $A_3(2;\ -4)$ лежать на еліпсі $8x^2+5y^2=77$, які – всередині, а які – зовні його.

Розв'язання. З геометричного означення еліпса безпосередньо випливає: якщо $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}<1$, то точка $A(x_0;y_0)$ лежить всередині еліпса і навпаки. Підставимо координати точок A_1, A_2, A_3 в рівняння еліпса:

1) $8\cdot 4+5\cdot 9=77$ – точка A_1 лежить на еліпсі;

2) $8\cdot 4+5\cdot 4<77$ – точка A_2 лежить всередині еліпса;

3) $8\cdot 4+5\cdot 16>77$ – точка A_3 лежить зовні еліпса.

Приклад 1.8.6. Знайти довжину сторони квадрата, який вписаного в еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

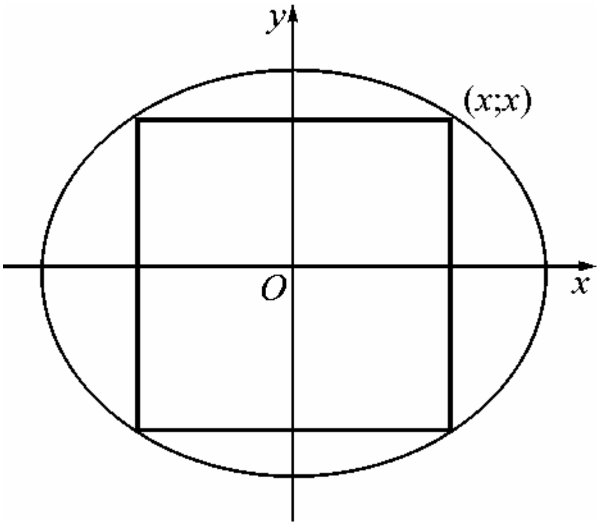


Рис. 1.8.5

Розв'язання. Координати вершин квадрата – $(x;\,y)$; $(x;-y)$; $(-x;-y)$; $(-x;\,y)$, причому $y=x$ $(x>0)$(рис. 1.8.5).

Підставимо координати точки $(x;\,x)$ в рівняння еліпса: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$.

Маємо $x^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$, або $x=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Приклад 1.8.7. Обчислити площу чотирикутника, дві вершини якого лежать у фокусах еліпса $9x^2+5y^2=1$, дві інші – збігаються з кінцями його малої осі.

Розв'язання. З рівняння еліпса видно, що $a^2=\frac{1}{5}$, $b^2=\frac{1}{9}$ (тобто еліпс витягнутий вздовж осі у). Знайдемо $c: c^2=a^2-b^2=\frac{1}{5}-\frac{1}{9}=\frac{4}{45}$, $c=\frac{2}{3\sqrt{5}}$. Отже, довжина однієї діагоналі чотирикутника $d_1=\frac{4}{3\sqrt{5}}$. Довжина другої діагоналі d_2 – це довжина малої осі, тобто $d_2=2b=\frac{2}{3}$. Діагоналі чотирикутника перпендикулярні, тому $S=\frac{1}{2}d_1d_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{45}$.

Приклад 1.8.8. Знайти ексцентриситет еліпса, якщо:

1) відрізок між фокусами з вершини малої осі видно під кутом 60°;

2) відстань між двома вершинами еліпса різних осей у два рази більше, ніж відстань між фокусами;

3) малу вісь видно з фокуса під прямим кутом;

4) відстань між директрисами в чотири рази більше відстані між фокусами;

5) відстань між фокусами є середнім арифметичним довжин осей.

Розв'язання.

1. Кут між віссю y та відрізком, що з'єднує вершину малої осі і фокус, дорівнює 30°. Тоді $e=\frac{c}{a}=\sin 30^0=\frac{1}{2}$.

2. З прямокутного трикутника OAB (рис. 1.8.6) маємо $AB^2=OA^2+OB^2$, тобто $a^2+b^2=4^2c^2$, $a^2+a^2-c^2=16c^2$, $17c^2=2a^2$, звідки $\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{2}{17}}$, а це і є ексцентриситетом еліпса.

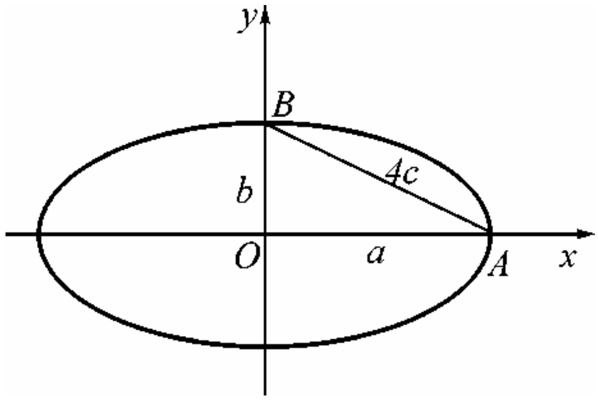


Рис. 1.8.6

3. Оскільки малу вісь видно з фокуса під прямим кутом, то кут між великою віссю еліпса та відрізком, що з'єднує вершину малої півосі з фокусом, дорівнює 45°, а з цього випливає, що $b=c$. Отже, $a^2=$ $=b^2+c^2=2c^2$ і $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

4. Оскільки відстань між директрисами дорівнює $d=\frac{2a}{e}$, а згідно з умовою задачі $\frac{2a}{e}=8c,\ \frac{2}{e}=8\frac{c}{a},\ \frac{2}{e}=8e$, то маємо ексцентриситет $e=\frac{1}{2}$.

Приклад 1.8.9. Знайти умову, за якої пряма $y=kx+m$ буде дотичною до еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Розв'язання. Якщо пряма $y=kx+m$ є дотичною до еліпса, то дискримінант квадратного (відносно x) рівняння $\frac{x^2}{a^2}+\frac{(kx+m)^2}{b^2}=1$ дорівнює нулю. Перетворимо рівняння і знайдемо дискримінант:

$$x^2(b^2+k^2a^2)+2kma^2x+(a^2m^2-a^2b^2)=0;$$

$$D=k^2m^2a^4-(a^2m^2-a^2b^2)(b^2+k^2a^2)=b^2a^2(b^2+k^2a^2-m^2).$$

Враховуючи, що $b\neq 0,\ a\neq 0$, маємо $m^2=b^2+k^2a^2$.

Приклад 1.8.10. Пряма $x-y-5=0$ є дотичною до еліпса, фокуси якого розташовані в точках $F_1(-3;0)$ та $F_2(3;0)$. Записати рівняння цього еліпса.

Розв'язання. Використавши висновок попередньої задачі, одержимо $a^2+b^2=25\ (k=1;m=5)$. Оскільки $c=3$ і $c^2=a^2-b^2$, то маємо друге співвідношення: $a^2 - b^2 = 9$. Розв'язком системи $\begin{cases} a^2 - b^2 = 9, \\ a^2 + b^2 = 25 \end{cases}$ буде $a^2 = 17$, $b^2 = 8$, і рівняння еліпса набуде вигляду $\frac{x^2}{17} + \frac{y^2}{8} = 1$.

Приклад 1.8.11. Знайти точки перетину двох еліпсів $x^2 + 9y^2 = 45$ і $x^2 + 9y^2 - 6x - 27 = 0$.

Розв'язання. Для того щоб знайти точки перетину двох еліпсів, необхідно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + 9y^2 = 45, \\ x^2 + 9y^2 - 6x - 27 = 0. \end{cases}$$

Розв′язки цієї системи – $A_1(3; -2)$, $A_2(3; 2)$.

Приклад 1.8.12. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо:

1) $2a = 10$, $2b = 8$;
2) $c = 5$, $2b = 8$;
3) $2c = 6$, $e = 3/2$;
4) задано рівняння асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$, а відстань між фокусами дорівнює 20;
5) відстань між директрисами дорівнює $\frac{8}{3}$ і ексцентриситет $e = \frac{3}{2}$;
6) задано точки гіперболи $M_1(6; -1)$ та $M_2(-8; 2\sqrt{2})$;
7) задано точку $M(-5; 3)$ гіперболи та ексцентриситет $e = \sqrt{2}$.

Розв'язання.

1. Рівнянням гіперболи є $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$, оскільки $a = 5$, $b = 4$.

2. Для гіперболи $a^2 = c^2 - b^2$, тому $a^2 = 25 - 16 = 9$ і рівняння гіперболи має вигляд

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

3. Оскільки $c = 3$, а $e = \frac{3}{2} = \frac{c}{a}$, то $a = 2$ і $b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$. Рівняння гіперболи можна записати так:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1.$$

4. Рівняння асимптот гіперболи $y = \pm\frac{b}{a}x$, отже, $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$, $b = \frac{4}{3}a$. Враховуючи, що $c = 10$ та $a^2 + b^2 = c^2$, маємо

$$\frac{16a^2}{9} + a^2 = 100,\ a^2 = 36,\ \ b^2 = 64.$$

Рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$.

5. Відстань між директрисами $\frac{2a}{e}=\frac{8}{3}$. Оскільки $e=\frac{3}{2}$, то $a=2$. За означенням ексцентриситету $e=\frac{c}{a}$, звідки $c=3$, тоді $b^2=c^2-a^2=9-4=5$.

Отже, маємо рівняння гіперболи $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$.

6. Точки M_1 та M_2 – точки гіперболи, тому їх координати задовольняють рівнянню гіперболи. Маємо систему рівнянь

$$\begin{cases}\frac{36}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1,\\ \frac{64}{a^2}-\frac{8}{b^2}=1,\end{cases}$$

розв'язком якої є $a^2=32$; $b^2=8$. Рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{8}=1$.

7. Фокусна відстань $c=a\cdot e=a\sqrt{2}$. Маємо систему $\begin{cases}2a^2=a^2+b^2,\\ \frac{25}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1.\end{cases}$

Розв′язок системи – $a^2=16=b^2$, і рівняння гіперболи має вигляд $x^2-y^2=16$.

Приклад 1.8.13. Знайти півосі $a,\ b$, фокуси, ексцентриситет, рівняння асимптот, рівняння директрис гіперболи $16x^2-9y^2=144$.

Розв'язання. Запишемо рівняння гіперболи у вигляді $\frac{x^2}{\frac{144}{16}}-\frac{y^2}{\frac{144}{9}}=1$, з якого ясно, що $a^2=9$, $b^2=16$, або $a=3$, $b=4$, тоді $c^2=25$. Тепер маємо координати фокусів $F_1(-5;0)$, $F_2(5;0)$; ексцентриситет $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$; рівняння асимптот $y=\pm\frac{b}{a}x$, або $y=\pm\frac{4}{3}x$; рівняння директрис $x=\pm\frac{9}{5}$.

Приклад 1.8.14. Ексцентриситет гіперболи $e=3$, відстань від точки M гіперболи до директриси дорівнює 4. Обчислити відстань від точки M до фокуса, одностороннього з цією директрисою (рис. 1.8.7).

Розв'язання. Оскільки $e=\frac{r}{d}$, то $r=12$.

Приклад 1.8.15. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані у вершинах еліпса $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$, а директриси проходять через фокуси цього еліпса.

Розв'язання. Фокуси гіперболи мають координати $F_1^{\text{г}}(10;0)$ та $F_2^{\text{г}}(-10;0)$, отже, фокусна відстань гіперболи $c_{\text{г}} = 10$. Рівняння директрис гіперболи має вигляд $x = \pm c_{\text{ел}}$, а оскільки $c_{\text{ел}} = \sqrt{100-64} = 6$, то $x = \pm 6$. З іншого боку, рівняння директрис гіперболи можна записати так: $x = \pm \frac{a_{\text{г}}}{e_{\text{г}}}$, або $x = \pm \frac{a_{\text{г}}^2}{c_{\text{г}}}$. Тоді маємо $\frac{a_{\text{г}}^2}{c_{\text{г}}} = 6$, тобто $a_{\text{г}}^2 = 6c_{\text{г}} = 60$; $b_{\text{г}}^2 = c_{\text{г}}^2 = a_{\text{г}}^2 = \,= 100 - 60 = 40$, і рівняння гіперболи набуває вигляду $\frac{x^2}{60} - \frac{y^2}{40} = 1$.

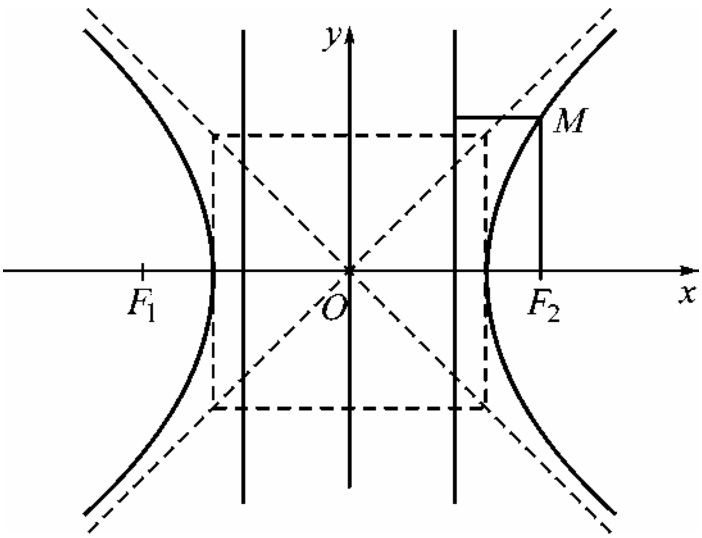


Рис. 1.8.7

Приклад 1.8.16. Скласти рівняння параболи, вершини якої знаходяться у початку координат, якщо:

1) парабола розташована у правій півплощині симетрично відносно осі Ox і її параметр $p = 3$;

2) парабола розташована у лівій півплощині симетрично відносно осі Ox і її параметр $p = 0{,}5$;

3) парабола розташована у верхній півплощині симетрично відносно осі Oy і її параметр $p = \frac{1}{4}$;

4) парабола розташована у нижній півплощині симетрично відносно осі Oy і її параметр $p = 3$.

Розв'язання.

1. Оскільки парабола розташована у правій півплощині симетрично відносно осі Ox, то її рівняння має вигляд $y^2 = 2px$. Враховуючи, що $p = 3$, маємо рівняння $y^2 = 6x$.

2. Аналогічно першому прикладу складаємо рівняння параболи $y^2 = -2px$, або $y^2 = -2\frac{1}{2}x$.

3. Враховуючи, що вісь параболи збігається з віссю ординат і парабола розташована у верхній півплощині, маємо рівняння параболи $x^2 = 2py$, або $x^2 = \frac{1}{2}y$.

4. Відмінність від третього прикладу полягає в тому, що парабола

розташована в нижній півплощині та $p=3$, отже, рівняння має вигляд $x^2=-6y$.

Приклад 1.8.17. Скласти рівняння параболи, яка має фокус у точці $F(0;-3)$ і проходить через початок координат. Віссю параболи є вісь ординат.

Розв'язання. Враховуючи означення параболи, маємо $\frac{p}{2}=3$, $p=6$. Отже, рівнянням параболи є $x^2=-12y$.

1.8.2. Загальна теорія кривих другого порядку на площині. Зведення рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду

Кривою другого порядку називається множина точок площини, координати яких у деякій декартовій системі задовольняють рівнянню

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+b_1x+b_2y+c=0,\ a_{11}^2+a_{12}^2+a_{22}^2\neq 0.$$

Підкреслимо, що хоча б один із коефіцієнтів a_{11}, a_{12}, a_{22} повинен відрізнятися від нуля. Коефіцієнт при xy позначено $2a_{12}$ лише для зручності.

Для всякої кривої існує прямокутна система координат, в якій рівняння кривої має найпростіший, або так званий канонічний вигляд. Зведення рівняння кривої до такого вигляду дозволяє визначити назву лінії, знайти її параметри і те, як розташована лінія відносно першої системи координат, нарешті, побудувати шукану криву.

Існує дев'ять типів канонічних рівнянь кривих 2-го порядку на площині (табл. 1.8.1). Зауважимо, що деякі з них визначають порожню множину точок.

Таблиця 1.8.1

Канонічне рівняння	Назва кривої
$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$	Еліпс
$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=0$	Пара уявних прямих, що перетинаються в точці $(0;0)$
$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=-1$	Уявний еліпс (порожня множина точок)
$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$	Гіпербола
$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=0$	Пара прямих, що перетинаються в точці $(0;0)$
$Y^2=2pX$	Парабола
$Y^2=a^2$	Пара паралельних прямих
$Y^2=0$	Пряма лінія (так званий випадок однакових прямих)
$Y^2=-a^2$	Уявні паралельні прямі (порожня множина точок)

Будь-яке рівняння кривої можна звести до одного з дев'яти виглядів за допомогою таких кроків:

1. Скласти матрицю A квадратичної форми: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Зауважимо, що матриця A – обов'язково симетрична.

2. Знайти λ_1 та λ_2 – власні значення матриці A та відповідні їм власні вектори $\vec{e}_1$ та $\vec{e}_2$. Зауважимо, що корені характеристичного рівняння λ_1, λ_2 належать R, а вектори $\vec{e}_1$ та $\vec{e}_2$ перпендикулярні, оскільки матриця A – симетрична.

3. Знайти $|\vec{e}_1|$ та $|\vec{e}_2|$ і записати стовпці з координат векторів $\vec{h}_1 = \dfrac{\vec{e}_1}{|\vec{e}_1|}$, $\vec{h}_2 = \dfrac{\vec{e}_2}{|\vec{e}_2|}$, $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \end{pmatrix}$, $\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} h_{12} \\ h_{22} \end{pmatrix}$. Вектори $\vec{h}_1$ та $\vec{h}_2$ складають пару перпендикулярних векторів довжиною 1, вздовж яких прямуватимуть нові координати осей Ox_1 та Oy_1.

4. Скласти матрицю H із попередніх стовпців:

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}.$$

Зробити перетворення координат x та y:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

де x_1 та y_1 – координати у новій системі.

5. Підставити вирази для x та y через x_1 та y_1 у рівняння кривої.

Зауваження. Згідно з теорією перетворення матриці квадратичної форми при такій зміні координат квадратична форма автоматично набуває вигляду

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2.$$

6. Спростити вираз, після чого виділити повні квадрати та зробити паралельний перенос системи Ox_1y_1. В одержаній системі $\tilde{O}xy$ побудувати криву.

Приклад 1.8.18. Звести рівняння лінії $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$ до канонічного вигляду, зобразити криву.

Розв'язання.

1. Запишемо матрицю $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Знаходимо її власні значення: $Det(A - \lambda E) \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$,

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0, \quad \lambda_1 = 2, \; \lambda_2 = 4.$$

Знаходимо власні вектори, що відповідають λ_1, λ_2:

– для $\lambda_1 = 2$ маємо $\begin{cases} x + y = 0, \\ x + y = 0 \end{cases}$ і власний вектор $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

– для $\lambda_2 = 4$ маємо $\begin{cases} -x + y = 0, \\ x - y = 0 \end{cases}$ і власний вектор $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

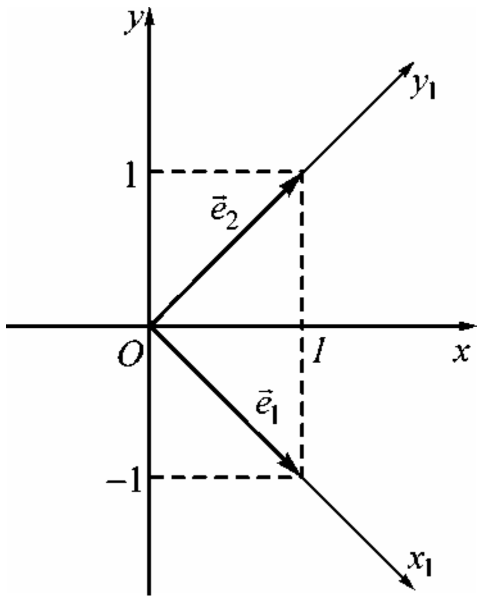


Рис. 1.8.8

Можна побудувати $\vec{e}_1$ та $\vec{e}_2$ і побачити, що нову систему координат одержано поворотом старої на кут 45° за годинниковою стрілкою (рис. 1.8.8).

3. Зауважимо, що рівняння кривої не містить $b_1 x$ та $b_2 y$, тому можна не знаходити *H*, а одразу записати рівняння

$$2x_1^2 + 4y_1^2 = 4 .$$

Зауваження. Коефіцієнти при x_1^2 та y_1^2 – це власні значення матриці A.

Якщо вистачає часу, то корисно самостійно переконатися в тому, що рівняння матиме саме такий вигляд після заміни

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

та підстановки $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + y_1), \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x_1 + y_1) \end{cases}$ у перше рівняння кривої.

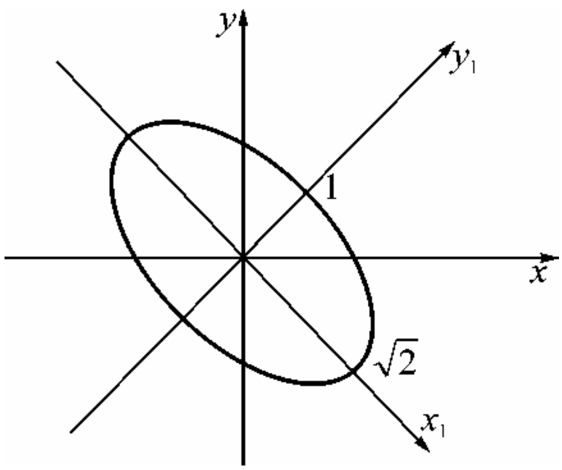


Рис. 1.8.9

Рівняння $2x_1^2 + 4y_1^2 = 4$, або $\frac{x_1^2}{2} + y_1^2 = 1$ – канонічне рівняння еліпса з півосями $a = \sqrt{2}$, $b = 1$, який є симетричним відносно нових осей координат Ox_1 та Oy_1 (рис. 1.8.9).

Приклад 1.8.19. Звести рівняння даної лінії $x^2 + 6xy + 9y^2 - 12x - 6y - \frac{3}{4} = 0$ до канонічного вигляду і зобразити криву.

Розв'язання.

1. Матриця квадратичної форми $x^2 + 6xy + 9y^2$ має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. Шукаємо власні значення:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

звідки $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 10$.

Знаходимо відповідні власні вектори:

– для $\lambda_1 = 0$ маємо $\begin{cases} x + 3y = 0, \\ 3x + 9y = 0, \end{cases}$ тобто $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$;

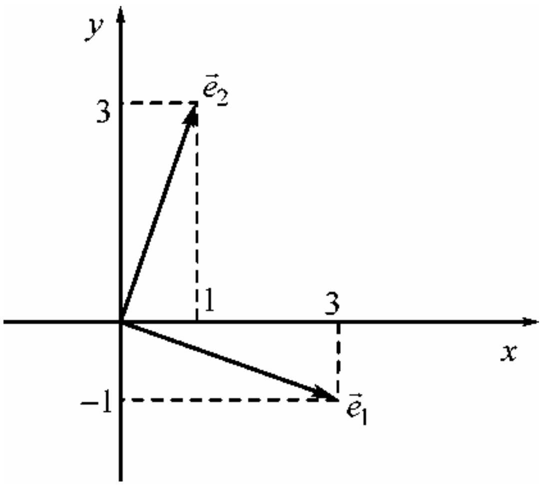


Рис. 1.8.10

– для $\lambda_2 = 10$ маємо $\begin{cases} -9x + 3y = 0, \\ 3x - y = 0, \end{cases}$ тобто $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Звернемо увагу на те, що $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$. Саме ці вектори і визначають напрямок нових координатних осей Ox_1 та Oy_1 (рис. 1.8.10).

3. Знаходимо $|\vec{e}_1| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$, $|\vec{e}_2| = \sqrt{10}$. Складаємо матрицю H із стовпців координат векторів:

$$\vec{h}_1 = \frac{\vec{e}_1}{\sqrt{10}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{-1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}, \ \vec{h}_2 = \frac{\vec{e}_2}{\sqrt{10}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix};$$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{-1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}.$$

4. Перетворюємо координати:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

тобто $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(3x_1 + y_1), \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(-x_1 + 3y_1). \end{cases}$

5. Підставивши вирази для x та y у рівняння кривої (нагадаємо, що квадратична форма перетвориться на $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2$), у даному випадку матимемо

$$O\cdot x_1^2+10y_1^2-12(3x_1+y_1)\frac{1}{\sqrt{10}}-6(-x_1+3y_1)\frac{1}{\sqrt{10}}-0{,}75=0,$$

або

$$10y_1^2-\frac{30}{\sqrt{10}}y_1-\frac{30}{\sqrt{10}}x_1-0{,}75=0.$$

Залишилось зробити паралельний перенос:

$$10\left(y_1^2-2\frac{3y_1}{2\sqrt{10}}+\frac{9}{4\cdot 10}\right)-3\sqrt{10}x_1-0{,}75=\frac{9}{4},$$

$$10\left(y_1-\frac{3}{2\sqrt{10}}\right)^2=3\sqrt{10}x_1+3.$$

У координатах $\begin{cases} x_1+\dfrac{1}{\sqrt{10}}=X, \\ y_1-\dfrac{3}{2\sqrt{10}}=Y \end{cases}$ маємо рівняння параболи $10Y^2=3\sqrt{10}X$.

Парабола (рис. 1.8.11) симетрична відносно $\widetilde{O}X$ (точка $\widetilde{O}$ в системі координат Ox_1y_1 має координати $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}};\dfrac{3}{2\sqrt{10}}\right)$).

Зауваження. Здійснити перетворення рівняння кривої можна також поворотом системи координат Oxy на деякий кут φ :

$$\begin{cases} x=x_1\cos\varphi-y_1\sin\varphi, \\ y=x_1\sin\varphi+y_1\cos\varphi, \end{cases}$$

де кут φ знаходиться із рівняння

$$tg^2\varphi+\frac{a_{11}-a_{22}}{a_{12}}tg\varphi-1=0, \text{ або}$$

$$tg2\varphi=\frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}.$$

У випадку $a_{11}=a_{22}$ можна здійснити поворот на кут $\varphi=45^\circ$ проти годинникової стрілки. Після повороту рівняння кривої не містить добутку x_1y_1.

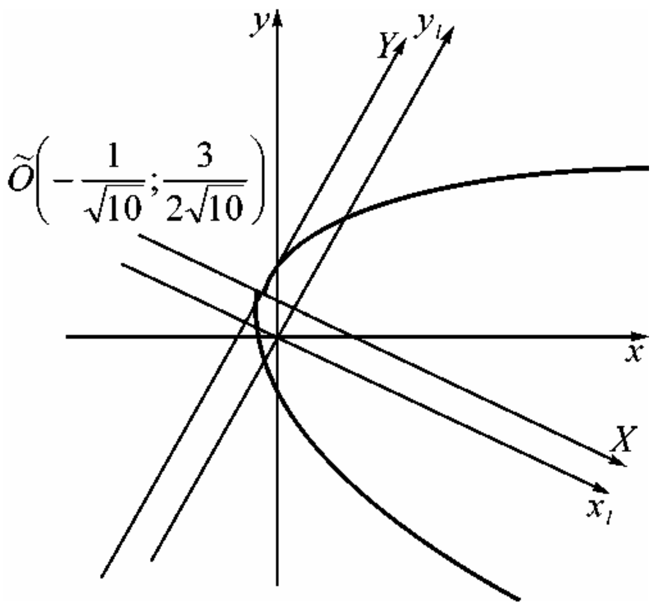


Рис. 1.8.11

Приклад 1.8.20. Поворотом системи координат звести до канонічного вигляду рівняння

$$3x^2-10xy+3y^2=1.$$

Розв'язання. Знаходимо φ :

$$tg^2\varphi+\frac{3-3}{-5}tg\varphi-1=0;$$

можна взяти $\varphi = 45^\circ$, тобто

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} x_1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} y_1, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} y_1. \end{cases}$$

Змінимо координати:

$$3(x_1 - y_1)^2 \cdot \frac{1}{2} - 10(x_1 - y_1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + y_1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 3(x_1 + y_1)^2 \cdot \frac{1}{2} = 1,$$

$$\frac{3}{2}(x_1^2 - 2x_1y_1 + y_1^2) - \frac{10}{2}(x_1^2 - y_1^2) + \frac{3}{2}(x_1^2 + 2x_1y_1 + y_1^2) = 1.$$

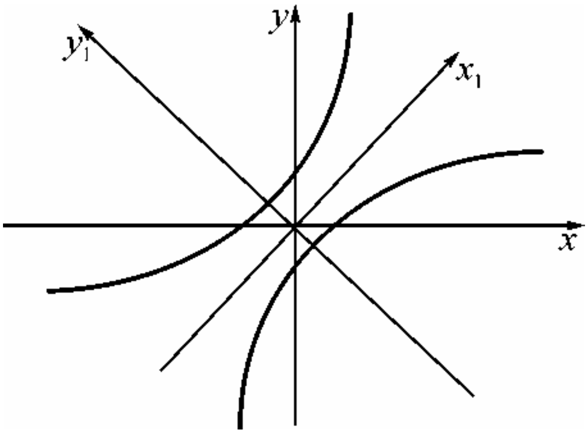


Рис. 1.8.12

Остаточний вигляд рівняння: $-2x_1^2 + 8y_1^2 = 1$ (гіпербола) (рис. 1.8.12).

Звернемо увагу на те, що коефіцієнти –2 та 8 при x_1^2 та y_1^2 є саме власними значеннями матриці квадратичної форми $3x^2 - 10xy + 3y^2$:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Іноді спричиняє труднощі сама побудова лінії. У такому випадку не треба боятися підставити у рівняння будь-які значення x_1 або y_1:

$$-2x_1^2 + 8y_1^2 = 1.$$

Якщо $x_1 = 0$, то $y_1 = \pm\dfrac{1}{\sqrt{8}}$, і маємо дві точки перетину гіперболи з віссю Oy_1: $(0; \pm\dfrac{1}{\sqrt{8}})$. Якщо $y_1 = 0$, то $-2x_1^2 = 1$, $x_1 = 0$, тобто гіпербола не перетинає вісь Ox_1.

1.8.3. Поверхні другого порядку у просторі

Загальне рівняння поверхні другого порядку у просторі має вигляд

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + b = 0.$$

Ліва частина містить квадратичну форму

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2$$

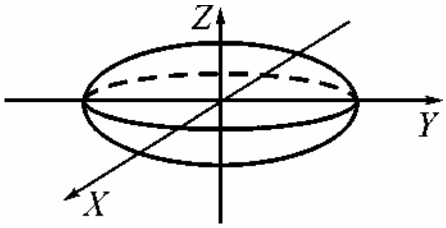
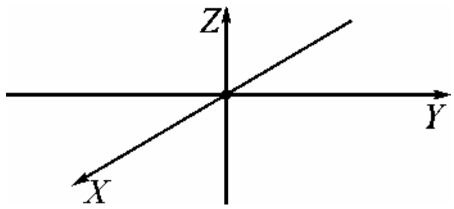
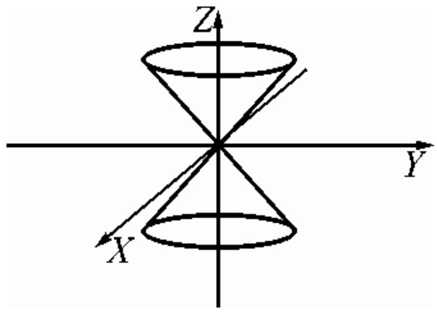
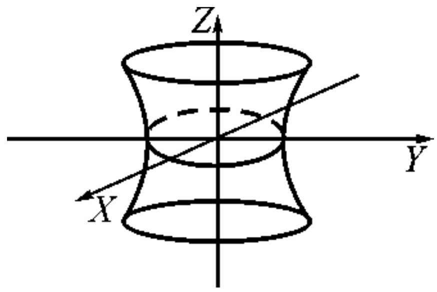
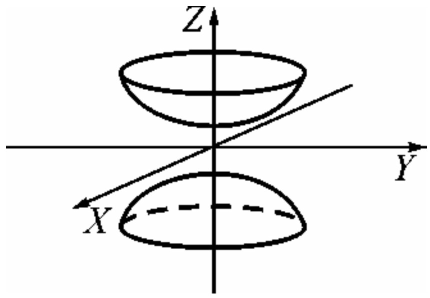
з симетричною матрицею

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

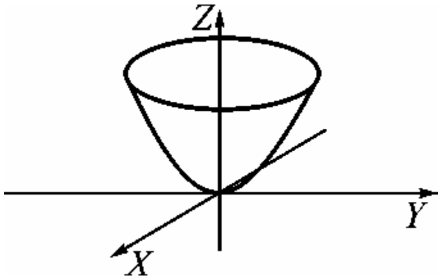
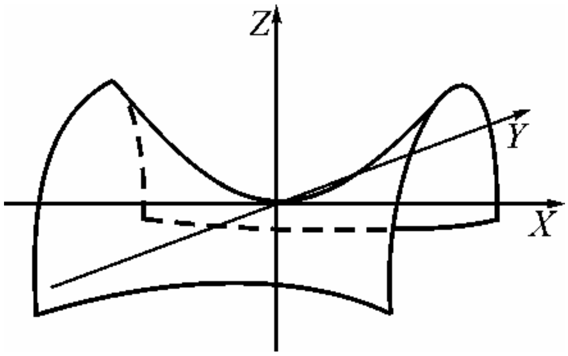
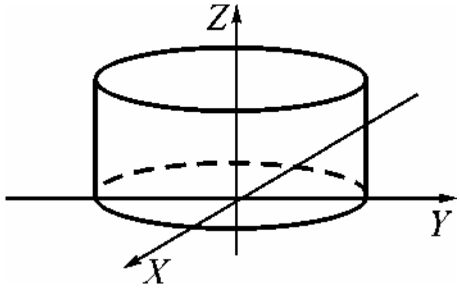
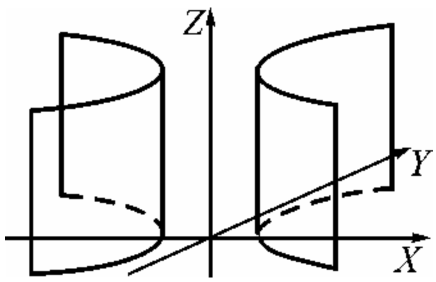
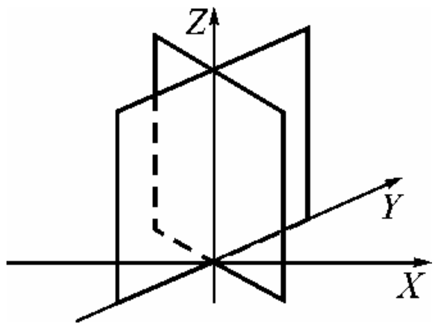
За допомогою заміни базису у просторі можна “знищити” добутки змінних (звести квадратичну форму до канонічного вигляду). Потім слід виділити повні квадрати і здійснити паралельний перенос осей координат. Підкреслимо, що алгоритм зведення рівняння поверхні другого порядку збігається з алгоритмом спрощення рівняння кривої другого порядку.

Внаслідок перетворень рівняння поверхні набуває канонічного вигляду. Перелічимо усі 17 можливих випадків (табл. 1.8.2), до яких приводять перетворення (слід зазначити, що можливе виникнення таких випадків, коли рівняння описують порожню множину точок у просторі).

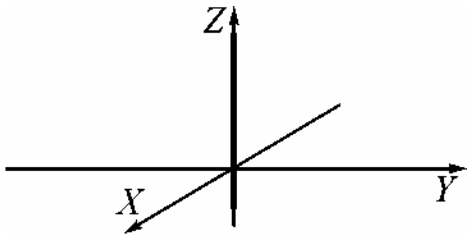
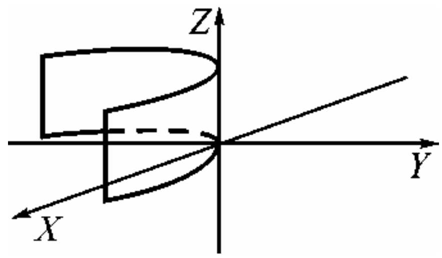
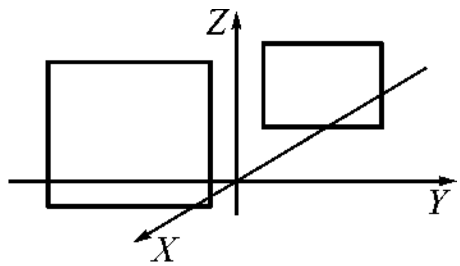
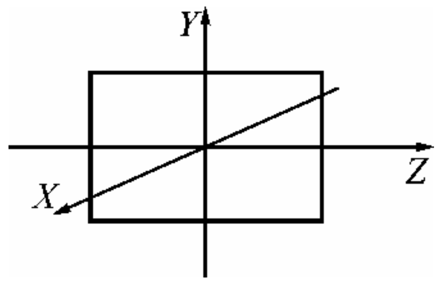
Таблиця 1.8.2

№ п/п	Назва поверхні та канонічне рівняння	Зображення
1	Еліпсоїд $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$	
2	Уявний еліпсоїд $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=-1$	Порожня множина точок
3	Уявний конус (точка) $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=0$	
4	Конус $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=\frac{Z^2}{c^2}$	
5	Однопорожнинний гіперболоїд $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1$	
6	Двопорожнинний гіперболоїд $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=-1$	

Продовження табл. 1.8.2

№ п/п	Назва поверхні та канонічне рівняння	Зображення
7	Еліптичний параболоїд $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=2Z$	
8	Гіперболічний параболоїд (“сідло”) $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=2Z$	
9	Еліптичний циліндр $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$	
10	Уявний еліптичний циліндр $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=-1$	$\varnothing$
11	Гіперболічний циліндр $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$	
12	Пара площин, що перетинаються $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=0$	

Закінчення табл. 1.8.2

№ п/п	Назва поверхні та канонічне рівняння	Зображення
13	Пара уявних площин, що перетинаються $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=0$ (пряма лінія)	
14	Параболічний циліндр $X^2=2pY$	
15	Пара паралельних площин $X^2=a^2$	
16	Пара уявних паралельних площин $X^2=-a^2$	Порожня множина точок
17	Пара площин, що збігаються (площина) $X^2=0$	

Частина канонічних рівнянь поверхонь другого порядку, наприклад № 9-17, має вигляд $\Phi(x;y)=0$. Це рівняння не містить однієї з координат, у даному випадку – z. Таке рівняння визначає *циліндричну* поверхню, твірні якої паралельні осі OZ .

Іноді в рівнянні поверхні другого порядку збігаються коефіцієнти при x^2 та y^2, тоді рівняння можна записати у вигляді $F(x^2+y^2,z)=0$, і воно задає *поверхню обертання* навколо осі OZ (див. приклад 1.8.23).

Цікаво, що вже в Стародавній Греції математики знали, що на одній поверхні другого порядку розташовані всі криві другого порядку, а саме на конусі. Еліпс, гіпербола та парабола мають навіть спільну назву – конічні перерізи (або коніки). Якщо перерізати конус площинами під різними кутами, легко побачити коло та еліпс (рис. 1.8.13).

Перерізом конуса площиною, що паралельна осі, але не проходить через вершину, є гіпербола (рис. 1.8.14).

Якщо площина проходить паралельно твірній, маємо у перерізі параболу (рис. 1.8.15).

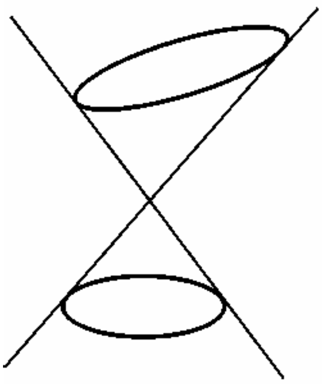


Рис. 1.8.13

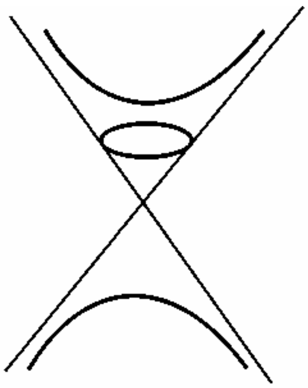


Рис. 1.8.14

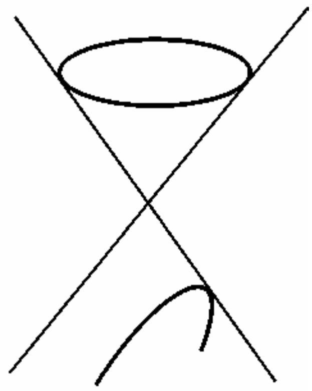


Рис. 1.8.15

Приклад 1.8.21. Знайти канонічну систему координат та канонічне рівняння поверхні $x^2 - 3y^2 + 2x + 6y - 2z + 2 = 0$. Визначити тип поверхні.

Розв'язання. Рівняння не містить добутків xy, xz, yz, отже, для пошуку канонічного рівняння можна просто виділити повні квадрати:

$$(x+1)^2 - 3(y-1)^2 = 2z - 4\,.$$

Нехай $x+1 = X$, $y-1 = Y$, $z-2 = Z$, тоді маємо $X^2 - 3Y^2 = 2Z$. Ми здійснили лише паралельний перенос системи координат: перенесли початок координат у точку $(-1;1;2)$, залишивши незмінними напрямки координатних осей. Одержане рівняння описує гіперболічний параболоїд (“сідло”).

Цікаво зауважити, що на “сідлі” розташовані прямі лінії. Дійсно, легко побачити їх у рівнянні перерізу $Z = 0$: $x = \pm\sqrt{3}Y$.

Приклад 1.8.22. Визначити тип поверхні

$$4z^2 - 3x^2 + 4yz - 4xy + 8zx = 0$$

і записати її канонічне рівняння.

Розв'язання. Запишемо матрицю квадратичної форми:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Визначимо її власні значення:

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & -2 & 4 \\ -2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0\,,$$

або

$$-\lambda^3 + \lambda^2 + 36\lambda - 36 = 0\,.$$

Рівняння має корені $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = -6$.

Знайдемо відповідні власні вектори:

– для $\lambda_1 = 1$ маємо $\begin{cases} -x - 2y + 4z = 0, \\ -2x - y + 2z = 0, \\ 4x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$ і власний вектор, наприклад,

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix};$$

– для $\lambda_2 = 6$ маємо $\begin{cases} -9x - 2y + 4z = 0, \\ -2x - 6y + 2z = 0, \\ 4x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$ і власний вектор $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$;

– для $\lambda_3 = -6$ $\quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Нагадаємо, що з симетрії матриці A випливає перпендикулярність власних векторів.

Запишемо рівняння поверхні $1X^2 + 6Y^2 - 6Z^2 = 0$ (відсутність лінійних доданків дозволяє автоматично скористатись зведенням квадратичної форми до канонічного вигляду). Маємо рівняння конуса, вісь якого – нова вісь OZ. Канонічна система координат має той же початок, що й $Oxyz$, а напрямками нових осей OX, OY та OZ є напрямки

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що за відсутності лінійних членів для визначення типу поверхні власні вектори навіть не потрібні.

Приклад 1.8.23. Визначити тип поверхні

$$x^2 - 3z^2 - 4yz - 4y + 2z + 5 = 0.$$

Розв'язання. Запишемо матрицю квадратичної форми:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Визначимо її власні значення:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \ (1-\lambda)(\lambda^2 + 3\lambda - 4) = 0,$$

звідки $\lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = -4$.

Нарешті, знайдемо власні вектори.

Для $\lambda = 1$ маємо систему

$$\begin{cases} -y-2z=0, \\ -2y-4z=0, \end{cases}$$

або просто $y+2z=0$.

Геометрично множина власних векторів утворює *площину*. Візьмемо у цій площині два перпендикулярних вектори:

$$\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

Для $\lambda=-4$ маємо $\begin{cases} 5x=0, \\ 4y-2z=0, \\ -2y+z=0, \end{cases}$ $\vec{e}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$.

Знайдемо ортонормовану трійку власних векторів

$$\vec{e}\,'_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \vec{e}\,'_2=\begin{pmatrix}0\\-\frac{2}{\sqrt5}\\\frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix},\ \vec{e}\,'_3=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt5}\\\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}$$

і складемо матрицю переходу

$$H=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\\0&\frac{1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}.$$

Перетворимо координати

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=H\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$$

та підставимо їх у рівняння поверхні:

$$1(x')^2+1(y')^2-4(z')^2-4\left(-\frac{2}{\sqrt5}y'+\frac{1}{\sqrt5}z'\right)+2\left(\frac{1}{\sqrt5}y'+\frac{2}{\sqrt5}z'\right)+5=0,$$

$$x'^2+y'^2-4z'^2+\frac{2}{\sqrt5}y'+5=0,$$

$$x'^2+\left(y'+\sqrt5\right)^2=4z'^2.$$

Отже, одержано рівняння конуса.

Зауваження. Остаточний вигляд рівняння: $X^2+Y^2=4Z^2$.

Підкреслимо, що маємо *поверхню обертання* навколо осі OZ. Саме із цим було пов′язане те, що власні вектори у площині, що відповідала значенням $\lambda_1=\lambda_2=1$, можна було брати довільно.

2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ТА ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

2.1. ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ. ГРАНИЦЯ. НЕПЕРЕРВНІСТЬ

2.1.1. Елементи теорії множин

1. Первісні поняття теорії множин і алгебри логіки.

Поняття множини є одним із основних первісних понять математики і не визначається через інші більш прості поняття.

Можна говорити про множини студентів ХАІ, планет сонячної системи, натуральних чисел, коренів квадратного рівняння і т. д.

Об'єкти, з яких складається множина, – елементи цієї множини.

Множини будемо позначати A, B, …, X, Y, ..., їх елементи – a, b, …, x, y, ….

Якщо a – елемент множини A, то позначають $a \in A$ або $A \ni a$ (a належить множині A або множина A включає елемент a).

Якщо об'єкт a не є елементом множини A, то позначають $a \notin A$ або $A \not\ni a$ (a не належить множині A або множина A не включає елемент a).

Математичне речення, відносно якого можна стверджувати, істинне воно чи ні, називається висловлюванням. Висловлювання позначаються α, $\alpha(x)$, β, $\beta(x)$, ….

Приклади висловлювань:

1) у трикутнику сума кутів дорівнює 180°;
2) трикутник може мати два тупі кути;
3) число 15 ділиться на 1, 3, 5, 15.

Усі наведені приклади – висловлювання: перше і третє – істинні, друге – хибне.

Для стислого запису висловлювань, одержання більш складних висловлювань із простих, зв'язку одних висловлювань з іншими використовують символіку алгебри логіки.

Назва, зміст (читання) логічних знаків:

$\Rightarrow$ – "випливає";

$\Leftrightarrow$ – символ еквівалентності – "рівносильне", "еквівалентне";

$\forall$ – квантор загальності – "для всіх", "для кожного";

$\exists$ – квантор існування – "існує", "знайдеться";

$\exists!$ – "існує точно один";

: – "справедливе", "для якого справедливе, істинне твердження";

$:=$, $\underline{\underline{\mathrm{def}}}$ – “дорівнює за означенням”;

$-$, $\neg$ – логічне заперечення – “не”;

$\vee$ – логічне додавання, диз’юнкція – “або”;

$\wedge$ – логічне множення, кон’юнкція – “і”.

Порядок пріоритету логічних операцій:

$$\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \Rightarrow,\ \Leftrightarrow .$$

Приклади висловлювань, записаних з допомогою логічних знаків:

1) $f^2 > \varphi^2 \Leftrightarrow |f| > |\varphi|$;

2) $a > b > 0 \Rightarrow a^2 > b^2$;

3) $\forall x \neq 0 : \left| x + \dfrac{1}{x} \right| \geq 2$;

4) $\exists x : x^2 - x - 2 = 0$;

5) $\exists! x : 3^x = 5$;

6) $\sqrt[n]{a^m} := a^{\frac{m}{n}}$.

Висловлювання в загальній формі і їх зміст:

1) $\alpha \Rightarrow \beta$ – “із висловлювання α випливає висловлювання β”;

2) $\alpha \Leftrightarrow \beta$ – “висловлювання α і β еквівалентні”;

3) $\forall x \in X$: α – “для кожного елемента x множини X істинне висловлювання α”;

4) $\exists x \in X$: α – “існує елемент x множини X, для якого істинне висловлювання α”;

5) $\exists! x \in X$: α – “існує єдиний елемент x множини X, для якого істинне висловлювання α”;

6) $\overline{\alpha}$ – заперечення висловлювання α; коли α істинне, то $\overline{\alpha}$ – хибне, і навпаки, коли α – хибне, то $\overline{\alpha}$ – істинне;

7) $\alpha \vee \beta$ – “α або β” – висловлювання, яке істинне, коли істинне хоча б одне із висловлювань α або β;

8) $\alpha \wedge \beta$ – “α і β” – висловлювання, яке істинне, коли істинні обидва висловлювання α і β.

Приклад 2.1.1. Побудувати заперечення висловлювання $\forall x \in X : \alpha$.

Розв’язання. Якщо висловлювання $\forall x \in X : \alpha$ не має місця, то висловлювання α має місце не для всіх $x \in X$, тобто існує елемент $x \in X$, для якого α не має місця, а справедливе $\overline{\alpha}$. У символьній формі маємо $\exists x \in X : \overline{\alpha}$.

Таким чином, $\overline{\forall x \in X : \alpha} \Leftrightarrow \exists x \in X : \overline{\alpha}$.

Зауваження. Справедливо $\overline{\exists x \in X : \alpha} \Leftrightarrow \forall x \in X : \overline{\alpha}$.

Способи задання множин:

1) задання множини за допомогою переліку її елементів, наприклад: якщо множина A складається із елементів a, b, c, …, m, а множина X – із елементів x_1, x_2, …, x_{15}, то позначають $A = \{a, b, c, \ldots, m\}$, $X = \{x_1, x_2, \ldots x_{15}\}$;

2) задання множини визначенням властивості її елементів.

Часто при розв'язанні математичної задачі розглядаються декілька множин, але всі елементи цих множин є елементами більш широкої множини Ω, яку називають основною, універсальною.

Елементи x даної множини X вилучають з універсальної множини Ω, указавши властивість $P(x)$, яку мають елементи множини X. Позначають $X\{x \in \Omega \mid P(x)\}$ (множина X складається із тих елементів x множини Ω, які мають властивість $P(x)$).

Приклади:

1) якщо ми оперуємо цілими числами, а нам треба виділити множину цілих невід'ємних чисел, то можна записати $Z_0 = \{x \in Z \mid x \geq 0\}$;

2) множину парних чисел із множини цілих чисел можна вилучити так: $B = \{x \in Z \mid x \vdots 2\}$ (множина B складається із тих чисел x множини Z, які націло діляться на 2, "$\vdots$" – знак ділення націло).

Зручно також ввести множину, яка не містить елементів. Цю множину називають порожньою і позначають символом $\varnothing$.

Якщо при розв'язанні квадратного рівняння $x^2 + x + 2 = 0$ пишуть $x \in \varnothing$, то мають на увазі, що множина розв'язків цього рівняння порожня, тобто рівняння коренів не має.

2. Дії над множинами.

Означення 2.1.1. Множина B називається підмножиною множини A, або множина B міститься в множині A, якщо всі елементи множини B є елементами множини A.

Позначення: $B \subset A$, $A \supset B$.

Домовимося, що $\varnothing \subset A$ для будь-якої множини A, водночас $A \subset \Omega$, де Ω – універсальна множина (якщо вона взагалі розглядається).

Означення 2.1.2. Множини A і B називаються рівними, якщо вони складаються з одних і тих же елементів.

Позначення: $A = B$.

Очевидно, що $A = B \Leftrightarrow B \subset A$ і $A \subset B$.

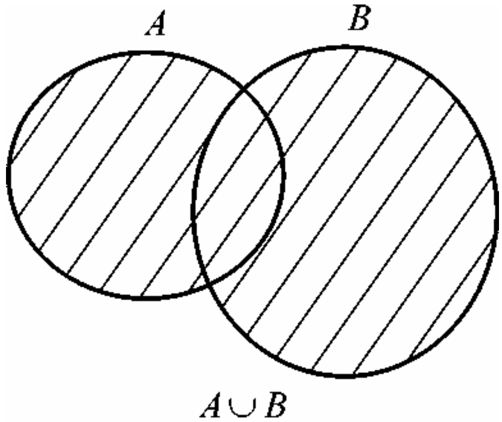


Рис. 2.1.1

Означення 2.1.3. Об'єднанням (сумою) множин A і B називають множину, яка складається з усіх елементів, що належать хоча б одній із множин A і B.

Позначення: $A \bigcup B$, $A + B$.

Таким чином, $A \bigcup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ (рис. 2.1.1).

Аналогічно означається сума довільного (скінченного або нескінченного) числа множин: якщо A_α – довільна множина, то сумою множин $\bigcup\limits_\alpha A_\alpha$ є сукупність елементів, кожний із яких належить хоча б одній із множин A_α.

Означення 2.1.4. Перетином (добутком) множин A і B називають множину, яка складається з усіх елементів, що належать як множині A, так і множині B.

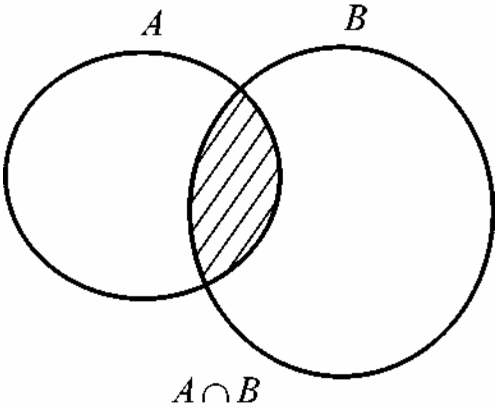


Рис. 2.1.2

Позначення: $A \bigcap B$, $A \cdot B$.

Таким чином, $A \bigcap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ (рис. 2.1.2).

Перетином будь-якого (скінченного або нескінченного) числа множин A_α називається множина $\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha$, кожний елемент якої належить кожній множині A_α.

Приклад 2.1.2. Дано множини A, B, C. Записати множину елементів, які належать:

1) усім трьом множинам;
2) принаймні двом із цих множин;
3) будь-яким двом із цих множин, але не належать усім трьом;
4) принаймні одній із цих множин;
5) будь-якій із цих множин, але не належать двом іншим.

Розв'язання.

1. $D_1 = A \bigcap B \bigcap C$.
2. $D_2 = A \bigcap B \bigcup A \bigcap C \bigcup B \bigcap C$.
3. $D_3 = A \bigcap B \bigcap \overline{C} \bigcup A \bigcap C \bigcap \overline{B} \bigcup B \bigcap C \bigcap \overline{A}$.
4. $D_4 = A \bigcup B \bigcup C$.
5. $D_5 = A \bigcap \overline{B} \bigcap \overline{C} \bigcup B \bigcap \overline{A} \bigcap \overline{C} \bigcup C \bigcap \overline{A} \bigcap \overline{B}$.

Операції об′єднання і перетину множин за своїми означеннями комутативні і асоціативні, тобто

$$A \bigcup B = B \bigcup A,\ A \bigcap B = B \bigcap A,\ (A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C),$$
$$(A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C).$$

Крім того, ці операції зв'язані між собою такими властивостями дистрибутивності:

$$(A \bigcup B) \bigcap C = (A \bigcap C) \bigcup (B \bigcap C), \qquad (2.1.1)$$
$$(A \bigcap B) \bigcup C = (A \bigcup C) \bigcap (B \bigcup C). \qquad (2.1.2)$$

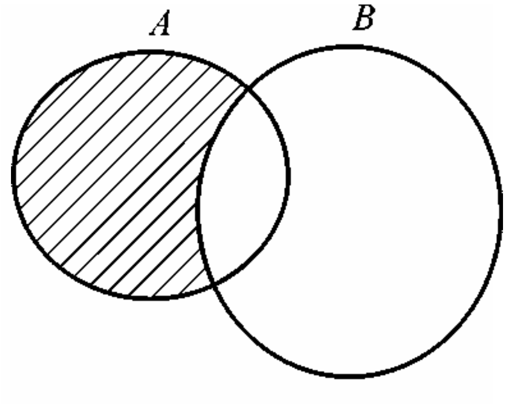
Приклад 2.1.3. Довести формулу (2.1.1).

Розв'язання. Нехай елемент x належить множині, яка стоїть у лівій частині рівності: $x \in (A \bigcup B) \bigcap C$. Це означає, що x належить C і хоча б одній із множин A або B. Але тоді x належить хоча б одній із множин $A \bigcap C$ або $B \bigcap C$, тобто входить у праву частину рівності. Навпаки, нехай $x \in (A \bigcap C) \bigcup (B \bigcap C)$. Тоді $x \in A \bigcap C$ або $x \in B \bigcap C$. Отже, $x \in C$ і, крім того, x належить A або B, тобто $x \in A \bigcup B$. Таким чином, $x \in (A \bigcup B) \bigcap C$. Рівність (2.1.1) доведено.

Означення 2.1.5. Різницею множин A і B називається множина, що складається з усіх тих елементів множини A, які не належать множині B.

Позначення: $A \setminus B$.

Таким чином,
$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ (рис. 2.1.3).



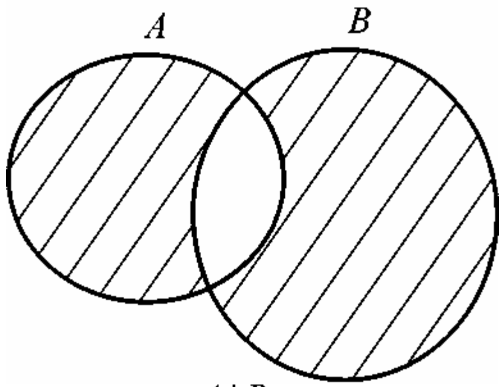
$A \setminus B$

Рис. 2.1.3

Означення 2.1.6. Симетричною різницею множин A і B називається об′єднання різниць $A \setminus B$ і $B \setminus A$ цих множин.

Позначення: $A \Delta B$.

Таким чином, $A \Delta B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A)$ (рис. 2.1.4).



$A \Delta B$

Рис. 2.1.4

Означення 2.1.7. Нехай Ω – універсальна множина, тоді множина $\overline{A} = \Omega \setminus A$ називається доповненням множини A.

Таким чином, $\overline{A} = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$ (рис. 2.1.5).

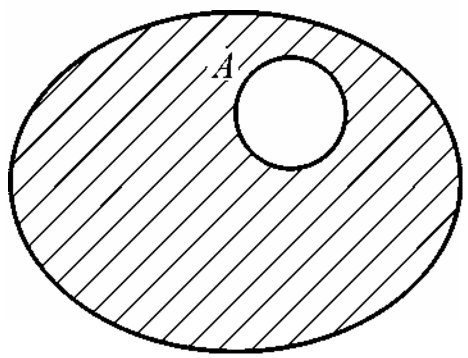


Рис. 2.1.5

Принцип двоїстості:

1) доповнення суми множин дорівнює добутку доповнень множин:

$$\overline{\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}} = \bigcap_{\alpha} \overline{A_{\alpha}}; \qquad (2.1.3)$$

2) доповнення добутку множин дорівнює сумі доповнень множин:

$$\overline{\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}} = \bigcup_{\alpha} \overline{A_{\alpha}}. \qquad (2.1.4)$$

Приклад 2.1.4. Довести співвідношення (2.1.3).

Розв'язання. Нехай $x \in \overline{\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}}$. Це означає, що x не належить об′єднанню $\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$, тобто не належить ні одній із множин A_{α}, тоді x належить кожному із доповнень $\overline{A_{\alpha}}$ і тому $x \in \bigcap_{\alpha} \overline{\mathrm{A}_{\alpha}}$. Навпаки, нехай $x \in \bigcap_{\alpha} \overline{A_{\alpha}}$, тобто x належить кожному із доповнень $\overline{A_{\alpha}}$, тоді x не належить жодній із множин A_{α}, тобто не належить сумі $\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$, а тому $x \in \overline{\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}}$. Рівність (2.1.4) доводиться аналогічно.

Для двох множин принцип двоїстості має вигляд

$$\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}, \quad \overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}.$$

Принцип двоїстості полягає в тому, що із будь-якої теореми, яка відноситься до системи підмножин фіксованої множини Ω, автоматично може бути одержана друга теорема – двоїста – шляхом заміни всіх розглядуваних множин їх доповненнями, суми множин – їх добутком, а добутку – сумою.

2.1.2. Поняття функції однієї змінної. Класи елементарних функцій. Послідовність

1. Означення функції.

Означення 2.1.8. Функцією, визначеною на множині X із значеннями в множині Y (відображенням множини X у множину Y), називається правило, за яким кожному елементу $x \in X$ ставиться у відповідність елемент $y \in Y$.

Функцію позначають так:

$$f : X \to Y\,;\; X \xrightarrow{f} Y\,;\; y = f(x),\; x \in X\,.$$

Кожний запис означає, що f є відображенням множини X у множину Y.

Елемент x називається прообразом, а відповідний елемент y – образом при відображенні f.

Елемент x називають також незалежною змінною, а y – функцією (залежною змінною) аргументу x, а також значенням функції в точці x і позначають символом $f(x)$.

Множина X називається множиною визначення функції f і позначається $D(f)$. Множина тих $y \in Y$, які поставлені у відповідність усім $x \in D(f)$, називається областю значень і позначається $E(f)$.

Залежно від природи множин X і Y і розділів математики термін “функція” має синоніми: відображення, перетворення, оператор, морфізм, функціонал.

Якщо X і Y – множини дійсних чисел, то маємо дійсні числові функції, з якими в основному будемо мати справу.

Означення 2.1.9. Функції $f_1 : X_1 \to Y_1$ і $f_2 : X_2 \to Y_2$ рівні тоді і тільки тоді, коли $X_1 = X_2$ і $\forall x \in X_1 : f_1(x) = f_2(x)$.

Позначення: $f_1 = f_2$.

Іншими словами, дві функції вважаються рівними, або тотожними, коли в них одна і та сама область визначення й один і той же закон відповідності.

Нехай функція $f_1(x)$ визначена на множині X_1, а функція $f_2(x)$ – на множині X_2. Якщо перетин $X = X_1 \bigcap X_2$ не є порожньою множиною, то на ньому можна визначити суму $f_1(x) + f_2(x)$, різницю $f_1(x) - f_2(x)$, добуток $f_1(x) \cdot f_2(x)$ і частку $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ двох функцій (останню для тих $x \in X$, при яких $f_2(x) \neq 0$). У цьому разі під значенням даних функцій у точці $x_0 \in X$ розуміється число, що дорівнює, відповідно, сумі $f_1(x_0) + f_2(x_0)$, різниці

$f_1(x_0)-f_2(x_0)$, добутку $f_1(x_0)\cdot f_2(x_0)$ і частці $\dfrac{f_1(x_0)}{f_2(x_0)}$ значень функцій $f_1(x)$ і $f_2(x)$ у цій точці.

Для наочного зображення функції будують (звичайно, наближено) графік цієї функції.

Означення 2.1.10. Нехай $f:X\to Y$. Графіком функції f називається множина

$$G(f):=\{(x;y)\in X\times Y\,|\,x\in X,y=f(x)\},$$

яка є підмножиною $X\times Y$.

Якщо взяти прямокутну систему координат на площині та побудувати на ній точки $M(x;f(x))$ для всіх $x\in X$, то множина цих точок і буде графіком функції $y=f(x)$ (рис. 2.1.6).

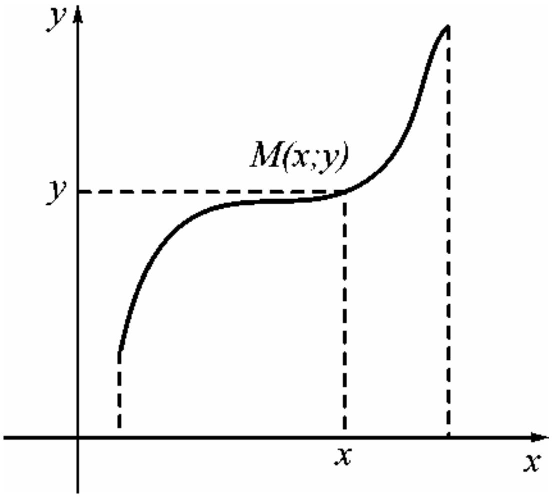


Рис. 2.1.6

Способи задання функцій:

1. *Табличний* у вигляді таблиці

x_1	x_2	$\dots$	x_n
y_1	y_2	$\dots$	y_n

, де $X=\{x_1,x_2,\dots x_n\}$, $Y=\{y_1,y_2,\dots,y_n\}$.

2. *Описовий,* коли в розповідній формі встановлюється відповідність між x і y, наприклад:

– функція Діріхле дорівнює одиниці в раціональних і нулю в ірраціональних точках;

– функція антьє (ціла частина) дорівнює найбільшому цілому числу, яке не перевищує x, і позначається $E(x)$, $[x]$, наприклад: $E(-3{,}5)=-4$, $E(3{,}5)=3$, $E(5)=5$.

3. *Аналітичний*, коли відповідність між x і y задається у вигляді формули і тут же подається область визначення, наприклад:

– $y=\arcsin x+\ln x$, $x\in\left[\dfrac{1}{2};1\right]$;

– $y=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0,\\ x^2, & \text{якщо } x>0,\end{cases}\quad x\in[-1;2)$.

Якщо при записі функції в цій формі нічого не сказано про область визначення, то розуміють природну область визначення – множину тих x, при яких права частина визначена, наприклад:

– $y=\arcsin\ x+\ln x$ (самі знаходимо область визначення: $\begin{cases}|x|\le 1,\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow x\in(0;1]$);

– $y=x^2$ (область визначення R).

4. *Графічний* у вигляді лінії, графіка.

Означення 2.1.11. Нехай $f: X \to Y$ і $A \subset X$, $B \subset Y$. Образом множини A при відображенні f (позначається $f(A)$) називається множина

$$f(A) := \{y \mid \forall x \in A : f(x) = y\} = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

Прообразом множини B при відображенні f (позначається $f^{-1}(B)$) називається множина

$$f^{-1}(B) = \{x \mid \forall y \in B : f(x) = y\} = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Зауважимо, що $f(A) \subset Y$, $f^{-1}(B) \subset X$.

Означення 2.1.12. Відображення $f: X \to Y$ називається відображенням множини X на множину Y (або сюр'єкцією), якщо $f(X) = Y$.

Означення 2.1.13. Відображення $f: X \to Y$ називається взаємно однозначним відображенням множини X на множину Y (або ін'єкцією), якщо $\forall x_1 \in X \, \forall x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Означення 2.1.14. Відображення $f: X \to Y$ називається таким, що здійснює взаємно однозначну відповідність між множинами X і Y, якщо воно взаємно однозначно відображає множину X на множину Y (відображення, яке є сюр'єкцією і ін'єкцією, називається бієкцією).

Обернена функція.

Означення 2.1.15. Нехай $f: X \to Y$ – взаємно однозначне відображення множини X на множину Y (бієкція). Функція, яка кожному елементу $y \in Y$ ставить у відповідність елемент $x \in X$, такий, що $f(x) = y$, називається оберненою до функції $f(x)$ і позначається $x = \varphi(y)$, $x = f^{-1}(y)$.

Функції $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ – взаємно обернені функції.

Графіки функцій $y = f(x)$ і $x = f^{-1}(y)$ збігаються.

Для зручності в залежності $x = f^{-1}(y)$ заміняють x на y і y на x, в результаті одержують функції $y = f(x)$ і $y = f^{-1}(x)$, які також називаються взаємно оберненими функціями. Графіки функцій $y = f(x)$ і $y = f^{-1}(x)$ симетричні відносно прямої $y = x$.

Складені функції.

Означення 2.1.16. Нехай задано функції $f: X \to Y$ і $g: Y \to Z$. Їх композицією (суперпозицією, складеною функцією) називається функція

$$F = g \circ f : X \to Z,$$

визначена рівністю

$$F(x) = g(f(x)), \; x \in X.$$

Можлива суперпозиція будь-якого числа функцій.

Якщо задано функції $f_1: X \to X_1$, $f_2: X_1 \to X_2$, …, $f_n: X_{n-1} \to X_n$, то їх суперпозиція має вигляд $F(x) = f_n(f_{n-1}(\ldots f(x)))$.

2. Властивості функцій.

Обмежені функції.

Означення 2.1.17. Функція $f(x)$, визначена на множині X, називається обмеженою зверху (знизу) на цій множині, якщо існує число M, таке, що для всіх $x \in X$ справедливе $f(x) \le M$ ($f(x) \ge M$).

Означення 2.1.18. Функція $f(x)$ називається обмеженою, якщо вона обмежена і знизу, і зверху, тобто існують числа M_1 і M_2, такі, що для всіх $x \in X$ справедливе $M_1 \le f(x) \le M_2$.

Якщо функція обмежена, то обов'язково існує таке число $M > 0$, що для всіх $x \in X$ справедливе $|f(x)| \le M \Leftrightarrow -M \le f(x) \le M$, наприклад:

– функція $f_1(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in X_1 = (0; +\infty)$ обмежена знизу, оскільки $\dfrac{1}{x} > 0$ на X_1;

– функція $f_2(x) = 3 - \dfrac{1}{x}$, $x \in X_2 = (0; 1)$ обмежена зверху, оскільки $3 - \dfrac{1}{x} < 2$ на X_2;

– функція $f_3(x) = 2\cos x$, $x \in R$ обмежена на всій числовій осі: $|2\cos x| \le 2$ на R.

Монотонні функції.

Означення 2.1.19. Функція $f(x)$, визначена на множині X, називається: а) зростаючою, б) спадною, в) неспадною, г) незростаючою на цій множині, якщо із нерівності $x_2 > x_1$ ($x_1, x_2 \in X$) випливає відповідна нерівність:

а) $f(x_2) > f(x_1)$, б) $f(x_2) < f(x_1)$, в) $f(x_2) \ge f(x_1)$, г) $f(x_2) \le f(x_1)$.

Зростаючі, спадні, неспадні, незростаючі функції на множині X називаються монотонними на цій множині, а зростаючі та спадні, крім того, – строго монотонними.

На рис. 2.1.7 функції подано у вигляді графіків: $f_1(x)$ – зростаюча; $f_2(x)$ – неспадна; $f_3(x)$ – спадна; $f_4(x)$ – незростаюча.

Парні і непарні функції.

Нехай X – проміжок, симетричний відносно початку координат числової осі Ox, тобто має вигляд $(-a; a)$ або $[-a; a]$ ($a > 0$, a – скінченне або нескінченне).

Означення 2.1.20. Функція $f(x)$ називається парною на множині X, якщо

$$f(-x) = f(x),$$

і непарною, якщо

$$f(-x) = -f(x),$$

для всіх $x \in X$.

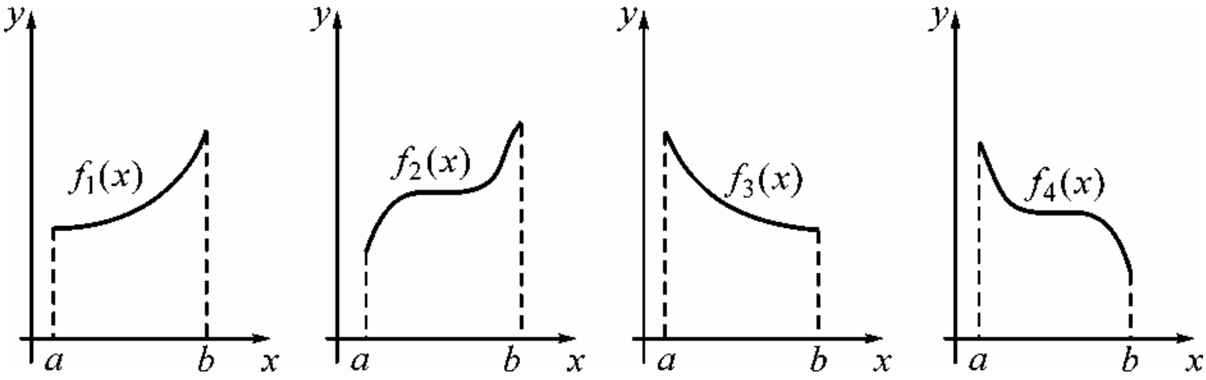


Рис. 2.1.7

Графік парної функції симетричний відносно осі Oy, непарної – відносно початку координат.

Приклад 2.1.5. Довести, що будь-яка функція $f(x)$, визначена на множині X, симетричній відносно початку координат, може бути зображена у вигляді суми двох функцій, одна з яких парна, а друга непарна.

Розв'язання. $f(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} + \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.

Функція $\varphi(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ – парна $\left(\varphi(-x) = \dfrac{f(-x)+f(x)}{2} = \varphi(x)\right)$, а функція $\psi(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ – непарна $\left(\psi(-x) = \dfrac{f(-x)-f(x)}{2} = -\psi(x)\right)$.

Таким чином, $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$, де $\varphi(x)$ – парна, $\psi(x)$ – непарна функції.

Періодичні функції.

Означення 2.1.21. Функція $f(x)$, визначена на всій числовій осі, називається періодичною, якщо існує число $T > 0$, таке, що

$$f(x+T) = f(x)$$

для всіх $x \in R$. Число T називається періодом функції $f(x)$.

Якщо T – період функції, то $f(x-T) = f(x)$, і взагалі $f(x+nT) = f(x)$, де $n \in Z$. Звідси випливає: якщо T – період функції, то kT, де $k \in N$, – також період цієї функції, отже, період функції не знаходиться однозначно. Найменший із періодів називають власне періодом (слово “власне”, як правило, випускають).

Функція, визначена на множині X, називається періодичною, якщо існує $T > 0$, таке, що

$$x+T \in X \text{ і } f(x+T) = f(x)$$

для всіх $x \in X$.

2. Класифікація функцій.

Основні елементарні функції.

Означення 2.1.22. Функції степенева $y = x^{\alpha}$, показникова $y = a^x$, логарифмічна $y = \log_a x$, тригонометричні $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, обернені тригонометричні $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ і стала $y = c$ називаються основними елементарними функціями.

Елементарні функції.

Означення 2.1.23. Функції, одержані з основних елементарних функцій за допомогою скінченного числа арифметичних операцій (додавання, віднімання, множення, ділення), а також операції суперпозиції (в тому числі й основні елементарні функції), називаються елементарними функціями.

Наприклад, функції $y = x^2$, $y = \ln\sqrt{\sin^2 2x} + \dfrac{(\sqrt{x}+3)^3}{\operatorname{tg} x - \arcsin 2x}$ є елементарними, а функції $y = [x]$, функція Діріхле, $y = \begin{cases} -1, \text{якщо } x < 0, \\ 1, \text{ якщо } x \ge 0 \end{cases}$ не є елементарними функціями.

Деякі класи елементарних функцій:

1. Цілі раціональні функції (багаточлени). Це функції вигляду

$$y = P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

де $a_k \in R$ $(k = \overline{0,n})$.

Зауважимо, що сума, різниця, добуток двох багаточленів – також багаточлени, тобто клас багаточленів замкнений відносно трьох арифметичних дій: додавання, віднімання і множення.

2. Раціональні функції. Це функції вигляду

$$y = \frac{P_m(x)}{\widetilde{P}_n(x)} = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n},$$

тобто частка двох багаточленів.

Якщо $n = 0$ і $b_0 \ne 0$, то одержимо багаточлен. Якщо раціональна функція не є цілою, то вона називається дробово-раціональною функцією. Клас раціональних функцій замкнений відносно чотирьох арифметичних дій: додавання, віднімання, множення, ділення.

3. Ірраціональні функції. Це функції, які сконструйовані з раціональних функцій і степеневих функцій з раціональними показниками.

Наприклад: $y = \sqrt[3]{x^3 + 2\sqrt{x^2 + 5}}$.

4. Гіперболічні функції:

– $y = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ – гіперболічний синус (читається “синус гіперболічний x”);

– $y = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ – гіперболічний косинус (читається “косинус гіперболічний x”);

– $y = \operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ – гіперболічний тангенс (читається “тангенс гіперболічний x”);

– $y = \operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ – гіперболічний котангенс (читається “котангенс гіперболічний x”).

Деякі співвідношення між гіперболічними функціями:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \tag{2.1.5}$$

$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x, \tag{2.1.6}$$

$$\operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x, \tag{2.1.7}$$

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y, \tag{2.1.8}$$

$$\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y, \tag{2.1.9}$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x, \tag{2.1.10}$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x, \tag{2.1.11}$$

$$1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \tag{2.1.12}$$

$$\operatorname{cth}^2 x - 1 = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}. \tag{2.1.13}$$

Аналогія між тригонометричними і гіперболічними формулами не випадкова. В теорії функцій комплексної змінної з'ясовується зв'язок між тригонометричними і гіперболічними функціями.

Існує правило одержання гіперболічних формул.

Правило. Щоб одержати гіперболічну формулу, необхідно в аналогічній тригонометричній формулі виконати заміщення:

$$\sin x \leftarrow -i \operatorname{sh} x,\ \cos x \leftarrow \operatorname{ch} x.$$

Наприклад, користуючись формулою $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, можна одержати $(-i \operatorname{sh} x)^2 + \operatorname{ch}^2 x = 1$, $-\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x = 1$, $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

Звичайно цю формулу можна довести на основі означення функцій $\operatorname{sh} x$ і $\operatorname{ch} x$.

5. Обернені гіперболічні функції:

– $y = \operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ (читається “ареасинус гіперболічний x”);

– $y = \operatorname{arch} x = \pm\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ (читається “ареакосинус гіперболічний x”);

– $y = \operatorname{arth} x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ (читається “ареатангенс гіперболічний x”).

Усі елементарні функції поділяються на два класи:

– алгебричні;

– трансцендентні.

Алгебричні функції. Функція $y = f(x)$ називається алгебричною, якщо вона задовольняє рівнянню $P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \ldots + P_{n-1}y + P_n(x) = 0$, де $P_k(x)$ $(k = \overline{0,n})$ – багаточлени (тут k – номер багаточлена, а не його степінь).

Будь-яка раціональна функція є алгебричною, оскільки вона задовольняє рівнянню

$$\widetilde{P}_n(x)y + P_m(x) = 0,$$

де $\widetilde{P}_n(x)$, $P_m(x)$ – багаточлени (тут m і n – степені багаточленів).

Будь-яка ірраціональна функція також є алгебричною.

Трансцендентні функції. Елементарні функції, які не є алгебричними, називаються трансцендентними елементарними функціями. Функції, які включають тригонометричні, обернені тригонометричні, показникові і логарифмічні функції, є трансцендентними елементарними функціями.

4. Послідовність.

Означення 2.1.24. Послідовністю називається функція, визначена на множині натуральних чисел, тобто якщо $f : N \to Y$ (або $y = f(n)$), то f – послідовність.

Домовимося, що на першому етапі Y – множина дійсних чисел, отже, будемо розглядати тільки дійсні числові послідовності.

Даючи n значення 1, 2, 3, …, n, …, одержимо послідовність у вигляді y_1, y_2, …, y_n, …. Її позначають $\{y_n\}$, $y_i (i = 1, 2, 3, \ldots)$ – i-й член послідовності, y_n – n-й (або загальний) член послідовності.

Вираз

$$y_n = f(n)$$

називається формулою загального члена послідовності.

Приклади послідовностей:

1) $\{n\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$;

2) $\{(-1)^n n\} = \{-1, 2, -3, 4, \ldots\}$;

3) $\{-n^2\} = \{-1, -2, -4, \ldots\}$;

4) $\left\{\dfrac{n-1}{n}\right\} = \left\{0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \ldots\right\}$;

5) $\left\{2^{(-1)^n}\right\} = \left\{\dfrac{1}{2}, 2, \dfrac{1}{2}, 2, \ldots\right\}$;

6) $\{y_n\} = \{1{,}4; 1{,}41; 1{,}414; \ldots\}$, де y_n – наближене значення $\sqrt{2}$, взяте з точністю $\dfrac{1}{10^n}$ з недостачею;

7) послідовність Фібоначчі 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …, що задається першими двома елементами $y_1 = 1$, $y_2 = 1$ і рекурентним співвідношенням $y_n = y_{n-2} + y_{n-1}$ при $n \ge 3$;

8) арифметична прогресія – це послідовність, що задається першим членом $y_1 = a_1$ і співвідношенням $y_n = a_n = a_{n-1} + d$ (d – стале число, яке називається різницею прогресії):

$$\div\, a_1,\ a_1 + d,\ a_1 + 2d,\ \ldots,\ a_1 + nd,\ \ldots$$

(символ “$\div$” означає, що дана послідовність – арифметична прогресія);

9) геометрична прогресія – це послідовність, що задається першим членом $y_1 = b_1$ ($b_1 \neq 0$) і залежністю $y_n = b_n = b_{n-1}q$ (q ($q \neq 1$) – стале число, яке називається знаменником прогресії):

$$\div\div\, b_1,\ b_1 q,\ b_1 q^2,\ \ldots,\ b_1 q^{n-1},\ \ldots.$$

Таким чином, послідовність вважається заданою, якщо вказано спосіб одержання довільного її члена.

Послідовність $\{y_n\}$, усі значення якої дорівнюють одному і тому ж числу a, називається сталою.

Послідовність $\{y_n\}$, множина значень якої обмежена (обмежена зверху, обмежена знизу), називається відповідно обмеженою (обмеженою зверху, обмеженою знизу), наприклад:

– $\left\{\dfrac{n-1}{n}\right\}$ – обмежена;
– $\{n\}$ – обмежена знизу (але не обмежена зверху);
– $\{-n^2\}$ – обмежена зверху (але не обмежена знизу);
– $\{(-1)^n n\}$ – не обмежена ні зверху, ні знизу.

2.1.3. Границя функції. Однобічні границі. Нескінченно малі та нескінченно великі величини. Властивості границь

1. Границя функції.

Поняття границі є одним із основних в математичному аналізі. Зупинимося на границі функції.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0.

Означення 2.1.25. Число A називається границею функції $f(x)$ в точці x_0 (або при $x \to x_0$), якщо для довільного як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх x, які задовольняють умову $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Іншими словами, число A є границею функції $y = f(x)$ в точці x_0, якщо значення функції як завгодно мало відрізняються від A, коли значення x достатньо близькі до x_0.

Той факт, що A – границя $f(x)$ при $x \to x_0$, позначають

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ або } f(x) \to A \text{ при } x \to x_0.$$

Символічний запис:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in 0 <| x - x_0 |< \delta :| f(x) - A |< \varepsilon .$$

Зауваження:

1) виконання нерівності $| f(x) - A |< \varepsilon$ не обов'язкове в точці x_0 ($| x - x_0 |> 0 \Leftrightarrow x \neq x_0$);

2) вибір числа δ залежить від задання числа ε ($\delta = \delta(\varepsilon)$);

3) у вибраному δ-околі, крім, можливо, точки x_0, функція має бути визначеною.

Геометрична інтерпретація.

Для наперед заданого числа $\varepsilon > 0$ можна вказати таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що всі точки δ-околу точки x_0 відобразяться в точки ε-околу точки A. Для самої точки x_0 таке відображення не обов'язкове (рис. 2.1.8).

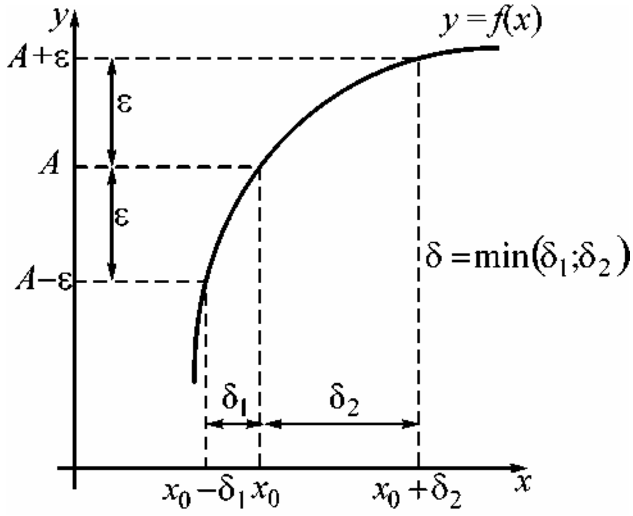


Рис. 2.1.8

Приклад 2.1.6. Довести, що функція $f(x) = 3x - 2$ в точці $x = 2$ має границю, яка дорівнює 4, тобто $\lim_{x\to 2}(3x - 2) = 4$.

Розв'язання. Виберемо як завгодно мале $\varepsilon > 0$. Задача полягає в тому, що за цим числом ε треба знайти таке число $\delta > 0$, при якому із нерівності $0 <| x - 2 |< \delta$ випливала б нерівність $| f(x) - 4 |=| (3x - 2) - 4 |< \varepsilon$. Перетворимо останню нерівність: $| f(x) - 4 |=| 3(x - 2) |= 3 | x - 2 |< \varepsilon$, або $| x - 2 |< \frac{\varepsilon}{3}$. Звідси видно, що якщо $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ (тим більше, якщо $\delta < \frac{\varepsilon}{3}$), то для всіх x, які задовольняють нерівності $| x - 2 |< \delta$, виконується нерівність $| f(x) - 4 |< \varepsilon$. Останнє й означає, що $\lim_{x\to 2}(3x - 2) = 4$.

Складемо таблицю відповідності ε і δ:

ε	1	$1/2$	$1/10$	$1/100$
δ	$1/3$	$1/6$	$1/30$	$1/300$

Таким чином, δ залежить від ε. Тому в означенні границі пишуть $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Приклад 2.1.7. Довести, що $\lim_{x\to 1}(2x^2) = 2$.

Розв'язання. Нехай $\varepsilon > 0$ – довільне як завгодно мале число. Знайдемо таке число $\delta > 0$, щоб для всіх x, які задовольняють нерівності $0 <| x - 1 |< \delta$, виконувалась нерівність $| 2x^2 - 2 |< \varepsilon$.

Якщо $| x - 1 |< \delta$, то $| x + 1 |=| (x - 1) + 2 |\leq| x - 1 | + 2 < \delta + 2$, отже, $| 2x^2 - 2 |= = 2 | x^2 - 1 |= 2 | x - 1 || x + 1 |< 2\delta(\delta + 2)$. Для виконання нерівності $| 2x^2 - 2 |< \varepsilon$

достатньо поставити вимогу, щоб $2\delta(\delta+2)=\varepsilon$, тобто $2\delta^2+4\delta-\varepsilon=0$, звідки $\delta=-1+\sqrt{1+\frac{\varepsilon}{2}}$ (другий корінь $-1-\sqrt{1+\frac{\varepsilon}{2}}$ відкидаємо, оскільки $\delta>0$). Таким чином, якщо взяти $\delta=-1+\sqrt{1+\frac{\varepsilon}{2}}$, то з нерівності $|x-1|<\delta$ буде випливати нерівність $|2x^2-2|<\varepsilon$, а це й означає, що $\lim\limits_{x\to1}(2x^2)=2$. Зауважимо, що нерівність $|2x^2-2|<\varepsilon$ виконується і для $x=1$.

Приклад 2.1.8. Довести, що $\lim\limits_{x\to0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=0$.

Розв'язання. Задаємо $\varepsilon>0$. За цим числом ε треба знайти таке число $\delta>0$, при якому з нерівності $0<|x-0|<\delta$ випливала б нерівність $|f(x)-0|=\left|x\sin\frac{1}{x}-0\right|=\left|x\sin\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$. Перетворивши останню нерівність, одержимо $\left|x\sin\frac{1}{x}\right|=|x|\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le|x|<\varepsilon$ $\left(\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le1 \text{ при } x\ne0\right)$. Звідси видно, що достатньо взяти $\delta=\varepsilon$, тоді для $0<|x|<\varepsilon$ буде справедливою нерівність $\left|x\sin\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$. Отже, $\lim\limits_{x\to0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=0$. Зауважимо, що нерівність $\left|x\sin\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$ не виконується в точці $x=0$. Функція $x\sin\frac{1}{x}$ взагалі не визначена в цій точці.

2. Однобічні границі.

Означення 2.1.26. Число A називається правою (лівою) границею функції $f(x)$ в точці x_0, якщо для довільного як завгодно малого числа $\varepsilon>0$ можна вказати таке число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, що для всіх x, які задовольняють умову $x_0<x<x_0+\delta$ ($x_0-\delta<x<x_0$), виконується нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Позначення: $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=A$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=A\right)$.

Теорема 2.1.1. Функція $f(x)$ має границю в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли в цій точці існують і рівні між собою її ліва та права границі.

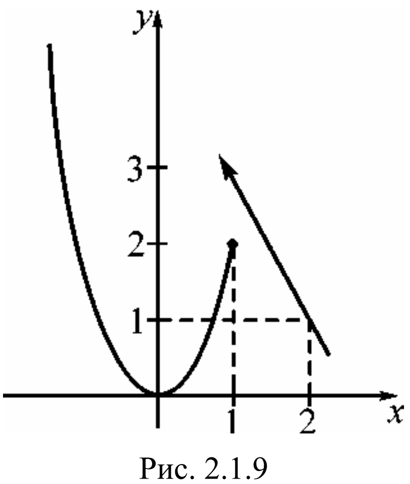


Рис. 2.1.9

Приклад 2.1.9. Довести, що функція $f(x)=\begin{cases}2x^2, & \text{якщо } x\le1,\\ 5-2x, & \text{якщо } x>1\end{cases}$ в точці $x=1$ не має границі (рис. 2.1.9).

Розв'язання. Оскільки границя функції $2x^2$ в точці $x=1$ дорівнює 2 (див. приклад 2.1.7), то за теоремою 2.1.1 ліва границя даної функції $f(x)$ в цій точці дорівнює 2, тобто

$\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x-0}(2x^2) = 2$.

Можна довести, що $\lim\limits_{x\to 1}(5-2x)=3$, отже, $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=3$. Таким чином, функція $f(x)$ в точці $x=1$ має праву і ліву границі, але вони не рівні, тому дана функція в точці $x=1$ границі не має.

3. Границя функції при $x\to\infty$ ($x\to -\infty$, $x\to +\infty$).

Означення 2.1.27. Число A називається границею функції $f(x)$ при $x\to\infty$, якщо для довільного як завгодно малого числа $\varepsilon>0$ можна вказати таке число $\Delta=\Delta(\varepsilon)>0$, що для всіх x, які задовольняють умову $|x|>\Delta$, виконується нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$ (рис. 2.1.10).

Позначення: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$.

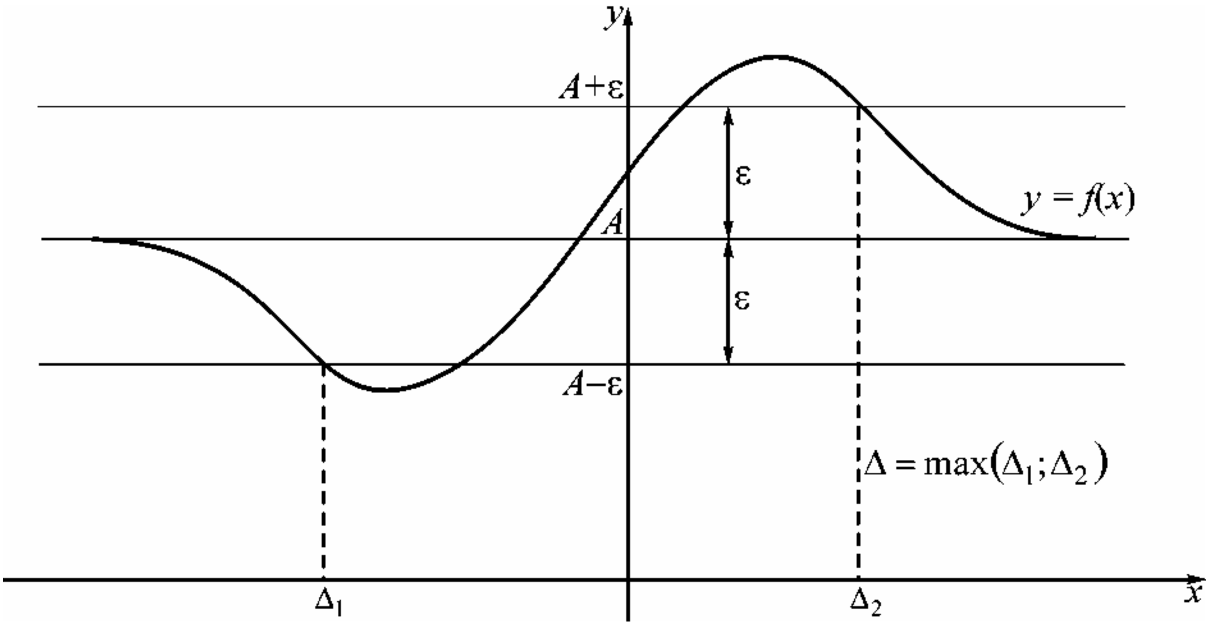


Рис. 2.1.10

Приклад 2.1.10. Довести, що $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{3x+4}=\dfrac{2}{3}$.

Розв'язання. Для будь-якого $\varepsilon>0$ треба вказати таке $\Delta>0$, що для всіх $x\in|x|>\Delta$ справедливе $\left|\dfrac{2x-1}{3x+4}-\dfrac{2}{3}\right|<\varepsilon$.

Виконаємо перетворення:

$$\left|\frac{2x-1}{3x+4}-\frac{2}{3}\right| = \left|\frac{6x-3-6x-8}{3(3x+4)}\right| = \frac{11}{3\,|\,3x+4\,|}<\varepsilon,\ |3x+4|>\frac{11}{3\varepsilon},$$

$$\frac{11}{3\varepsilon}<|3x+4|<3|x|+4,\ 3|x|>\frac{11}{3\varepsilon}-4=\frac{11-12\varepsilon}{3\varepsilon},\ |x|>\frac{11-12\varepsilon}{9\varepsilon}.$$

Якщо взяти $\Delta=\dfrac{11-12\varepsilon}{9\varepsilon}$, то для всіх $x\in|x|>\Delta$ буде справедливе $\left|\dfrac{2x-1}{3x+4}-\dfrac{2}{3}\right|<\varepsilon$. Таким чином, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{3x+4}=\dfrac{2}{3}$.

Означення 2.1.28. Число A називається границею функції $f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ можна вказати таке число $\Delta = \Delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх x, які задовольняють умову $x > \Delta$ ($x < -\Delta$), виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Позначення: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ $\left(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A\right)$.

4. Нескінченно малі та нескінченно великі функції.

Означення 2.1.29. Функція $f(x)$ називається нескінченно малою функцією (або просто нескінченно малою) в точці $x = x_0$ (або при $x \to x_0$), якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Аналогічно означаються нескінченно малі функції при $x \to x_0 - 0$, $x \to x_0 + 0$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$, $x \to +\infty$.

Оскільки границя нескінченно малої функції дорівнює нулю, тобто $|f(x) - A| = |f(x) - 0| = |f(x)| < \varepsilon$, то можна дати рівносильне означення “на мові $\varepsilon - \delta$”.

Означення 2.1.30. Функція $f(x)$ називається нескінченно малою при $x \to x_0$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ можна вказати таке число $\delta > 0$, що для всіх $x \in 0 < |x - x_0| < \delta$ виконується нерівність $|f(x)| < \varepsilon$.

Поняття границі функції може бути зведене до поняття нескінченно малої.

Теорема 2.1.2. Для того щоб число A було границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$, необхідно і достатньо, щоб функція $\alpha(x) = f(x) - A$ була нескінченно малою при $x \to x_0$.

З теореми одержуємо вигляд функції, яка має границю A при $x \to x_0$:

$$f(x) = A + \alpha(x), \text{ де } \alpha(x) \to 0 \text{ при } x \to x_0.$$

Таким чином, функція $f(x)$ в околі точки x_0 відрізняється від A на нескінченно малу.

Властивості нескінченно малих величин.

Теорема 2.1.3. Алгебричною сумою скінченного числа нескінченно малих величин є нескінченно мала величина.

Теорема 2.1.4. Добутком нескінченно малої величини на обмежену величину є нескінченно мала величина.

Висновок. Добутком нескінченно малих величин є нескінченно мала величина.

Приклад 2.1.11. Довести, що функція $\alpha(x) = (x-1)^2 \sin\dfrac{1}{x-1}$ є нескінченно малою при $x \to 1$, тобто $\lim\limits_{x \to 1}\left((x-1)^2 \sin\dfrac{1}{x-1}\right) = 0$.

Розв'язання. Доведемо, що функція $\alpha_1(x)=(x-1)^2$ – нескінченно мала величина при $x\to 1$. Задамо $\varepsilon>0$. Треба вказати таке число $\delta>0$, щоб із нерівності $0<|x-1|<\delta$ випливала нерівність $|\alpha_1(x)|=|(x-1)^2|<\varepsilon$. Перетворимо останню нерівність: $(x-1)^2<\varepsilon$, $|x-1|<\sqrt{\varepsilon}$. Таким чином, $\alpha_1(x)=(x-1)^2$ – нескінченно мала при $x\to 1$. Функція $\sin\dfrac{1}{x-1}$ є обмеженою при $x\neq 1$: $\left|\sin\dfrac{1}{x-1}\right|\le 1$. Оскільки $\alpha(x)$ – добуток нескінченно малої і обмеженої функції при $x\to 1$, то $\alpha(x)$ – нескінченно мала величина.

Означення 2.1.31. Функція $f(x)$ називається нескінченно великою функцією (або просто нескінченно великою) в точці x_0 (або при $x\to x_0$), якщо для будь-якого як завгодно великого числа *M>0* можна вказати таке число $\delta=\delta(M)$, що для всіх $x\in 0<|x-x_0|<\delta$ виконується нерівність $|f(x)|>M$.

Позначення: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.

Якщо ж виконується нерівність $f(x)>M$ ($f(x)<-M$), то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=$ $=+\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty\right)$.

Аналогічно означаються нескінченно великі функції при $x\to x_0-0$, $x\to x_0+0$, $x\to\infty$, $x\to-\infty$, $x\to+\infty$, наприклад: функція $f(x)\to+\infty$ при $x\to-\infty$, якщо для будь-якого як завгодно великого числа $M>0$ можна вказати таке число $A>0$, що з нерівності $x<-A$ випливатиме нерівність $f(x)>M$.

Позначення: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

Між нескінченно малими та нескінченно великими існує зв'язок.

Теорема 2.1.5. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ і $\exists\delta>0\forall x\in 0<|x-x_0|<\delta: f(x)\neq 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=\infty$.

Теорема 2.1.6. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$.

Приклад 2.1.12. Довести, що функція $f(x)=\dfrac{2}{x+2}$ є нескінченно великою при $x\to-2$, тобто $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2}{x+2}=\infty$.

Розв'язання. Нехай $M>0$. Треба вибрати таке число $\delta>0$, щоб з нерівності $0<|x+2|<\delta$ випливала нерівність $\left|\dfrac{2}{x+2}\right|>M$. Перетворимо останню нерівність: $\dfrac{2}{|x+2|} > M$, $0 < |x+2| < \dfrac{2}{M}$. Якщо вибрати $\delta = \dfrac{2}{M}$, то із нерівності $0 < |x+2| < \delta$ випливатиме нерівність $\left|\dfrac{2}{x+2}\right| > M$, тобто $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2}{x+2} = \infty$.

Приклад 2.1.13. Довести, що функція $f(x) = 2(x+2)^2 \to +\infty$ при $x \to \infty$.

Розв'язання. Дано достатньо велике число $M > 0$. Треба знайти таке число $\Delta > 0$, щоб із нерівності $|x| > \Delta$ випливала нерівність $2(x+2)^2 > M$. Перетворимо останню нерівність: $(x+2)^2 > \dfrac{M}{2}$, $|x+2| > \sqrt{\dfrac{M}{2}}$, $\sqrt{\dfrac{M}{2}} < |x+2| \le |x| + 2$, $|x| > \sqrt{\dfrac{M}{2}} - 2$. Таким чином, якщо взяти $\Delta = \sqrt{\dfrac{M}{2}} - 2$, то з нерівності $|x| > \Delta$ випливатиме нерівність $2(x+2)^2 > M$, тобто $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2(x+2)^2\right) = +\infty$.

Отже, розглянуто різні види границь. Дамо загальне означення границі.

Означення 2.1.32. Число A (A – скінченне, ∞, $-\infty$, $+\infty$) називається границею функції $f(x)$ при $a \to x_0$ (a: x_0 (скінченне), $x_0 - 0$, $x_0 + 0$, ∞, $-\infty$, $+\infty$), якщо для будь-якого як завгодно малого околу A можна вказати такий достатньо малий окіл a, що всі точки з околу точки a (крім, можливо, самої точки a, якщо a – скінченна величина) відображаються в точки околу A.

На основі цього означення можна дати означення всіх інших елементарних границь.

5. Властивості границь.

Розглянемо границі функцій в одному і тому ж процесі (нехай для простоти цей процес – $x \to x_0$, де x_0 – скінченне). Нехай існують і скінченні границі: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = B$, $\lim\limits_{x\to x_0} \psi(x) = C$.

Теорема 2.1.7 (про єдину границю). Якщо границя існує, то вона єдина, тобто якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ і $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A_1$, то $A = A_1$.

Теорема 2.1.8 (про границю константи). Границя константи дорівнює самій константі, тобто $\lim\limits_{x\to x_0} C = C$.

Теорема 2.1.9 (про границю суми). Границя алгебричної суми дорівнює алгебричній сумі границь, тобто $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \pm \varphi(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)$.

Теорема 2.1.10 (про границю добутку). Границя добутку дорівнює добутку границь, тобто $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)\varphi(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)$.

Висновок. Константу можна виносити за знак границі, тобто $\lim\limits_{x\to x_0} [Cf(x)] = C \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Теорема 2.1.11 (про границю частки). Границя частки дорівнює частці границь, якщо границя знаменника не дорівнює нулю, тобто $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\neq 0$.

Теорема 2.1.12 (про перехід до границі в нерівності). В нерівності можна перейти до границі, тобто якщо $f(x)\le\varphi(x)$ для всіх $x\in 0<|x-x_0|<\delta$, то $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\le\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$.

Зауважимо: навіть якщо $f(x)<\varphi(x)$ для $x\in 0<|x-x_0|<\delta$, то все одно $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\le\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$, тобто строга нерівність може перейти в нестрогу.

Теорема 2.1.13 (про границю трьох функцій). Якщо значення даної функції знаходяться між значеннями двох інших функцій і границі крайніх функцій рівні, то границя даної функції дорівнює цій спільній границі, тобто якщо $f(x)\le\varphi(x)\le\psi(x)$ для $x\in 0<|x-x_0|<\delta$ і $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=A$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=A$.

Теорема 2.1.14 (про границю складеної функції). Якщо існують границі $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ і $\lim\limits_{y\to A}g(y)$, то в точці x_0 існує границя складеної функції $g[f(x)]$, причому $\lim\limits_{x\to x_0}g[f(x)]=\lim\limits_{y\to A}g(y)$.

На цій теоремі ґрунтується метод заміни змінної при знаходженні границь:

$$\lim_{x\to x_0}g[f(x)]=\left|\begin{array}{c}y=f(x),\\ \lim\limits_{x\to x_0}y=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\end{array}\right|=\lim_{y\to A}g(y).$$

Теорема 2.1.15. Неспадна (незростаюча) і обмежена зверху (знизу) на $(a;\,b)$ функція $f(x)$ має при $x\to b-0$ ($x\to a+0$) скінченну границю; якщо функція $f(x)$ не обмежена на $(a;\,b)$, то $f(x)\to+\infty$ ($f(x)\to-\infty$).

Теорема 2.1.16 (критерій Коші). Функція $f(x)$ має скінченну границю в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли для кожного числа $\varepsilon>0$ можна вибрати таке число $\delta>0$, що для всіх x', $x''\in 0<|x-x_0|<\delta$ справедливе $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

Для одержання практичних способів обчислення границь (без застосування “мови $\varepsilon-\delta$”) зробимо два суттєвих зауваження:

1) кожна елементарна функція неперервна в області визначення (питання неперервності функції розглядатимуться в підрозд. 2.1.6);

2) якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x_0, то границя функції в точці x_0 дорівнює значенню функції в цій точці:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f\left(\lim_{x\to x_0}x\right)=f(x_0)$$

і

$$\lim_{x\to x_0} g[f(x)] = g\left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right].$$

На основі цих властивостей одержимо

$$\lim_{x\to 1}\left(2x^2\right) = \left(2x^2\right)\Big|_{x=1} = 2,\ \lim_{x\to 1}\ln x^3 = \ln\lim_{x\to 1} x^3 = \ln 1 = 0.$$

Тепер складається враження, що немає труднощів в обчисленні границь функцій. Чи так це? Звичайно, ні. Формули, наведені в теоремах 2.1.8 – 2.1.11, потребують існування границь компонентів, а формула в теоремі 2.1.11 додатково потребує, щоб границя знаменника не дорівнювала нулю. Як бути, якщо в результаті знаходження границь компонентів одержимо 0, ∞, $-\infty$, $+\infty$?

Розглянемо $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ для різних функцій $f(x)$ і $\varphi(x)$, причому в кожному випадку $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$ і $\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x) = 0$:

1) $f(x) = (x-1)^2$, $\varphi(x) = 2(x-1)^2$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{2(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$;

2) $f(x) = (x-1)^2$, $\varphi(x) = 2(x-1)$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{2(x-1)} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 1}(x-1) = 0$;

3) $f(x) = (x-1)^2, \varphi(x) = 2(x-1)^3$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{2(x-1)^3} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1} = \infty$.

Відповіді суттєво відрізняються.

Якщо при знаходженні границі $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ $f(x)\to 0$ і $\varphi(x)\to 0$, то кажуть, що дріб $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ є невизначеністю типу $\dfrac{0}{0}$.

Позначення: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Інші типи невизначеностей: $\infty+\infty$, $\infty-\infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, 0^0, 0^∞, ∞^0, ∞^∞.

Обчислення границь у таких випадках називається розкриттям невизначеностей. Методам розкриття невизначеностей присвячені підрозд. 2.1.4, 2.1.5.

2.1.4. Знаходження границь алгебричних функцій

1. Границя вигляду $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P_m(x)}{\widetilde{P}_n(x)} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$, де a – скінченне число, $P_m(x)$ і $\widetilde{P}_n(x)$ – багаточлени.

У чисельнику і знаменнику виносять множники $x-a$, скорочують на них і розглядають одержану границю.

Приклад 2.1.14. Обчислити $A_1 = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2+2x-4}{3x^2-10x+8}$.

Розв'язання. $$A_1 = \left(\frac{0}{0}\right) = \left|\begin{array}{c|ccccc|ccc} \multicolumn{9}{l}{\text{Застосуємо схему Горнера для}} \\ \multicolumn{9}{l}{\text{ділення багаточленів на } x-2:} \\ & 1 & -2 & 2 & -4 & & 3 & -10 & 8 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 2 & \boxed{0} & 2 & 3 & -4 & \boxed{0} \end{array}\right| =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2)}{(x-2)(3x-4)} = \frac{6}{2} = 3.$$

Приклад 2.1.15. Обчислити $A_2 = \lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^4+6x^3+10x^2+6x+9}{2x^3+15x^2+36x+27}$.

Розв'язання.

$$A_2 = \left(\frac{0}{0}\right) = \left|\begin{array}{c|ccccc c|cccc} & 1 & 6 & 10 & 6 & 9 & & 2 & 15 & 36 & 27 \\ \hline -3 & 1 & 3 & 1 & 3 & \boxed{0} & -3 & 2 & 9 & 9 & \boxed{0} \end{array}\right| =$$

$$= \lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x^3+3x^2+x+3)}{(x+3)(2x^2+9x+9)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \left|\begin{array}{c|cccc c|ccc} & 1 & 3 & 1 & 3 & & 2 & 9 & 9 \\ \hline -3 & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} & -3 & 2 & 3 & \boxed{0} \end{array}\right| =$$

$$= \lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x^2+1)}{(x+3)(2x+3)} = -\frac{10}{3}.$$

Приклад 2.1.16. Обчислити $A_3 = \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4+2x^3+x+12}{x^3+7x^2+16x+12}$.

Розв'язання. $$A_3 = \left(\frac{0}{0}\right) = \left|\begin{array}{c|ccccc c|cccc} & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & & 1 & 7 & 16 & 12 \\ \hline -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & \boxed{0} & -2 & 1 & 5 & 6 & \boxed{0} \end{array}\right| =$$

$$= \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^3+1)}{(x+2)(x^2+5x+6)} = \left(\frac{-7}{0}\right) = \infty.$$

Приклад 2.1.17. Обчислити $A_4 = \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x^2-x-6)^{10}}{(x^3+5x^2+8x+4)^5}$.

Розв'язання.

$$A_4 = \left(\frac{0}{0}\right) = \left|\begin{array}{c|cccc} & 1 & 5 & 8 & 4 \\ \hline -2 & 1 & 3 & 2 & \boxed{0} \end{array}\right| = \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)^{10}(x-3)^{10}}{(x+2)^5(x^2+3x+2)^5} =$$

$$= \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)^5(x-3)^{10}}{(x^2+3x+2)^5} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)^5(x-3)^{10}}{(x+2)^5(x+1)^5} = \frac{5^{10}}{(-1)^5} = -5^{10}.$$

Приклад 2.1.18. Обчислити $A_5 = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^m-2^m}{x^n-2^n}$.

Розв'язання. $$A_5 = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^{m-1}+2x^{m-2}+2^2x^{m-3}+\ldots+2^{m-1})}{(x-2)(x^{n-1}+2x^{n-2}+2^2x^{n-3}+\ldots+2^{n-1})} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{m2^{m-1}}{n2^{n-1}} = \frac{m}{n}2^{m-n}.$$

Приклад 2.1.19. Обчислити $A_6 = \lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x+2}{x^2-5x+4} + \dfrac{x-4}{3(x^2-3x+2)}\right]$.

Розв'язання. $A_6 = (\infty + \infty) = \lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x+2}{(x-1)(x-4)} + \dfrac{x-4}{3(x-1)(x-2)}\right] =$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{3x^2-12+x^2-8x+16}{3(x-1)(x-2)(x-4)} = \lim_{x\to 1}\frac{4x^2-8x-4}{3(x-1)(x-2)(x-4)} = \frac{4}{3}\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x-2)(x-3)} =$$

$$= \frac{4}{3}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-2)(x-3)} = 0.$$

2. Границя вигляду $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{Q(x)}{\widetilde{Q}(x)} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$, де a – скінченне число, $Q(x)$ і $\widetilde{Q}(x)$ – ірраціональні функції.

Приклад 2.1.20. Обчислити $B_1 = \lim\limits_{x\to 5}\dfrac{4-\sqrt{2x+6}}{x^2-x-20}$.

Розв'язання.

$$B_1 = \left(\frac{0}{0}\right) = \left|\begin{array}{l}\text{Домножимо чисель-}\\ \text{ник і знаменник на}\\ 4+\sqrt{2x+6}\end{array}\right| = \lim_{x\to 5}\frac{16-2x-6}{(4+\sqrt{2x+6})(x-5)(x+4)} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{-2}{(4+\sqrt{2x+6})(x+4)} = -\frac{2}{8\cdot 9} = -\frac{1}{36}.$$

Приклад 2.1.21. Обчислити $B_2 = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3x}}{x+\sqrt[3]{9-4x^2}}$.

Розв'язання. Дана границя має тип $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Домножимо чисельник і знаменник на суму виразів, які стоять у чисельнику, і на неповний квадрат різниці виразів, які стоять у знаменнику:

$$B_2 = \lim_{x\to 3}\frac{(2x+3-3x)\left(x^2 - x\sqrt[3]{9-4x} + \sqrt[3]{\left(9-4x^2\right)^2}\right)}{\left(x^3+9-4x^2\right)\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x}\right)} = -\frac{27}{6}\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^3-4x^2+9} =$$

$$= \left|\begin{array}{c|cccc} & 1 & -4 & 0 & 9 \\ \hline 3 & 1 & -1 & -3 & \boxed{0}\end{array}\right| = -\frac{9}{2}\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)\left(x^2-x-3\right)} = -\frac{3}{2}.$$

У процесі розв’язання ми скористалися властивостями границь добутку і частки. Ці властивості потребують існування границь компонент. Те, що існує границя останньої компоненти, виявилося в кінці.

Приклад 2.1.22. Обчислити $B_3 = \lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$.

Розв'язання.

$$B_3=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 7}\frac{\left(\sqrt{x+2}-3\right)-\left(\sqrt[3]{x+20}-3\right)}{\sqrt[4]{x+9}-2}=\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-3}{\sqrt[4]{x+9}-2}=\left(\frac{0}{0}\right)-$$

$$-\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt[3]{x+20}-3}{\sqrt[4]{x+9}-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\ a^4-b^4=(a-b)\left(a^3+a^2b+ab^2+b^3\right)\ \right|=$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{(x+2-9)\left(\sqrt[4]{(x+9)^3}+2\sqrt[4]{(x+9)^2}+4\sqrt[4]{x+9}+8\right)}{(x+9-16)\left(\sqrt{x+2}+3\right)}-$$

$$-\lim_{x\to 7}\frac{(x+20-27)\left(\sqrt[4]{(x+9)^3}+2\sqrt[4]{(x+9)^2}+4\sqrt[4]{x+9}+8\right)}{(x+9-16)\left(\sqrt[3]{(x+20)^2}+3\sqrt[3]{x+20}+9\right)}=\frac{32}{6}-\frac{32}{27}=\frac{112}{27}.$$

Приклад 2.1.23. Обчислити $B_4=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{3}}{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{3}}$.

Розв'язання.

$$B_4=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)\right|=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\left(\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{3}\sqrt[n]{x^{n-2}}+\sqrt[n]{3^2}\sqrt[n]{x^{n-3}}+\ldots+\sqrt[n]{3^{n-2}}\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{3^{n-1}}\right)}{(x-3)\left(\sqrt[m]{x^{m-1}}+\sqrt[m]{3}\sqrt[m]{x^{m-2}}+\sqrt[m]{3^2}\sqrt[m]{x^{m-3}}+\ldots+\sqrt[m]{3^{m-2}}\sqrt[m]{x}+\sqrt[m]{3^{m-1}}\right)}=$$

$$=\frac{n\sqrt[n]{3^{n-1}}}{m\sqrt[m]{3^{m-1}}}=\frac{n}{m}3^{\frac{n-m}{nm}}.$$

3. Границя вигляду $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, де f, φ – алгебричні функції (в тому числі раціональні, ірраціональні).

У чисельнику і знаменнику виносять старші степені x, виконують їх ділення і розглядають одержану границю.

Приклад 2.1.24. Знайти $C_1=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x^2+x+5)^3(x^2-2x+4)^8}{(3x-5)^8(x^7-5x^5+3)^2}$.

Розв'язання. $C_1=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{22}\left(2+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}\right)^3\left(1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)^8}{x^{22}\left(3-\frac{5}{x}\right)^8\left(1-\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x^7}\right)^8}=\dfrac{2^3}{3^8}=\dfrac{8}{6561}$.

Приклад 2.1.25. Знайти $C_2=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{2x+1}+\dfrac{x^3+4x^2-2}{1-2x^2}\right)$.

Розв'язання. $C_2 = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 2x^4 + 2x^4 + 8x^3 - 4x + x^3 + 4x^2 - 2}{(2x+1)(1-2x^2)} =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{9x^3 + 5x^2 - 4x - 2}{(2x+1)(1-2x^2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3\left(9 + \dfrac{5}{x} - \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}\right)}{x^3\left(2 + \dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{1}{x^2} - 2\right)} = -\frac{9}{4}.$$

Приклад 2.1.26. Знайти $C_3 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{9x^2+1} - \sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[4]{x^4+1} - \sqrt[5]{x^4-1}}$.

Розв'язання. $C_3 = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\left(\sqrt{9 + \dfrac{1}{x^2}} - \sqrt[3]{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}}\right)}{x\left(\sqrt[4]{1 + \dfrac{1}{x^4}} - \sqrt[5]{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^5}}\right)} = 3.$

Приклад 2.1.27. Знайти $C_4 = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^7 + 2x}}{\sqrt[3]{x^4+3} - \sqrt[5]{x^3+4}}$.

Розв'язання. $C_4 = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{\frac{7}{3}} \sqrt[3]{1 + \dfrac{2}{x^6}}}{x^{\frac{4}{3}}\left(\sqrt[3]{1 + \dfrac{3}{x^4}} - \sqrt[5]{\dfrac{1}{x^{\frac{11}{3}}} + \dfrac{4}{x^{\frac{20}{3}}}}\right)} = \infty.$

Приклад 2.1.28. Знайти $C_5 = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 3}\right)$.

Пропонується знайти дві границі: при $x \to -\infty$ і при $x \to +\infty$.

Розв'язання. $C_5 = (\infty - \infty) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2 - 2x - 1 - x^2 + 7x - 3}{\sqrt{x^2 - 2x - 1} + \sqrt{x^2 - 7x + 3}} =$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x - 4}{|x|\left(\sqrt{1 - \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \dfrac{7}{x} + \dfrac{3}{x^2}}\right)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\left(5 - \dfrac{4}{x}\right)}{|x|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_5 = -\frac{5}{2}, \text{ якщо } x \to -\infty;\ C_5 = \frac{5}{2}, \text{ якщо } x \to +\infty.$$

4. Приклади знаходження границь послідовностей алгебричних функцій.

Як правило, при знаходженні границь послідовностей алгебричних функцій використовують ті ж прийоми, що і при знаходженні границь функцій неперервного аргументу при $x \to +\infty$. У багатьох випадках удається спростити вирази, а потім знайти границю.

Приклад 2.1.29. Знайти $D_1 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^3 - 10n^2 + 3n - 7}{(2n+1)^2(2-5n)}$.

Розв'язання. $D_1 = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3\left(5 - \dfrac{10}{n} + \dfrac{3}{n^2} - \dfrac{7}{n^3}\right)}{n^3\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^2\left(\dfrac{2}{n} - 5\right)} = \dfrac{5}{2^2(-5)} = -\dfrac{1}{4}$.

Приклад 2.1.30. Знайти $D_2 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n-3)^5 - (n+2)^5}{(2n-3)^5 + (n+2)^5}$.

Розв'язання. $D_2 = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{n^5\left[\left(2 - \dfrac{3}{n}\right)^5 - \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^5\right]}{n^5\left[\left(2 - \dfrac{3}{n}\right)^5 + \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^5\right]} = \dfrac{2^5 - 1}{2^5 + 1} = \dfrac{31}{33}$.

Приклад 2.1.31. Знайти $D_3 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)! + (2n-1)!}{(2n+1)! - (2n-1)!}$.

Розв'язання. $D_3 = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n-1)![2n(2n+1)+1]}{(2n-1)![2n(2n+1)-1]} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2\left[2\left(2+\dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{1}{n^2}\right]}{n^2\left[2\left(2+\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n^2}\right]} = 1$.

Приклад 2.1.32. Знайти $D_4 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{2n^2+1} + \sqrt{3n}}{\sqrt[3]{4n^3} + 5n}$.

Розв'язання. $D_4 = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\left(\sqrt{2 + \dfrac{1}{n^2}} + \sqrt{\dfrac{3}{n}}\right)}{n(\sqrt[3]{4} + 5)} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4} + 5}$.

Приклад 2.1.33. Знайти $D_5 = \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n^3 + 2n^2} - n)$.

Розв'язання. $D_5 = (\infty - \infty) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 + 2n^2 - n^3}{\sqrt[3]{(n^3 + 2n^2)^2} + n\sqrt[3]{n^3 + 2n^2} + n^2} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2\left(\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^2} + \sqrt[3]{1 + \dfrac{2}{n}} + 1\right)} = \frac{2}{3}.$$

Приклад 2.1.34. Знайти

$$D_6 = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}\right)\right].$$

Розв'язання. Якщо виконати множення, то при $n \to \infty$ в одержаній сумі кожний доданок прямуватиме до нуля. Не можна стверджувати без дослідження, що і сума прямуватиме до нуля, оскільки цих доданків – нескінченна множина. Маємо

$$D_6 = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{3-1}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{7-5}+\ldots+\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{(2n+1)-(2n-1)}\right)\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+1}-1}{2\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Приклад 2.1.35. Знайти $D_7 = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^2}-\dfrac{n}{3}\right)$.

Розв'язання. Знайдемо суму в чисельнику першого доданка:

$$S_2 = 1^2+2^2+\ldots+n^2;\ S_3 = 1^3+2^3+\ldots+(n+1)^3 = 1+(1+1)^3+(2+1)^3+\ldots$$

$$\ldots+(n+1)^3 = 1+1^3+3\cdot1^2+3\cdot1+1+2^3+3\cdot2^2+3\cdot2+1+\ldots+n^3+3n^2+3n+1=$$

$$=(1^3+2^3+\ldots+n^3)+3(1^2+2^2+\ldots+n^2)+3(1+2+\ldots+n)+(1+1+\ldots+1)=$$

$$=S_3-(n+1)^3+3S_2+3\frac{1+n}{2}n+n+1;$$

$$S_2=\frac{(n+1)^3-\frac{3}{2}(n+1)n-(n+1)}{3}=\frac{(n+1)[2(n+1)^2-3n-2]}{6}=\frac{(n+1)(2n^2+4n+2-3n-2)}{6}=$$

$$=\frac{(n+1)(2n^2+n)}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Обчислимо границю даної послідовності:

$$D_7=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2}-\frac{n}{3}\right]=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n^2+3n+1-2n^2)}{2n^2}=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n}=$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to\infty}\frac{n\left(3+\frac{1}{n}\right)}{n}=\frac{1}{2}.$$

Приклад 2.1.36. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n}=0$ при $a>1$.

Розв'язання. З умови випливає, що $a-1>0$, тому $a^n=[1+(a-1)]^n=1+$ $+n(a-1)+\dfrac{n(n-1)}{2}(a-1)^2+\ldots+(a-1)^n>\dfrac{n(n-1)}{2}(a-1)^2\ge\dfrac{n^2}{4}(a-1)^2$ при $n\ge2$, звідки $0<\dfrac{n}{a^n}<\dfrac{4}{n(a-1)^2}$. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}0=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{n(a-1)^2}=0$, то і $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n}=0$.

Дана границя справедлива і при $a>-1$, тобто вона взагалі справедлива при $|a|>1$.

Наведемо таблицю границь, які часто використовуються:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0 \ \ (|a|>1); \tag{2.1.14}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0; \tag{2.1.15}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1 \ \ (a>0); \tag{2.1.16}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1; \tag{2.1.17}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0; \tag{2.1.18}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0. \tag{2.1.19}$$

2.1.5. Визначні границі та висновки з них. Еквівалентні нескінченно малі величини та їх властивості. Знаходження границь трансцендентних функцій. Порівняння нескінченно малих величин

1. Перша визначна границя та висновки з неї.

Означення 2.1.33. Границя

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \tag{2.1.20}$$

називається першою визначною границею.

Деякі висновки із першої визначної границі:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1; \tag{2.1.21}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{tg}\alpha(x)}{\alpha(x)}=1; \tag{2.1.22}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{1-\cos\alpha(x)}{\frac{\alpha^2(x)}{2}}=1; \tag{2.1.23}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\arcsin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1; \tag{2.1.24}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{arctg}\alpha(x)}{\alpha(x)}=1 \tag{2.1.25}$$

(тут і далі $\alpha(x)$ – нескінченно мала величина (н.м.в.) при $x\to a$).

2. Друга визначна границя та висновки з неї.

Означення 2.1.34. Границя

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \tag{2.1.26}$$

називається другою визначною границею.

Деякі висновки із другої визначної границі:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e; \qquad (2.1.27)$$

$$\lim_{x\to a}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e; \qquad (2.1.28)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{e^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)} = 1; \qquad (2.1.29)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{b^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)} = \ln b; \qquad (2.1.30)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\ln(1+\alpha(x))}{\alpha(x)} = 1; \qquad (2.1.31)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\log_b(1+\alpha(x))}{\alpha(x)} = \frac{1}{\ln b}; \qquad (2.1.32)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^b-1}{bx} = 1; \qquad (2.1.33)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\left(1+\alpha\left(x\right)\right)^b-1}{ba\left(x\right)} = 1; \qquad (2.1.34)$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^b-1}{b(x-1)} = 1. \qquad (2.1.35)$$

3. Еквівалентність нескінченно малих величин.

Означення 2.1.35. Нескінченно малі величини $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to a$ називаються еквівалентними, якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

Позначення: $\alpha \sim \beta$.

Властивості еквівалентних нескінченно малих величин:

1) якщо $\alpha \sim \beta$, то $\beta \sim \alpha$;

2) якщо $\alpha \sim \beta$, $\beta \sim \gamma$, то $\alpha \sim \gamma$;

3) якщо $\alpha \sim \beta$, то $\lim\limits_{x\to a}(\alpha\cdot f(x)) = \lim\limits_{x\to a}(\beta\cdot f(x))$, тобто нескінченно малий множник можна замінити еквівалентною величиною.

Таблиця еквівалентних нескінченно малих величин:

$$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x); \qquad (2.1.36)$$

$$\operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x); \qquad (2.1.37)$$

$$1-\cos\alpha(x) \sim \frac{\alpha^2(x)}{2}; \qquad (2.1.38)$$

$$\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x); \qquad (2.1.39)$$

$$e^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x); \qquad (2.1.40)$$

$$b^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)\ln b; \qquad (2.1.41)$$

$$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x); \qquad (2.1.42)$$

$$\log_b(1+\alpha(x)) \sim \frac{\alpha(x)}{\ln b}; \qquad (2.1.43)$$

$$(1+\alpha(x))^b - 1 \sim b\alpha(x). \qquad (2.1.44)$$

4. Знаходження границь тригонометричних функцій.

При знаходженні границь трансцендентних функцій використовують два підходи:

– перетворюють дану функцію у таку форму, щоб можна було скористатися визначною границею або висновками з неї;

– заміняють нескінченно малі множники більш простими еквівалентними величинами.

Приклад 2.1.37. Знайти $A_1 = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{tg}3x}{1-\cos 5x}$.

Розв'язання.

<u>Перший підхід</u>: $A_1 = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot 3x\cdot\dfrac{\operatorname{tg}3x}{3x}}{\dfrac{(5x)^2}{2}\cdot\dfrac{1-\cos 5x}{\dfrac{(5x)^2}{2}}} =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{6x^2}{25x^2}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{\dfrac{(5x)^2}{2}}} = \left|\begin{array}{l}\text{Див. формули}\\ (2.1.3),(2.1.4)\end{array}\right| = \frac{6}{25}.$$

<u>Другий підхід</u>: $A_1 = \left|\begin{array}{c}\operatorname{tg}3x \sim 3x,\\ 1-\cos 5x \sim \dfrac{(5x)^2}{2}\end{array}\right| = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot 3x}{\dfrac{(5x)^2}{2}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x^2}{25x^2} = \dfrac{6}{25}.$

Звичайно другий підхід більш раціональний.

Приклад 2.1.38. Знайти $A_2 = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 6x}$.

Розв'язання.

$$A_2 = \left(\frac{0}{0}\right) = \left|\begin{array}{l}\sin 3x \sim 3x,\\ \sin 6x \sim 6x\end{array}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{3x}{6x} = \frac{1}{2}.$$

Приклад 2.1.39. Знайти $A_3 = \lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\sin 6x}$.

Розв'язання. Тут не можна зразу скористатися еквівалентністю. Хоча $\sin 3x$ – н.м.в., але $3x$ не є н.м.в. при $x\to\pi$, тому робимо заміну змінної:

$$A_3 = \left(\frac{0}{0}\right) = \left|\begin{array}{l}y = \pi - x,\ x = \pi - y,\\ y\to 0 \text{ при } x\to\pi\end{array}\right| = \lim_{y\to 0}\frac{\sin 3(\pi - y)}{\sin 6(\pi - y)} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin 3y}{-\sin 6y} =$$

$$= \left|\begin{array}{l}\sin 3y \sim 3y,\\ \sin 6y \sim 6y\end{array}\right| = \lim_{y\to 0}\frac{3y}{-6y} = -\frac{1}{2}.$$

Приклад 2.1.40. Знайти $A_4 = \lim\limits_{x\to 0}\left[(\sin 5x - \sin 3x)\operatorname{ctg} 3x\right]$.

Розв'язання.

$$A_4 = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos 4x\sin x}{\operatorname{tg} 3x} = \left|\begin{matrix}\cos 4x \to 1,\\ \sin x \sim x,\ \operatorname{tg} 3x \sim 3x\end{matrix}\right| = 2\lim_{x\to 0}\frac{x}{3x} = \frac{2}{3}.$$

Приклад 2.1.41. Знайти $A_5 = \lim\limits_{x\to 1}\left[(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}\right]$.

Розв'язання.

$$A_5 = (0\cdot\infty) = \left|\begin{matrix}y = 1-x,\ x = 1-y,\\ y \to 0 \text{ при } x \to 1\end{matrix}\right| = \lim_{y\to 0}\left[y\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(1-y)\right] =$$

$$= \lim_{y\to 0}\left(y\operatorname{ctg}\frac{\pi y}{2}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}y} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\dfrac{\pi}{2}y} = \frac{2}{\pi}.$$

Приклад 2.1.42. Знайти $A_6 = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x-a}$.

Розв'язання.

$$A_6 = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{\cos x\cos a\,(x-a)} = \frac{1}{\cos^2 a}, \text{ якщо } a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k\in Z.$$

Приклад 2.1.43. Знайти $A_7 = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x}{\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)}$.

Розв'язання.

$$A_7 = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\operatorname{tg} x\left(\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)} = \sqrt{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\left(\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}\right)\left(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}\right)}{\dfrac{\pi}{3} - x} =$$

$$= \sqrt{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)\cdot 2\sqrt{3}}{\cos x\cos\dfrac{\pi}{3}\cdot\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)} = -\frac{6}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = -24.$$

Приклад 2.1.44. Знайти $A_8 = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(a+2x) - 2\cos(a+x) + \cos a}{x^2}$.

Розв'язання.

$$A_8 = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos(a+x)\cos x - 2\cos(a+x)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\cos(a+x)(\cos x - 1)}{x^2} = \left|\begin{matrix}\cos(a+x) \to \cos a,\\ \cos x - 1 \sim -\dfrac{x^2}{2}\end{matrix}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos a(-x^2)}{2x^2} = -\cos a.$$

Приклад 2.1.45. Знайти $A_9 = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$.

Розв'язання.

$$A_9 = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(1+\sqrt{\cos x})\dfrac{(\sqrt{x})^2}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{2\cdot 2\cdot x} = 0 .$$

Приклад 2.1.46. Знайти $A_{10} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

Розв'язання.

$$A_{10} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\cos^3 x - \cos x\right)}{\left(\cos^2 x + \cos x\sqrt[3]{\cos x} + \sqrt[3]{\cos^2 x}\right)x^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\left(\cos^2 x - 1\right)}{x^2} = -\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2} = -\frac{1}{3} .$$

Приклад 2.1.47. Знайти $A_{11} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\sqrt[4]{\sin x} - \sqrt[3]{\sin x}}{\cos^2 x}$.

Розв'язання.

$$A_{11} = \left(\frac{0}{0}\right) = \left|\begin{array}{l} y = \dfrac{\pi}{2} - x,\ x = \dfrac{\pi}{2} - y, \\ y \to 0, \text{ якщо } x \to \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right| = \lim_{y\to 0}\frac{\sqrt[4]{\cos y} - \sqrt[3]{\cos y}}{\sin^2 y} =$$

$$= \left|\begin{array}{l} \text{У чисельнику додамо} \\ \text{та віднімемо 1 та розіб'ємо} \\ \text{дану границю на дві} \end{array}\right| = \lim_{y\to 0}\frac{\sqrt[4]{\cos y} - 1}{y^2} - \lim_{y\to 0}\frac{\sqrt[3]{\cos y} - 1}{y^2} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{\cos y - 1}{\left(\sqrt[4]{\cos^3 y} + \sqrt[4]{\cos^2 y} + \sqrt[4]{\cos y} + 1\right)y^2} - \lim_{y\to 0}\frac{\cos y - 1}{\left(\sqrt[3]{\cos^2 y} + \sqrt[3]{\cos y} + 1\right)y^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{2y^2} - \frac{1}{3}\lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{2y^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{24} .$$

Приклад 2.1.48. Знайти $A_{12} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(1-\cos 3x)}{\mathrm{arctg}\,(x\sin 5x)}$.

Розв'язання.

$$A_{12} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x\sin 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{(3x)^2}{2\cdot x\cdot 5x} = \frac{9}{10} .$$

Приклад 2.1.49. Знайти $A_{13} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\mathrm{arctg}\, x - \mathrm{arctg}\, a}{\arcsin x - \arcsin a}$.

Розв'язання.

$$A_{13} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to a}\frac{\mathrm{arctg}\,\dfrac{x-a}{1+ax}}{\arcsin\left(x\sqrt{1-a^2} - a\sqrt{1-x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{(x-a)}{(1+ax)(x\sqrt{1-a^2}-a\sqrt{1-x^2})} = \frac{1}{1+a^2} \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x\sqrt{1-a^2}+a\sqrt{1-x^2})}{x^2(1-a^2)-a^2(1-x^2)} =$$

$$= \frac{2a\sqrt{1-a^2}}{1+a^2} \lim_{x\to a} \frac{x-a}{x^2-a^2} = \frac{\sqrt{1-a^2}}{1+a^2}.$$

5. Границі на основі другої визначної границі. Комбіновані границі.

Приклад 2.1.50. Знайти $B_1 = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{3x-5}\right)^{x^2}$.

Розв'язання. Маємо границю типу $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{+\infty}$. Невизначеності тут немає. Зразу пишемо $B_1 = 0$.

Приклад 2.1.51. Знайти границі

$$B_2 = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{3x-5}\right)^x,\ B_3 = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{3x-5}\right)^x,\ B_4 = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{3x-5}\right)^x.$$

Розв'язання. Оскільки $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{3x-5}\right)^x = +\infty$, а $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{3x-5}\right)^x = 0$, то це означає, що лівостороння і правостороння границі не збігаються і границі $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{3x-5}\right)^x$ не існує.

Зауваження. Наведемо загальний прийом знаходження границі $\lim\limits_{x\to a} f^{\varphi}$ типу (1^{∞}), або, іншими словами, типу e.

Оскільки $f \to 1$ при $x \to a$, то в околі точки a справедлива рівність $f = 1+\alpha$, де $\alpha \to 0$ при $x \to a$.

Маємо $\lim\limits_{x\to a} f^{\varphi} = \lim\limits_{x\to a}(1+\alpha)^{\varphi} = \lim\limits_{x\to a}\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\alpha\varphi} = e^{\lim\limits_{x\to a}(\alpha\varphi)}$.

Приклад 2.1.52. Знайти $B_5 = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-3}\right)^{3x-4}$.

Розв'язання. Маємо границю типу 1^{∞}. Виділимо 1 у виразі $\dfrac{2x+1}{2x-3}$:

$$\frac{2x+1}{2x-3} = 1 + \left(\frac{2x+1}{2x-3} - 1\right) = 1 + \frac{2x+1-2x+3}{2x-3} = 1 + \frac{4}{2x-3}.$$

Продовжимо обчислення:

$$B_5 = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x-3}\right)^{3x-4} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{2x-3}\right)^{\frac{2x-3}{4}}\right]^{\frac{4}{2x-3}(3x-4)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4(3x-4)}{2x-3}} = e^{12}.$$

Приклад 2.1.53. Знайти $B_6 = \lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1+x}-x)^{\frac{1}{x}}$.

Розв′язання.

$$B_6 = (1^{\infty}) = \lim_{x\to 0}\left[1+(\sqrt{1+x}-x-1)\right]^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left\{\left[1+(\sqrt{1+x}-x-1)\right]^{\frac{1}{\sqrt{1+x}-x-1}}\right\}^{\frac{\sqrt{1+x}-x-1}{x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}(1-\sqrt{1+x})}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-1-x}{x(1+\sqrt{1+x})}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

Приклад 2.1.54. Знайти $B_7 = \lim\limits_{x\to 0}(\cos 6x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

Розв′язання.

$$B_7 = (1^{\infty}) = \lim_{x\to 0}\left\{\left[1+(\cos 6x-1)\right]^{\frac{1}{\cos 6x-1}}\right\}^{(\cos 6x-1)\operatorname{ctg}^2 x} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 6x-1}{\operatorname{tg}^2 x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-(6x)^2}{2x^2}} = e^{-18}.$$

Приклад 2.1.55. Знайти $B_8 = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

Розв′язання.

$$B_8 = (1^{\infty}) = \left|\begin{array}{c} y = \frac{\pi}{4}-x,\ x = \frac{\pi}{4}-y, \\ y\to 0 \text{ при } x\to\frac{\pi}{4} \end{array}\right| = \lim_{y\to 0}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-y\right)\right)^{\operatorname{ctg} 2y} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\left(\frac{1-\operatorname{tg} y}{1+\operatorname{tg} y}\right)^{\operatorname{ctg} 2y} = \frac{\lim\limits_{y\to 0}(1-\operatorname{tg} y)^{\operatorname{ctg} 2y}}{\lim\limits_{y\to 0}(1+\operatorname{tg} y)^{\operatorname{ctg} 2y}};\ \lim_{y\to 0}(1-\operatorname{tg} y)^{\operatorname{ctg} 2y}\ (1^{\infty}) =$$

$$= \lim_{y\to 0}\left[(1-\operatorname{tg} y)^{\frac{1}{-\operatorname{tg} y}}\right]^{\frac{-\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} 2y}} = e^{\lim\limits_{y\to 0}\frac{-y}{2y}} = e^{-\frac{1}{2}};\ \lim_{y\to 0}(1+\operatorname{tg} y)^{\operatorname{ctg} 2y}\ (1^{\infty}) =$$

$$= \lim_{y\to 0}\left[(1+\operatorname{tg} y)^{\frac{1}{\operatorname{tg} y}}\right]^{\frac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} 2y}} = e^{\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{2y}} = e^{\frac{1}{2}};\ B_8 = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Приклад 2.1.56. Знайти $C_1 = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{x^2}$.

Розв'язання.

$$C_1=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln[((x^2+1)+x)((x^2+1)-x)]}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2+x^4)}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^4}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+x^2)}{x^2}=1.$$

Приклад 2.1.57. Знайти $D_1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-e^{2x}}{\operatorname{tg} x}$.

Розв'язання.

$$D_1=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}(e^{5x}-1)}{\operatorname{tg} x}=\left|\begin{array}{l} e^{2x}\to 1,\ \operatorname{tg} x\sim x, \\ e^{5x}-1\sim 5x \text{ при } x\to 0\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{x}=5.$$

Приклад 2.1.58. Знайти $D_2=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2\left(4^{\frac{1}{x}}-4^{\frac{1}{x+1}}\right)\right)$.

Розв'язання.

$$D_2=(\infty\cdot 0)=\left|\begin{array}{l} y=\dfrac{1}{x},\ x=\dfrac{1}{y}, \\ y\to 0 \text{ при } x\to\infty\end{array}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{4^y-4^{\frac{y}{y+1}}}{y^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{4^{\frac{y}{y+1}}\left(4^{y-\frac{y}{y+1}}-1\right)}{y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{\left(y-\dfrac{y}{y+1}\right)\ln 4}{y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2\ln 4}{(y+1)y^2}=\ln 4.$$

Приклад 2.1.59. Знайти $D_3=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 5x}-e^{\sin x}}{\ln(1+2x)}$.

Розв'язання.

$$D_3=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}\left(e^{\sin 5x-\sin x}-1\right)}{\ln(1+2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin x}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 3x\sin 2x}{2x}=2.$$

Приклад 2.1.60. Знайти $D_4=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{\alpha x^2}-b^{\beta x^2}}{1-\cos x}$; $a>0$, $b>0$.

Розв'язання.

$$D_4=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(a^{\alpha x^2}-1\right)-\left(b^{\beta x^2}-1\right)}{\dfrac{x^2}{2}}=2\lim_{x\to 0}\frac{a^{\alpha x^2}-1}{x^2}-$$

$$-2\lim_{x\to 0}\frac{b^{\beta x^2}-1}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\alpha x^2\ln a}{x^2}-2\lim_{x\to 0}\frac{\beta x^2\ln b}{x^2}=2(\alpha\ln a-\beta\ln b).$$

Перед тим, як розглядати приклади з гіперболічними функціями, рекомендуємо прочитати підрозд. 2.1.2.

Зауважимо, що $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sh} x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{th} x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ch} x = 1$.

Справедливо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1; \qquad (2.1.45)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{th} x}{x} = 1; \qquad (2.1.46)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2/2} = 1, \qquad (2.1.47)$$

а також

$$\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{sh}\,\alpha(x)}{\alpha(x)} = 1; \qquad (2.1.48)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{th}\,\alpha(x)}{\alpha(x)} = 1; \qquad (2.1.49)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{ch}\,\alpha(x) - 1}{\alpha^2(x)/2} = 1, \qquad (2.1.50)$$

де $\alpha(x)$ – н.м.в. при $x \to a$.

Звідси одержимо таку табличку:

$$\operatorname{sh}\alpha(x) \sim \alpha(x); \qquad (2.1.51)$$

$$\operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x); \qquad (2.1.52)$$

$$\operatorname{ch}\,\alpha(x) - 1 \sim \frac{\alpha^2(x)}{2}. \qquad (2.1.53)$$

Приклад 2.1.61. Знайти $F_1 = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh}^2 x}{\ln(\operatorname{ch}\,3x)}$.

Розв'язання.

$$F_1 = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\ln[1 + (\operatorname{ch} 3x - 1)]} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\operatorname{ch} 3x - 1} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{(3x)^2} = \frac{2}{9}.$$

Приклад 2.1.62. Знайти $F_2 = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch} 2x - 1}{\cos x - 1}$.

Розв'язання.

$$F_2 = \left(\frac{0}{0}\right) = \left|\begin{matrix}\operatorname{ch}2x - 1 \sim \dfrac{(2x)^2}{2}, \\ \cos x - 1 \sim -\dfrac{x^2}{2}\end{matrix}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{4x^2\cdot 2}{-2x^2} = -4.$$

Приклад 2.1.63. Знайти $F_3 = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{ch}\,2x}{\operatorname{ch}x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Розв'язання.

$$F_3 = (1^\infty) = \frac{\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ch}\,2x)^{\frac{1}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ch}\,x)^{\frac{1}{x^2}}};$$

$$\lim_{x\to 0}(\operatorname{ch} 2x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left\{[1+(\operatorname{ch} 2x-1)]^{\frac{1}{\operatorname{ch} 2x-1}}\right\}^{\frac{\operatorname{ch} 2x-1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch} 2x-1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(2x)^2}{2x^2}} = e^2;$$

$$\lim_{x\to 0}(\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left\{[1+(\operatorname{ch} x-1)]^{\frac{1}{\operatorname{ch} x-1}}\right\}^{\frac{\operatorname{ch} x-1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch} x-1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}} = e^{\frac{1}{2}};$$

$$F_3 = \frac{e^2}{e^{\frac{1}{2}}} = e^{\frac{3}{2}}.$$

6. Порівняння нескінченно малих величин.

Нехай $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ – нескінченно малі величини при $x \to a$. Порівняти їх означає знайти границю відношення при $x \to a$.

Означення 2.1.36. Якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A$, де A – величина скінченна і $A \neq 0$, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ – величини одного порядку малості. Позначення: $\alpha(x) \approx \beta(x)$.

Означення 2.1.37. Якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ – еквівалентні н.м.в. Позначення: $\alpha(x) \sim \beta(x)$ (див. п. 3).

Означення 2.1.38. Якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ – величина вищого порядку малості відносно $\beta(x)$. Позначення: $\alpha(x) = o(\beta(x))$ (читають "$\alpha(x)$ є o мале від $\beta(x)$").

Означення 2.1.39. Якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, то $\alpha(x)$ – величина нижчого порядку малості відносно $\beta(x)$, тобто $\beta(x)$ – величина вищого порядку малості відносно $\alpha(x)$.

Приклад 2.1.64. При $x \to 0$ порівняти н.м.в. $\alpha(x) = 2x^2$ із н.м.в.:

1) $\beta_1(x) = 1 - \cos 3x$;

2) $\beta_2(x) = e^{2x^2} - 1$;

3) $\beta_3(x) = \sin 5x$;

4) $\beta_4(x) = \ln(1+3x^3)$.

Розв'язання.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta_1(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{1-\cos 3x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2\cdot 2}{(3x)^2} = \dfrac{4}{9} \Rightarrow \alpha(x) \approx \beta_1(x)$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta_2(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{e^{2x^2}-1} = 1 \Rightarrow \alpha(x) \sim \beta_2(x)$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta_3(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{5x}=0\Rightarrow \alpha(x)=o(\beta_3(x))$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta_4(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{\ln(1+3x^3)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{3x^3}=\infty\Rightarrow \beta_3(x)=o(\alpha(x))$.

Означення 2.1.40. Якщо $\alpha(x)\approx\beta^k(x)$, то $\alpha(x)$ – величина k-го порядку малості відносно $\beta(x)$ (при $k>1$ $\alpha(x)$ – вищого, при $k<1$ $\alpha(x)$ – нижчого порядків малості відносно $\beta(x)$).

Приклад 2.1.65. Указати порядок малості н.м.в. $\alpha(x)=5x^2$ відносно н.м.в. при $x\to 0$: 1) $\beta_1(x)=\operatorname{sh}3x$; 2) $\beta_2(x)=\operatorname{ch}2x^2-1$; 3) $\beta_3(x)=\sqrt[5]{\operatorname{th}^3 x}$.

Розв'язання.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta_1^k(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2}{\operatorname{sh}^k 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2}{(3x)^k}=\dfrac{5}{9}$ при $k=2$, отже, $\alpha(x)$ – величина другого порядку малості відносно $\beta_1(x)$.

2. $$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta_2^k(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^2}{(\operatorname{ch}2x^2-1)^k}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^2}{\left(\dfrac{(2x^2)^2}{2}\right)^k}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^2}{(2x^4)^k}=\frac{5}{\sqrt{2}}$$

при $k=\dfrac{1}{2}$, звідки випливає, що порядок малості $\alpha(x)$ дорівнює $\dfrac{1}{2}$ від порядку малості $\beta_2(x)$ (тобто $\beta_2(x)$ – величина другого порядку малості відносно $\alpha(x)$).

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta_3^k(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2}{(\operatorname{th}x)^{\frac{3}{5}k}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2}{x^{\frac{3}{5}k}}=\left|\dfrac{3}{5}k=2\Rightarrow k=\dfrac{10}{3}\right|=5$ при $k=\dfrac{10}{3}$, звідки випливає: $\alpha(x)$ має порядок малості, що дорівнює $\dfrac{10}{3}$ від порядку малості $\beta_3(x)$.

Зауваження. В п. 3 даного підрозділу були сформульовані властивості еквівалентних нескінченно малих величин. Сформулюємо ще одну властивість: якщо $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ – еквівалентні нескінченно малі величини, то їх різниця $\alpha(x)-\beta(x)$ – н.м.в. вищого порядку малості відносно кожної з величин $\alpha(x)$ і $\beta(x)$.

Приклад 2.1.66. Знайти $G_1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}2x-\arcsin^2\sqrt{2x}}{\sqrt{1-\cos(2\sqrt{2x})}}$.

Розв'язання. При $x>0$ $\left.\begin{array}{l}\alpha(x)=\operatorname{arctg}2x\sim 2x,\\ \beta(x)=\arcsin^2\sqrt{2x}\sim 2x\end{array}\right\}\Rightarrow \alpha(x)\sim\beta(x)$;

$$\gamma(x)=\sqrt{1-\cos(2\sqrt{2}x)}\sim\sqrt{\frac{(2\sqrt{2}x)^2}{2}}=2x\,.$$

Таким чином, $\alpha(x)\sim\beta(x)\sim\gamma(x)$, тому очевидно, що $\alpha(x)-\beta(x)=o(\gamma(x))$ і $G_1=0$.

Приклад 2.1.67. Знаючи, що $\alpha(x)=\sqrt[n]{1+x}-1$ і $\beta(x)=\dfrac{x}{n}$ при $x\to 0$ – еквівалентні нескінченно малі величини, знайти наближено: 1) $\sqrt{531}$; 2) $\sqrt[4]{83511}$.

Розв'язання.

1. $\sqrt{531}=\sqrt{529+2}=\sqrt{23^2+2}=23\sqrt{1+\dfrac{2}{23^2}}=$

$$=23\left[\left(\sqrt{1+\frac{2}{23^2}}-1\right)+1\right]\approx 23\left(\frac{1}{2}\frac{2}{23^2}+1\right)=23+\frac{1}{23}=23{,}043478,$$

табличне значення $23{,}043437$.

2. $\sqrt[4]{83511}=\sqrt[4]{83521-10}=\sqrt[4]{17^4-10}=17\sqrt[4]{1-\dfrac{10}{17^4}}=17\left[\left(\sqrt[4]{1-\dfrac{10}{17^4}}-1\right)+1\right]\approx$

$\approx 17\left(-\dfrac{1}{4}\dfrac{10}{17^4}+1\right)=17-\dfrac{5}{2\cdot 17^3}\approx 16{,}999491$, табличне значення 16,999491.

Зауваження. Аналогічно класифікації нескінченно малих величин можна дати класифікацію і нескінченно великих величин.

2.1.6. Неперервність функції

1. Означення неперервності функції.

Нехай функція $f(x)$ визначена в точці x_0 і її околі.

Означення 2.1.41. Функція $y=f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо границя функції в точці x_0 дорівнює значенню функції в цій точці, тобто

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0). \qquad (2.1.54)$$

Оскільки $x_0=\lim\limits_{x\to x_0} x$, то означення функції можна записати як

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(\lim_{x\to x_0} x_0),$$

тобто для неперервної функції знаки границі і функції можна переставляти.

Оскільки існування границі в точці x_0 обумовлює існування односторонніх границь у цій точці, то означення неперервності можна записати і в такому вигляді:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0),$$

тобто границя зліва, границя справа і значення функції в точці x_0 рівні.

Враховуючи означення границі на “мові $\varepsilon-\delta$”, можна дати означення границі.

Означення 2.1.42. Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ можна указати таке число $\delta = \delta(x) > 0$, що для всіх x, які задовольняють умову $|x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Іншими словами, функція $y = f(x)$ неперервна в точці x_0, якщо для значень x, достатньо близьких до x_0, значення функції як завгодно мало відрізняються від $f(x_0)$.

Порівняно з означенням границі в означенні неперервності суттєво новим є те, що функція $f(x)$ визначена в точці x_0 і нерівність $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ виконується і в точці x_0.

Перепишемо формулу (2.1.54) у вигляді

$$\lim_{x - x_0 \to 0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0,$$

де $\Delta x = x - x_0$ – приріст аргументу при переході від точки x_0 до точки x, а $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ – відповідний приріст функції.

Тому справедливе і таке означення неперервності.

Означення 2.1.43. Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо нескінченно малому приросту аргументу в цій точці відповідає нескінченно малий приріст функції (рис. 2.1.11).

Нарешті, існує таке означення.

Означення 2.1.44. Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо для будь-якої послідовності значень аргументу $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, яка збігається до x_0, послідовність відповідних значень функції $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ збігається до $f(x_0)$.

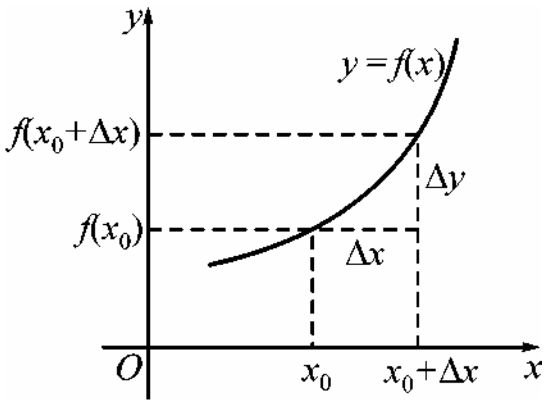


Рис. 2.1.11

Усі наведені означення неперервності рівносильні, тобто з кожного з них випливають усі інші.

Приклад 2.1.68. На основі означення 2.1.43 довести неперервність функції $f(x) = 3x^3 + 2x + 5$ в точці x_0.

Розв'язання. Нехай при переході від точки x_0 до точки x одержаний приріст аргументу – Δx, тобто $x = x_0 + \Delta x$.

Знайдемо границю відповідного значення функції при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = \lim_{\Delta x \to 0} \big[(3(x_0 + \Delta x)^3 + 2(x_0 + \Delta x) + 5) -$$

$$-(3x_0^2 + 2x_0 + 5)\big] = \lim_{\Delta x \to 0} (3x_0^3 + 9x_0^2 \Delta x + 9x_0 \Delta x^2 + 3\Delta x^3 + 2x_0 + 2\Delta x + 5 - 3x_0^2 -$$

$-2x_0-5)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(9x_0^2\Delta x+9x_0\Delta x^2+3\Delta x^3+2\Delta x)=0$. Звідси випливає, що $f(x)$ – функція, неперервна в точці x_0. Оскільки x_0 – довільна точка числової осі, то можна стверджувати: дана функція неперервна для кожного $x_0 \in R$.

Означення 2.1.45. Функція $y=f(x)$ називається неперервною в точці x_0 зліва (справа), якщо $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)\right)$.

Якщо функція $f(x)$ в точці x_0 неперервна зліва і справа, то вона неперервна в цій точці.

Означення 2.1.46. Функція $y=f(x)$ називається неперервною на інтервалі $(a;\,b)$, якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу.

Означення 2.1.47. Функція $y=f(x)$ називається неперервною на сегменті $[a;\,b]$, якщо вона неперервна на інтервалі $(a;\,b)$, в точці a справа і в точці b зліва.

Зауваження. Ми показали (див. приклад 2.1.68), що функція $f(x)=3x^2+2x+5$ є неперервною на всій числовій осі.

2. Клас неперервних функцій.

Теорема 2.1.17 (арифметичні дії над неперервними функціями). Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні в точці x_0. Тоді функції $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ також неперервні в цій точці (остання – при $g(x_0)\neq 0$).

Приклад 2.1.69. Довести, що багаточлен $P_n(x)=a_0(x)x^n+a_1x^{n-1}+\ldots$ $\ldots+a_{n-1}x+a_n$ – функція, неперервна на всій числовій осі.

Розв'язання. Багаточлен являє собою скінченну лінійну комбінацію функцій вигляду $f(x)=Cx^k$, де $k=0,1,\ldots,n$. Очевидно, що $y=C$ – функція, неперервна на всій числовій осі. Доведемо неперервність функції $y=x^k$ спочатку в довільній точці x_0: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[(x_0+\Delta x)^k-x_0^k]=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[(x_0^k+$ $+kx_0^{k-1}\Delta x+\ldots+kx_0\Delta x^{k-1}+\Delta x^k)-x_0^k]=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(kx_0^{k-1}\Delta x+\ldots+kx_0\Delta x^{k-1}+$ $+\Delta x^k)=0$. Таким чином, функція $y=x^k$ неперервна в кожній точці числової осі, а це означає, що вона неперервна на всій числовій осі. Далі можемо стверджувати, що неперервними є функція $y=Cx^k$ і загалом багаточлен $P_n(x)$.

Приклад 2.1.70. Довести неперервність функції $y=\cos x$.

Розв'язання. Візьмемо довільну точку x_0 і доведемо неперервність функції в ній:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[\cos(x_0+\Delta x)-\cos x_0]=\lim_{\Delta x\to 0}\left(-2\sin\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}\right)=$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0}\left(\sin\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\Delta x\right) = \left|\ \left|\sin\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \le 1\ \right| = 0 .$$

Звідси випливає, що функція $y = \cos x$ неперервна в довільній точці x_0 числової осі, а отже, і на всій числовій осі.

Аналогічно можна довести неперервність функції $y = \sin x$. З неперервності функцій $y = \cos x$ і $y = \sin x$ буде випливати неперервність усіх інших основних тригонометричних функцій:

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \left(x \ne \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z\right);$$

$$y = \operatorname{ctg}\ x = \frac{\cos x}{\sin x}\,(x \ne \pi k,\ k \in Z);\ y = \sec\ x = \frac{1}{\cos\ x} \quad \left(x \ne \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z\right);$$

$$y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}\ (x \ne \pi k,\ k \in Z).$$

Ці функції утворено за допомогою скінченного числа арифметичних операцій над функціями $y = \cos x$ і $y = \sin x$.

Теорема 2.1.18 (неперервність складеної функції). Якщо функція $y = \varphi(x)$ неперервна в точці x_0 і функція $f(\varphi)$ неперервна в точці $\varphi_0 = \varphi(x_0)$, то складена функція $f[\varphi(x)]$ неперервна в точці x_0.

Теорема 2.1.19 (неперервність оберненої функції). Нехай функція $y = f(x)$ визначена, зростає (спадає) і є неперервною на відрізку $[a; b]$. Тоді обернена функція $x = f^{-1}(x)$ існує, визначена, зростає (спадає) і є неперервною на відрізку $[f(a); f(b)]$ $\big([f(b); f(a)]\big)$.

З теореми випливає неперервність функцій $y = \arcsin x$ і $y = \arccos x$ на відрізку $[-1; 1]$ і функцій $y = \operatorname{arctg} x$ і $y = \operatorname{arcctg} x$ на інтервалі $(-\infty; +\infty)$.

Оскільки будь-яка елементарна функція може бути одержана з основних елементарних функцій за допомогою скінченного числа арифметичних операцій і операцій суперпозиції, то справедлива загальна теорема.

Теорема 2.1.20. Будь-яка елементарна функція є неперервною в області її визначення.

Практично для знаходження області неперервності функції достатньо знайти її область визначення.

3. Властивості функцій, неперервних у точці та на відрізку.

Теорема 2.1.21 (обмеженість функції, неперервної в точці). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна в точці x_0, то знайдеться окіл точки x_0, в якому функція обмежена:

$$\exists M > 0, \delta > 0\ \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) : |\,f(x)| < M .$$

Теорема 2.1.22 (збереження знака неперервною функцією). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна в точці x_0 і $f(x_0) > 0$ $(f(x_0) < 0)$, то знайдеться окіл точки x_0, для кожної точки якого справедливе $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$

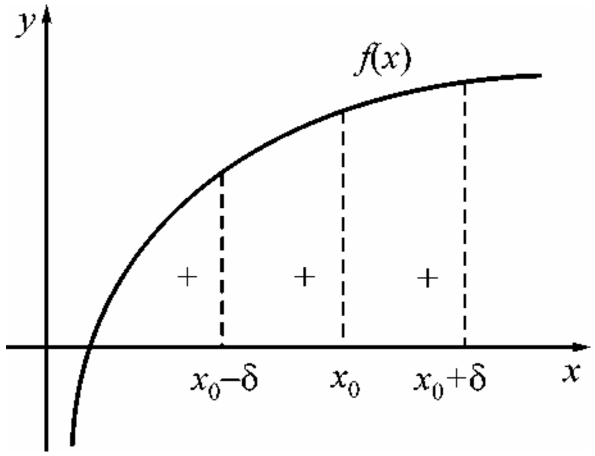


Рис. 2.1.12

(рис. 2.1.12):

$$\exists\delta > 0 \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) : f(x) > 0$$

$$\bigl(f(x) < 0\bigr).$$

Теорема 2.1.23. Неперервна функція на відрізку $[a; b]$ обмежена на цьому відрізку.

Теорема 2.1.24. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то вона досягає на цьому відрізку найменшого і найбільшого значень (рис. 2.1.13):

$$\exists x_1, x_2 \in [a; b] : f(x_1) = m = \inf_{[a;b]} f(x),$$

$$f(x_2) = M = \sup_{[a;b]} f(x).$$

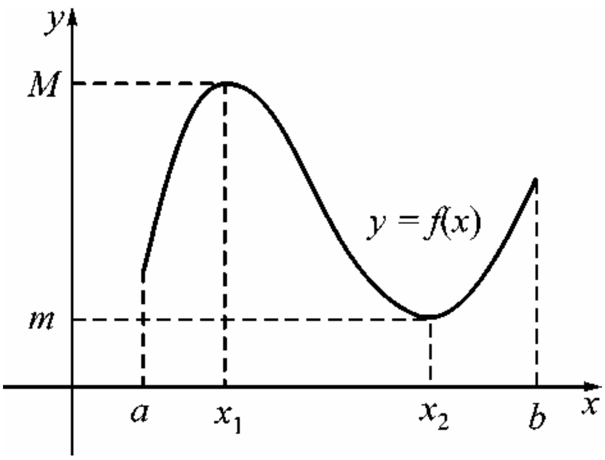


Рис. 2.1.13

Теорема 2.1.25. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і на кінцях цього відрізка набуває значень різних знаків, то на інтервалі $(a; b)$ існує принаймні один корінь рівняння $f(x) = 0$ (рис. 2.1.14):

$$\exists c \in (a; b) : f(c) = 0.$$

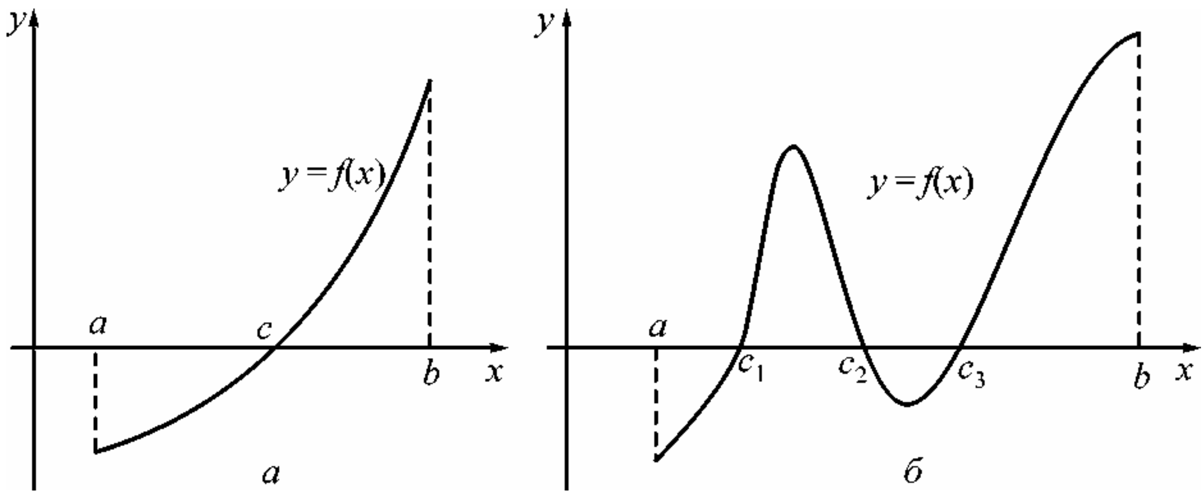


Рис. 2.1.14

Теорема 2.1.26. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, $f(a) = A$, $f(b) = B$ і $A \neq B$, то для будь-якого числа C, яке знаходиться між числами A і B, існує точка $c \in (a; b)$, така, що $f(c) = C$ (рис. 2.1.15).

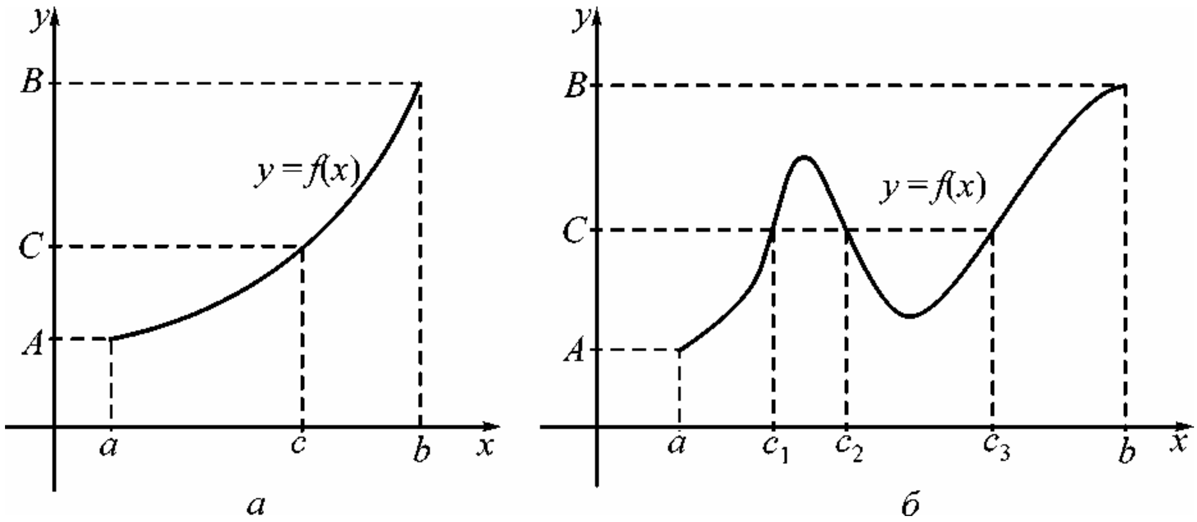


Рис. 2.1.15

Висновок. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і відрізняється від сталої функції, то множина її значень складає відрізок $[m; M]$, де $m = \inf\limits_{[a;b]} f(x)$, а $M = \sup\limits_{[a;b]} f(x)$.

4. Рівномірна неперервність.

Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку $\left[a;\, b\right]$, то вона неперервна в кожній точці $x_0 \in (a;\, b)$, тобто для будь-якого наперед заданого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ можна вказати таке число $\delta > 0$, що для кожного $x \in |\, x - x_0 \,| < \delta$ справедлива нерівність $|\, f(x) - f(x_0)\,| < \varepsilon$.

Очевидно, що число δ, яке вибирається за наперед заданим числом ε, залежить не тільки від самого числа ε, а, взагалі кажучи, й від точки x_0. Таким чином, $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ (рис. 2.1.16).

А чи не можна вибрати для заданого ε таке число δ, яке б згодилося для кожної точки заданого проміжку, тобто залежало δ тільки від ε і не залежало від точок проміжку $\left[a;\, b\right]$?

Якщо такий вибір можливий, то функція $f(x)$ є не тільки неперервною, а й рівномірно неперервною на проміжку $\left[a;\, b\right]$.

Оскільки точки x_0 і x в даному випадку рівноправні, то позначимо їх як x' і x''.

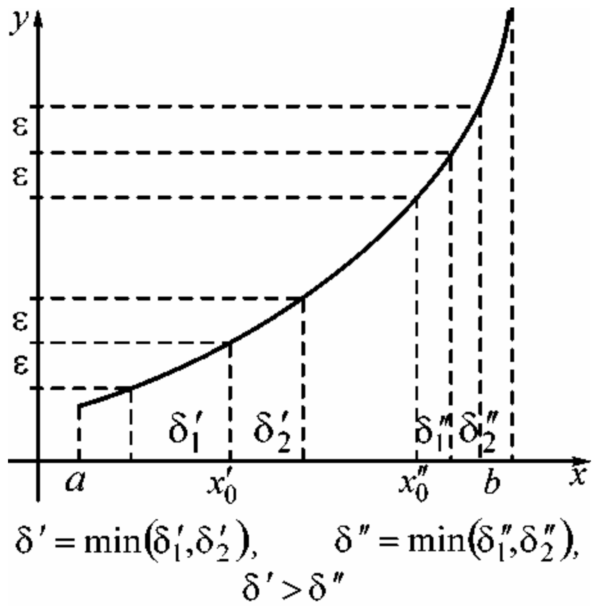


Рис. 2.1.16

Означення 2.1.48. Функція $y = f(x)$, визначена на проміжку $\left[a;\, b\right]$, називається рівномірно неперервною на цьому проміжку, якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ можна вибрати число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, таке, що для довільних точок x' і x'' з цього проміжку, для яких $|x'-x''|<\delta$, справедлива нерівність $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ (див. рис. 2.1.16).

З рівномірної неперервності функції на проміжку $[a;\, b]$ випливає її неперервність на цьому проміжку.

Функція $f(x)$, неперервна на проміжку $(a;\, b)$, не буде рівномірно неперервною на цьому проміжку, якщо існуватиме таке $\varepsilon_0>0$, що для будь-якого $\delta>0$ існуватимуть дві точки x' і x'' із проміжку $(a;\, b)$, такі, що хоча $|x'-x''|<\delta$, проте $|f(x')-f(x'')|\ge\varepsilon_0$.

Приклад 2.1.71. Довести, що функція $y=\sin x$ рівномірно неперервна на R.

Розв'язання. Дійсно, $\forall\varepsilon>0\exists\delta=\varepsilon\ \forall x'\in R, x''\in R, |x'-x''|<\delta:\ |\sin x'-$
$$-\sin x''|=2\left|\cos\frac{x'+x''}{2}\right|\left|\sin\frac{x'-x''}{2}\right|\le|x'-x''|<\delta=\varepsilon.$$

Приклад 2.1.72. Довести, що функція $f(x)=\dfrac{1}{x}$ не є рівномірно неперервною на проміжку $(0;\,1]$.

Розв'язання. Нехай $x'=x'_n=\dfrac{1}{2n}$ і $x''=x''_n=\dfrac{1}{n}$, тоді $|f(x'_n)-f(x''_n)|=$ $=2n-n=n\ge1$. Якщо виберемо число $\varepsilon\in\left(0;\,\dfrac{1}{2}\right)$, то для нього не знайдеться числа $\delta(\varepsilon)>0$, такого, щоб із нерівності $|x'-x''|<\delta(\varepsilon)$ випливала нерівність $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ для будь-яких точок x' і x'' проміжку $(0;\,1]$. Дійсно, яким би число $\delta(\varepsilon)>0$ не було, для $n>\dfrac{1}{2\delta(\varepsilon)}$ маємо $x'_n\in(0;\,1]$ і $x''\in(0;\,1]$, однак $|x'_n-x''_n|=\left|\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2n}\right|=\dfrac{1}{2n}<\delta(\varepsilon)$, а $|f(x'_n)-f(x''_n)|=n\ge1>\varepsilon$. Отже, функція $f(x)=\dfrac{1}{x}$ – неперервна на проміжку $(0;\,1]$, проте вона не є рівномірно неперервною на цьому проміжку.

Теорема 2.1.27. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;\,b]$, то вона рівномірно неперервна на цьому відрізку.

Приклад 2.1.73. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)=\dfrac{2+\operatorname{tg}x}{\cos\frac{x}{2}}$, задану на проміжку $\left[-\dfrac{1}{2};\,\dfrac{3}{2}\right]$.

Розв'язання. Знайдемо область визначення $D(f):\begin{cases}x\ne\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z,\\ x\ne\pi+2\pi l,\ l\in Z.\end{cases}$

На проміжку $\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ функція визначена; оскільки вона елементарна, то на цьому проміжку задано функцію неперервну, а отже, рівномірно неперервну.

5. Точки розриву функції та їх класифікація.

Нехай функція $f(x)$ визначена в околі точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0.

Означення 2.1.49. Якщо функція $f(x)$ не є неперервною в точці x_0, то вона називається розривною в цій точці, а точка x_0 – точкою розриву функції $f(x)$.

Функція $f(x)$ буде розривною в точці x_0, якщо виконується принаймні одна з умов:

1) функція $f(x)$ не визначена в точці x_0, хоч в усіх інших точках деякого околу точки x_0 вона визначена;

2) в точці x_0 не існує границі функції $f(x)$;

3) границя функції $f(x)$ в точці x_0 існує, але вона не дорівнює значенню цієї функції в точці x_0.

Означення 2.1.50. Точка x_0 називається точкою усувного розриву функції $f(x)$, якщо існує границя функції $f(x)$ в точці x_0, але вона не дорівнює значенню цієї функції в точці x_0(або в цій точці функцію не задано), тобто $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $f(x_0) \neq A$, або $\lim\limits_{x\to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0 + 0} f(x) = A$, $f(x_0) \neq A$ (рис. 2.1.17).

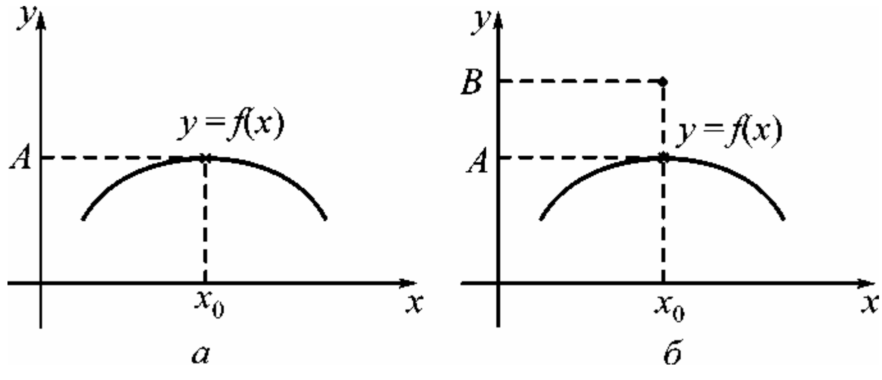


Рис. 2.1.17

Означення 2.1.51. Точка x_0 називається точкою розриву зі скінченним стрибком функції $f(x)$, якщо існують односторонні границі функції $f(x)$, але вони не збігаються, тобто $\lim\limits_{x\to x_0 - 0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0 + 0} f(x) = B$, $A \neq B$. Поведінка функції в самій точці x_0 значення не має (рис. 2.1.18).

Різницю $h = |B - A|$ називають стрибком функції $f(x)$ в точці x_0.

Означення 2.1.52. Точки усувного розриву і точки розриву зі скінченним стрибком називають точками розриву першого роду.

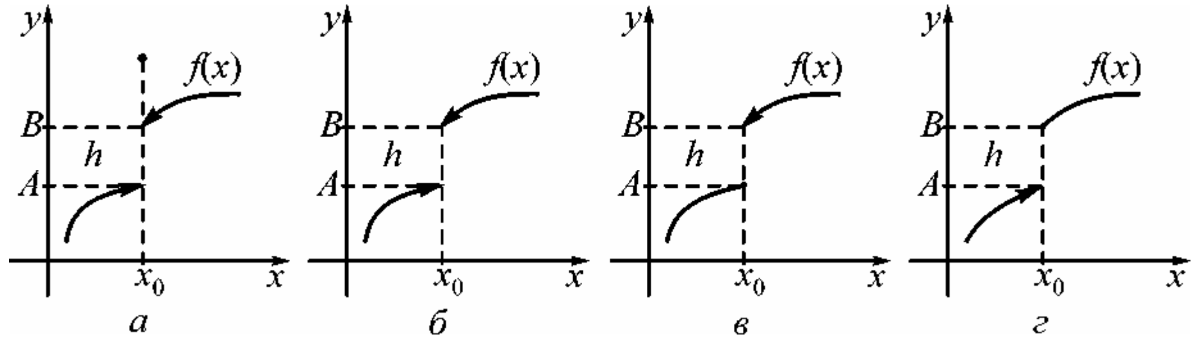


Рис. 2.1.18

Означення 2.1.53. Якщо хоча б одна із односторонніх границь функції $f(x)$ в точці x_0 дорівнює нескінченності або взагалі не існує, то x_0 – точка розриву другого роду. Як і раніше, поведінка функції $f(x)$ в точці x_0 значення не має (рис. 2.1.19).

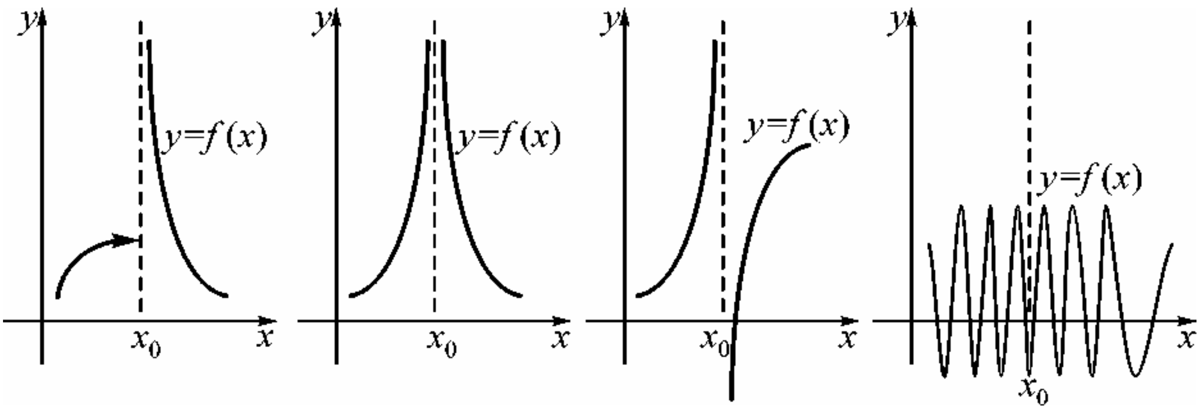


Рис. 2.1.19

Зауваження. Проміжок – загальна назва для інтервалу, півінтервалу, сегмента. Будемо позначати проміжок з граничними точками a і b через $< a; b >$.

Означення 2.1.54. Функція $y = f(x)$ називається кусково-монотонною на проміжку $< a; b >$, якщо останній можна розбити на скінченне число інтервалів: $(a; a_1)$, $(a_1; a_2)$, …, $(a_{n-1}; b)$, на кожному з яких функція монотонна.

Теорема 2.1.28. Функція $f(x)$, кусково-монотонна на проміжку $< a; b >$, може мати тільки точки розриву першого роду.

Указати множини точок, в яких функція неперервна, знайти її точки розриву, визначити їх рід, побудувати графік функції (2.1.74 – 2.1.76).

Приклад 2.1.74. $y = \begin{cases} x^2 + 2, & x \le 0, \\ x - 1, & x > 0. \end{cases}$

Розв'язання.

$$\lim_{x\to -0} y = y(0) = (x^2+2)\Big|_{x=0} = 2, \ \lim_{x\to -0} y = \lim_{x\to -0}(x-1) = -1.$$

Проміжки неперервності: $(-\infty;0]$, $(0;+\infty)$.

Точка $x_1 = 0$ – точка розриву першого роду зі скінченним стрибком (рис. 2.1.20).

Приклад 2.1.75.

$$y=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}, & x<0,\\ 2x-x^2, & x\ge 0.\end{cases}$$

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to -0} y=+\infty$,

$$\lim_{x\to +0} y = y(0)=(2x-x^2)\Big|_{x=0}=0.$$

Проміжки неперервності: $(-\infty;\,0)$ і $[0;\,+\infty)$.

Точка $x_1=0$ – точка розриву другого роду (рис. 2.1.21).

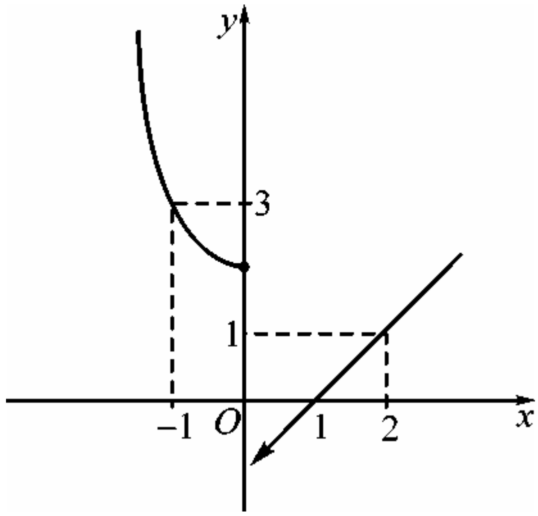


Рис. 2.1.20

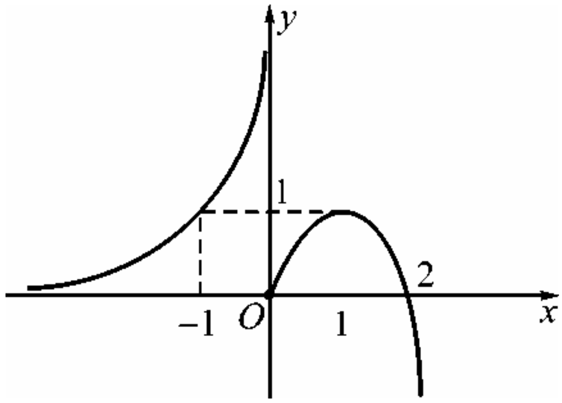


Рис. 2.1.21

Приклад 2.1.76.

$$y=\begin{cases}\cos x, & -\dfrac{\pi}{2}\le x<\dfrac{\pi}{4},\\ x^2-\dfrac{\pi^2}{16}, & \dfrac{\pi}{4}\le x\le \pi.\end{cases}$$

Розв'язання.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}-0} y=\lim_{x\to \frac{\pi}{4}-0}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}+0} y=\lim_{x\to \frac{\pi}{4}+0}\left(x^2-\frac{\pi^2}{16}\right)=0.$$

Проміжки неперервності:

$$\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}\right),\ \left(\frac{\pi}{4};\pi\right].$$

Точка $x_1=\dfrac{\pi}{4}$ – точка розриву зі скінченним стрибком (рис. 2.1.22).

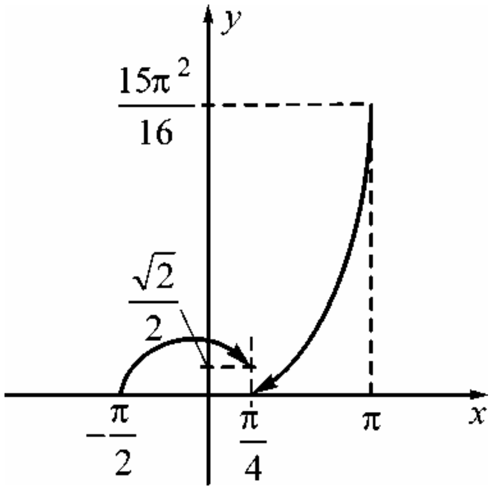


Рис. 2.1.22

Знайти точки розриву функції, визначити їх рід, доозначити функцію до неперервності в точках усувного розриву (2.1.77 – 2.1.83).

Приклад 2.1.77. $y=\dfrac{1}{x^3-3x^2-4x}$.

Розв'язання.

$$x^3-3x^2-4x=0,\ x_1=0,\ x_2=-1,\ x_3=4;$$

$D(y): x\ne -1,\ x\ne 0,\ x\ne 4$, $\lim\limits_{x\to -1} y=\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} y=\infty$, $\lim\limits_{x\to 4} y=\infty \Rightarrow x_1=0$, $x_1=-1$, $x_1=4$ – точки розриву другого роду.

Приклад 2.1.78. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

Розв'язання. $D(y): x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x < -1 \cup x > 1$.

Точок розриву немає.

Приклад 2.1.79. $y = \dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x}}$.

Розв'язання. $D(y): x \neq 0,\ x \neq -1,\ x \neq 1,\ \dfrac{1}{x-1} \neq \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x \neq -1,\ x \neq 0,\ x \neq 1$.

При $x \in D(y)$ будемо мати: $y = \dfrac{x(x-1)}{x(x+1)} = \dfrac{x-1}{x+1}$;

$$\lim_{x \to -1} x = \infty \Rightarrow x_1 = -1 \text{ – точка розриву другого роду;}$$

$$\lim_{y \to 0} y = -1 \Rightarrow x_2 = 0 \text{ – точка усувного розриву;}$$

$$\lim_{x \to 1} y = 0 \Rightarrow x_3 = 1 \text{– точка усувного розриву.}$$

Якщо доозначити $y(0) = -1$ і $y(1) = 0$, то в точках $x_2 = 0$ і $x_3 = 1$ функція буде неперервною.

Приклад 2.1.80. $y = \dfrac{1 - \sqrt{x}}{x^2 - 1}$.

Розв'язання. $D(y): \begin{cases} x \geq 0, \\ x \neq \pm 1, \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 1$.

Якщо $x \in D(y)$, то $y = -\dfrac{1 - \sqrt{x}}{(1-x)(1+x)} = -\dfrac{1}{(1+\sqrt{x})(1+x)}$; $\lim\limits_{x \to 1} y = -\dfrac{1}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = 1$ – точка усувного розриву. Якщо доозначити $y(1) = -\dfrac{1}{4}$, то функція стане неперервною в цій точці.

Приклад 2.1.81. $y = \dfrac{\arcsin x}{\sin 2x}$.

Розв'язання. $D(y): \begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ x \neq k\dfrac{\pi}{2},\ k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ x \neq 0; \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 0} y = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x}{\sin 2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{2x} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x_1 = 0$ – точка усувного розриву. Якщо доозначити $y(0) = \dfrac{1}{2}$, то функція стане неперервною в цій точці.

Приклад 2.1.82. $y = \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

Розв'язання. $D(y): x \neq \frac{\pi}{2}k$.

Розв'язавши систему

$$\begin{cases} \sin 3x = 0, \\ \sin 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \pi n,\ n \in Z, \\ 2x = \pi k,\ k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3}n, \\ x = \frac{\pi}{2}k \end{cases} \Rightarrow \frac{\pi}{3}n = \frac{\pi}{2}k \Rightarrow k = 2m,\ m \in Z,$$

робимо висновок: якщо $k = 2m$, то чисельник і знаменник одночасно дорівнюють нулю; якщо $k = 2m+1$, то нулю дорівнює тільки знаменник.

Знайдемо границі:

$$\lim_{x\to\pi m} y = \lim_{x\to\pi m}\frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \begin{cases} \frac{3}{2}, & \text{коли } m = 2l, \\ -\frac{3}{2}, & \text{коли } m = 2l+1, \end{cases} \quad l \in Z \Rightarrow \lim_{x\to 2\pi l} y = \frac{3}{2},\ \lim_{x\to\pi+2\pi l} y = -\frac{3}{2},$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+\pi l} y = \infty.$$

Таким чином, маємо: $x_1 = 2\pi l$, $x_2 = \pi + 2\pi l$ – точки усувного розриву; якщо доозначити $y(2\pi l) = \frac{3}{2}$, $y(\pi + 2\pi l) = -\frac{3}{2}$, то функція стане неперервною в цих точках; $x_3 = \frac{\pi}{2} + \pi l$ – точки розриву другого роду.

Приклад 2.1.83. $y = \dfrac{1}{\ln|x-1|}$.

Розв'язання. $D(y): \begin{cases} x \neq 1, \\ |x-1| \neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 0,\ x \neq 1,\ x \neq 2$;

$\lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\ln(1-x)} = \infty \Rightarrow x_1 = 0$ – точка розриву другого роду;

$\lim\limits_{x\to 1-0} y = \lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{1}{\ln(1-x)} = 0$, $\lim\limits_{x\to 1+0} y = \lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{1}{\ln(x+1)} = 0 \Rightarrow x_2 = 1$ – точка усувного розриву, а якщо доозначити $y(1) = 0$, то функція в цій точці стане неперервною; $\lim\limits_{x\to 2} y = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{\ln(x-1)} = \infty \Rightarrow x_3 = 2$ – точка розриву другого роду.

Знайти точки розриву функції, визначити їх рід, знайти стрибки в точках розриву першого роду (2.1.84 – 2.1.87).

Приклад 2.1.84. $y = \operatorname{sign}(x^2 - 2x - 3)$.

Розв'язання. Побудуємо графік даної функції (рис. 2.1.23), з якого видно, що $x_1 = -1$ і $x_2 = 3$ є точками розриву зі скінченним стрибком, а величина стрибка в обох випадках дорівнює 2.

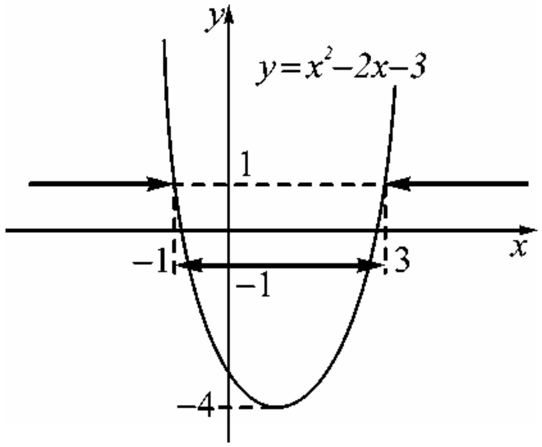


Рис. 2.1.23

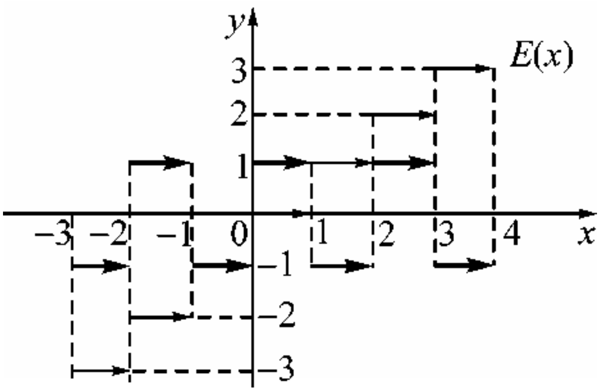


Рис. 2.1.24

Приклад 2.1.85. $y=(-1)^{E(x)}$.

Розв'язання. Проілюструємо розв'язання прикладу (рис. 2.1.24).

Очевидно, що $x_k = k(k\in Z)$ – точки розриву зі скінченним стрибком, а стрибок усюди дорівнює 2.

Приклад 2.1.86. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

Розв'язання.

$D(y): x\neq 0$; $\quad \lim\limits_{x\to -0} y = -\dfrac{\pi}{2}$,

$\lim\limits_{x\to +0} y = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x_1 = 0$ – точка розриву зі скінченним стрибком, а величина стрибка дорівнює π.

Приклад 2.1.87. $y=\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

Розв'язання.

$$D(y):\begin{cases}\dfrac{1+x}{1-x}>0,\\ x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow -1<x<0\cup 0<x<1;$$

$$\lim_{x\to 0} y = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\dfrac{1+x}{1-x}}{x} = \left|\frac{1+x}{1-x} = 1+\frac{2x}{1-x}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{2x}{1-x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{(1-x)x} =$$

$$= 2 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ – точка усувного розриву.}$$

Довести, що функція неперервна в кожній точці області визначення (2.1.88, 2.1.89).

Приклад 2.1.88. $y=\sin(x-\lg(\sqrt{x}-1))$.

Розв'язання. Дану функцію одержано із основних елементарних функцій з допомогою арифметичних операцій і операцій суперпозиції, тому вона є елементарною функцією, а отже, неперервною в області визначення.

Приклад 2.1.89. $y=\dfrac{x^{-\frac{5}{3}}-\cos\sqrt{x}}{\operatorname{tg}\arcsin|x|}$.

Розв'язання. На перший погляд, дана функція не є елементарною через операції модуля. Проте область визначення включає умову $x\geq 0$. Функцію можна переписати у вигляді

$$y=\frac{x^{-\frac{5}{3}}-\cos\sqrt{x}}{\operatorname{tg}\arcsin x}.$$

Видно, що функція належить до класу елементарних функцій, а це означає, що вона неперервна в області визначення.

Знайти значення a, при якому функція $y(x)$ буде неперервною (2.1.90, 2.1.91).

Приклад 2.1.90. $y=\begin{cases}\dfrac{(1+x)^n-1}{x}, \; x\neq 0,\\ a, \quad x=0,\; n\in N.\end{cases}$

Розв'язання. Точка $x_1=0$ – єдина точка розриву, тоді

$$\lim_{x\to 0} y=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{nx}{x}=n.$$

Якщо $a=n$, то $\lim\limits_{x\to 0} y=y(0)$, отже, функція буде неперервною.

Приклад 2.1.91. $y=\begin{cases}(\pi+2x)\operatorname{tg}x, -\pi<x<\dfrac{\pi}{2}, \; x\neq-\dfrac{\pi}{2},\\ a, \; x=-\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

Розв'язання.

Точка $x_1=-\dfrac{\pi}{2}$ – точка розриву даної функції. Тоді

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} y=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\big((\pi+2x)\operatorname{tg}x\big)=\left|\begin{array}{c} y=-\dfrac{\pi}{2}-x,\; x=-\dfrac{\pi}{2}-y,\\ y\to 0, \text{коли } x\to-\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{y\to 0}\left[\left(\pi+2\left(-\frac{\pi}{2}-y\right)\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}-y\right)\right)\right]=-\lim_{y\to 0}(2y\operatorname{ctg}y)=-\lim_{y\to 0}\frac{2y}{\operatorname{tg}y}=-2.$$

Якщо $a=-2$, то $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} y=y\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$, а це означає, що функція буде неперервною.

Дослідити функцію $y(x)$ на неперервність і побудувати її графік (2.1.92, 2.1.93).

Приклад 2.1.92. $y(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$.

Розв'язання. Проаналізуємо функцію і побудуємо її графік (рис. 2.1.25). Якщо $|x|<1$, то $x^{2n}\to 0$ при $n\to\infty$; якщо $|x|=1$, то $x^{2n}=1$; якщо $|x|>1$, то $\dfrac{1}{x^{2n}}\to 0$ при $\mathrm{n}\to 0$, звідки

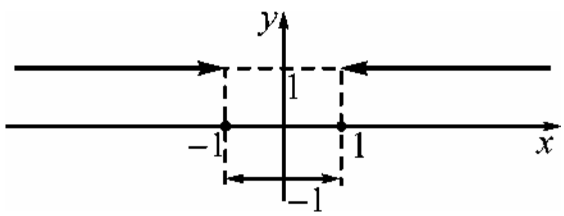


Рис. 2.1.25

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\dfrac{1}{x^{2n}}}{1+\dfrac{1}{x^{2n}}} = \begin{cases} -1, |\,x\,|<1, \\ 0, \ |\,x\,|=1, \\ 1, \ |\,x\,|>1. \end{cases}$$

Приклад 2.1.93. $y(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \cos^n x$.

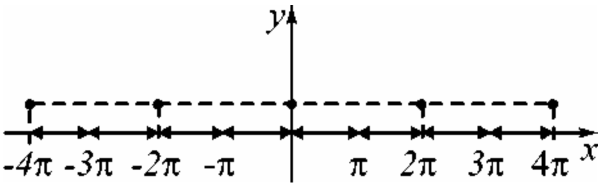


Рис. 2.1.26

Розв'язання. Дана функція парна і періодична з періодом 2π (рис. 2.1.26). Достатньо розглянути її на проміжку $[0;\pi]$: якщо $x=0$, то $\cos x = 1$ і $\cos^n x = 1$; якщо $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, то $0 < \cos x < 1$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \cos^n x = 0$; якщо $x = \dfrac{\pi}{2}$, то $\cos x = 0$ і $\cos^n x = 0$; якщо $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$, то $-1 < \cos x < 0 \Rightarrow |\cos x| < 1$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \cos^n x = 0$; якщо $x = \pi$, то $\cos x = 1$ і границі $\lim\limits_{n\to\infty} \cos^n x$ не існує.

Враховуючи періодичність, одержуємо

$$y(x) = \begin{cases} 1, & x = 2\pi k, \\ 0, & 2\pi k < x < 2\pi + 2\pi k, \end{cases} \quad x \ne \pi + 2\pi k,\ k \in Z.$$

2.2. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

2.2.1. Похідна. Техніка диференціювання функцій

1. Означення похідної. Зв'язок неперервності і диференційовності функцій.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $(a;b)$, точки x і $x + \Delta x$ належать цьому проміжку. Величина $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ − приріст функції при прирості аргументу Δx.

Означення 2.2.1. Границя відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx при $\Delta x \to 0$, якщо ця границя існує, називається похідною функції $y = f(x)$ в точці x.

Похідну функції $y = f(x)$ в точці x позначають одним із символів:

$$f'(x),\ y',\ y'_x,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{df}{dx},\ \ldots.$$

Похідну функції $y = f(x)$ у фіксованій точці x_0 позначають

$$f'(x_0),\ y'(x_0),\ \frac{dy(x_0)}{dx},\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0},\ \ldots.$$

Таким чином, $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Якщо функція $y = f(x)$ має похідну в точці x, то вона називається диференційовною в цій точці (це так зване перше означення диференційовності функції).

Якщо функція диференційовна в кожній точці інтервалу $(a;\, b)$, то вона називається диференційовною на проміжку $(a;\, b)$.

В указаному розумінні не можна говорити про диференційовність функцій у граничних точках відрізка $[a;\, b]$. Функція не може мати похідної в граничних точках. Функція не може мати нескінченної похідної. Про розширене поняття похідної див. в п. 2 даного підрозділу.

Теорема 2.2.1 (**необхідна ознака диференційовності функції**). Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x проміжку $(a;\, b)$, то вона неперервна в цій точці.

Таким чином, із диференційовності функції випливає її неперервність. Однак із неперервності функції не випливає її диференційовність.

Приклад 2.2.1. Довести, що функція $y = \begin{cases} x\ , \text{ якщо } x \le 1, \\ 2x - 1, \text{ якщо } x > 1 \end{cases}$ неперервна, але недиференційовна в точці $x = 1$ (рис. 2.2.1).

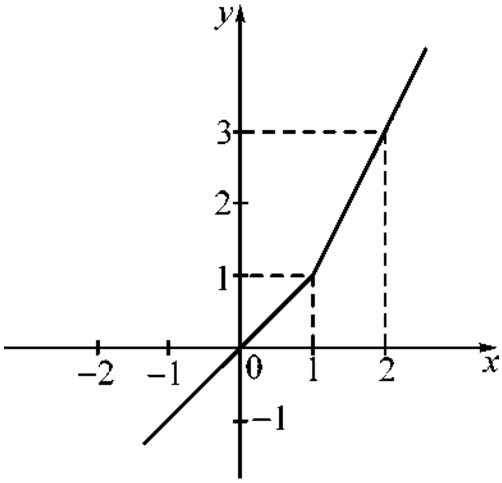


Рис. 2.2.1

Розв'язання. Оскільки $\lim\limits_{x \to 1-0} y = y(1) = \lim\limits_{x \to 1+0} y = 1$, то функція неперервна в точці $x = 1$. Зауважимо, що при $\Delta x \to 0 \iff x \to 1$

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to 1-0} \frac{x - 1}{x - 1} = 1,$$

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to 1+0} \frac{(2x-1)-1}{x-1} = \lim_{x \to 1+0} \frac{2(x-1)}{x-1} = 2,$$

$\lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \ne \lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ – не існує, а тому функція недиференційовна в точці $x = 1$.

Таким чином, із неперервності не випливає диференційовність функції.

Висновок. Неперервність функції не є достатньою умовою для її диференційовності.

2. Односторонні та нескінченні похідні. Приклади недиференційовних функцій.

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[x_0;\, b)((a;\, x_0])$. Вважають, що функція в точці x_0 має праву (ліву) похідну, якщо в цій точці існує права (ліва) границя:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \left(\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \right).$$

Для того щоб у точці x_0 існувала похідна функції $f(x)$ в звичайному розумінні, необхідно і достатньо, щоб у цій точці існували права і ліва похідні цієї функції та щоб права похідна дорівнювала лівій похідній.

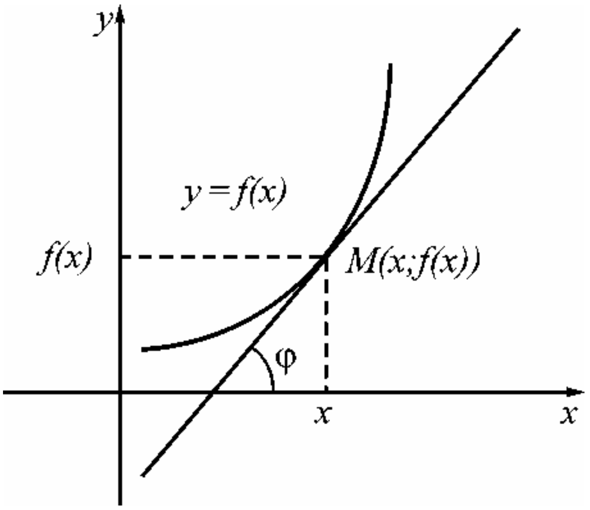


Рис. 2.2.2

Зауваження. Змістовна сторона похідної детально розглядатиметься в підрозд. 2.2.2. Щоб мати можливість ілюструвати поняття, пов'язані з похідною, зараз скажемо: похідна $f'(x)$ функції $f(x)$ дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ в точці $M(x; f(x))$, тобто $f'(x) = \mathrm{tg}\varphi = k_{\text{дот}}$ (рис. 2.2.2).

Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x, то можна провести дотичну до графіка $y = f(x)$ в точці $M(x; f(x))$.

Розглянемо графіки функцій (рис. 2.2.3):

а) у точці x_1 функція $f_1(x)$ диференційовна (до графіка $y = f_1(x)$ можна провести дотичну в точці $(x_1; f_1(x_1))$;

б) у точці x_2 функція $f_2(x)$ недиференційовна, але має односторонні похідні (в точці $(x_2; f_2(x_2))$ не можна провести дотичної);

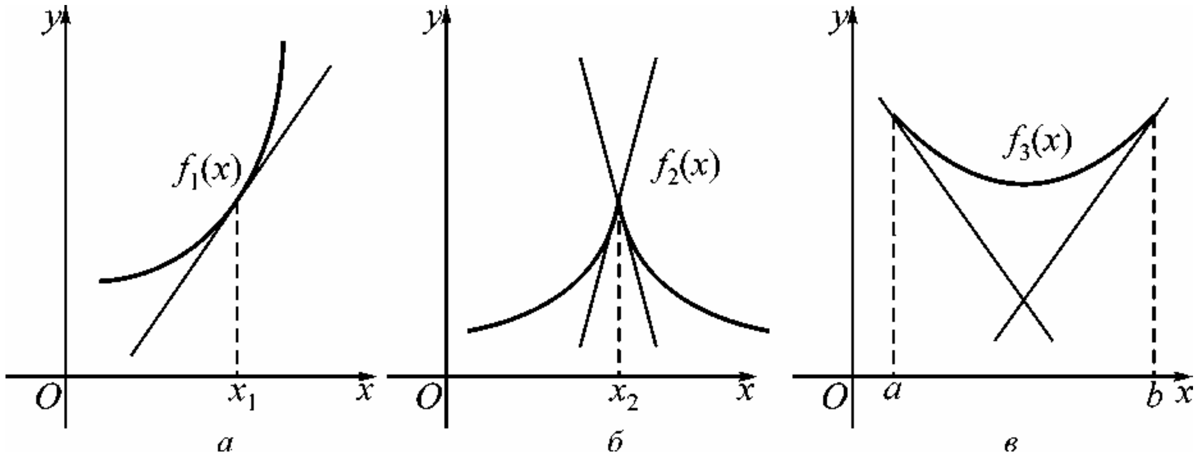


Рис. 2.2.3

в) функція $f_3(x)$, що задана лише на відрізку $[a, b]$, недиференційовна в точках a і b, оскільки це граничні точки, але диференційовна в точці a справа, а в точці b зліва.

Функція $y = f(x)$ має в точці x нескінченну похідну, яка дорівнює $+\infty(-\infty)$, якщо в цій точці $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$ $\left(f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty \right)$.

Випадок ∞ тут виключається.

Функції, графіки яких показані на рис. 2.2.4, мають нескінченні похідні: $f_4'(x_4) = +\infty$, $f_5'(x_5) = -\infty$ (дотичні в указаних точках тут провести можна).

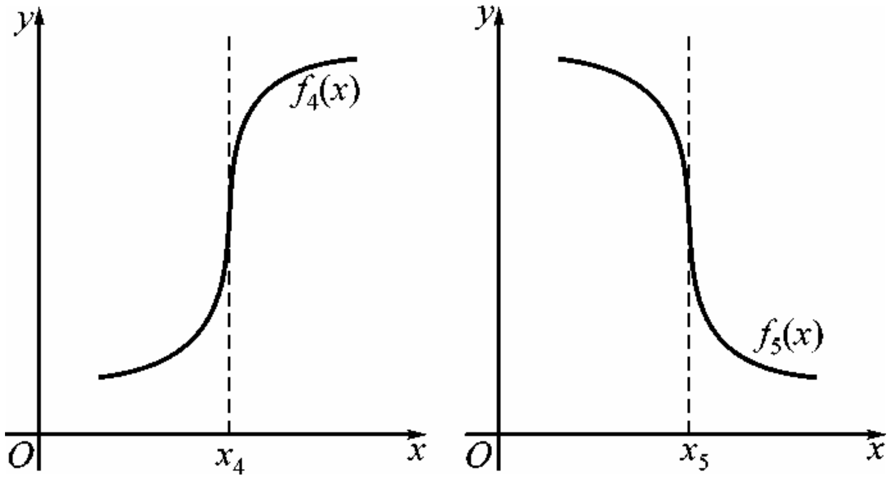


Рис. 2.2.4

Функції, графіки яких зображені на рис. 2.2.5, в точках x_6, x_7 не мають нескінченних похідних. Будемо вважати, що вони мають односторонні нескінченні похідні: $f_6'(x_6 - 0) = +\infty$, $f_6'(x_6 + 0) = -\infty$, $f_7'(x_7 - 0) = -\infty$, $f_7'(x_7 + 0) = +\infty$ (дотичні в указаних точках не існують).

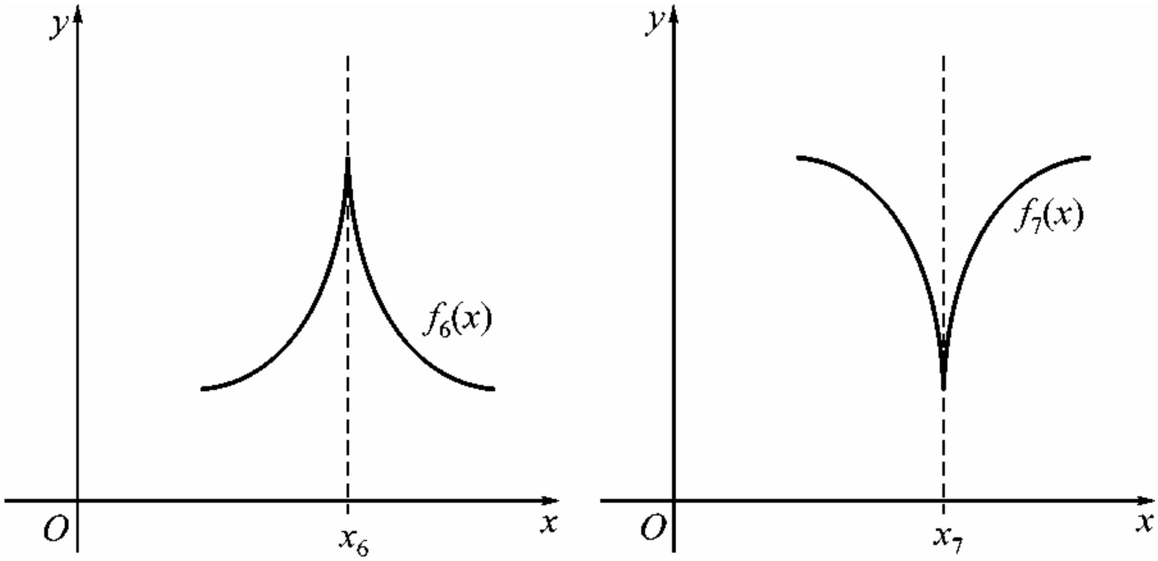


Рис. 2.2.5

Із теореми 2.2.1 випливає, що в кожній точці розриву функція $f(x)$ недиференційовна. Проте функція може бути недиференційовна і в точках, у яких ця функція неперервна (див. приклад 2.2.1). Тут було розглянуто неперервні функції, які в деяких точках недиференційовні, оскільки мають у цих точках нескінченні похідні. Можуть бути функції, які в деякій точці x_0 неперервні, однак у цій точці вони не мають ні правої, ні лівої, ні скінченної, ні нескінченної похідних.

Приклад 2.2.2. Показати, що функція $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{\pi}{x}, \text{ якщо } x \neq 0, \\ 0, \text{ якщо } x = 0 \end{cases}$ неперервна, але недиференційовна в точці $x = 0$.

Розв'язання. Оскільки $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\frac{\pi}{x}\right) = f(0) = 0$, то функція неперервна в точці $x = 0$.

З рівності $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x\sin\frac{\pi}{x}}{x} = \sin\frac{\pi}{x}$ $(x \neq 0)$ випливає, що функція $f(x)$ в точці $x = 0$ не має похідної (ні правої, ні лівої, ні скінченної, ні нескінченної).

Існують функції, неперервні в кожній точці інтервалу $(a; b)$, але недиференційовні в жодній точці цього інтервалу.

3. Загальні прийоми диференціювання функцій.

Похідна суми, добутку і частки. Нехай $u(x)$ і v(x) – функції, диференційовні в точці x, с – стала, тоді

$$(u + v)' = u' + v', \tag{2.2.1}$$

$$(uv)' = u'v + uv', \tag{2.2.2}$$

$$(cu)' = cu', \tag{2.2.3}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad (v \neq 0), \tag{2.2.4}$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad (v \neq 0). \tag{2.2.5}$$

Похідна складеної функції. Якщо функція $u(x)$ диференційовна в точці x, а функція $f(u)$ диференційовна в точці $u = u(x)$, то складена функція $f[u(x)]$ диференційовна в точці x, причому

$$f'\left[u(x)\right] = f'(u)\cdot u'(x). \tag{2.2.6}$$

Похідна оберненої функції. Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна на проміжку $(a; b)$, в кожній точці $x \in (a; b)$ $f'(x) \neq 0$, то обернена функція $x = f^{-1}(y)$ в точці $y = f(x)$ має похідну

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)}. \tag{2.2.7}$$

Якщо пару взаємно обернених функцій позначити $y = y(x)$ і $x = x(y)$, то можна записати $x'(y) = \frac{1}{y'(x)}$ $\left(x'_y = \frac{1}{y'_x}\right)$.

Похідна параметрично заданої функції. Нехай функція $y = f(x)$ задана параметрично: $\begin{cases} x = \varphi(t) = x(t), \\ y = \psi(t) = y(t). \end{cases}$

Якщо функції $x = \varphi(t)$ і $y = \psi(t)$ диференційовні в точці t, причому $\varphi'(t) \neq 0$, то функція $y = f(x)$ в точці $x = \varphi(t)$ має похідну

$$y'_x(x) = \frac{\psi'_t(t)}{\varphi'_t(t)}. \qquad (2.2.8)$$

Інші позначення : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{d\psi}{dt}}{\frac{d\varphi}{dt}} = \dfrac{\psi'_t}{\varphi'_t} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$ (символ "$\cdot$" використовується, коли t – час).

Диференціювання неявно заданих функцій. Нехай співвідношення $F(x, y) = 0(*)$ задає неявно функцію $y = y(x)$. Загальну формулу знаходження похідної буде наведено в підрозд. 2.3.1, а зараз наведемо алгоритм одержання похідної. Знайдемо похідну обох частин (*), маючи на увазі, що y – функція аргументу x, тому похідна від нього дорівнює y'. Одержимо рівняння вигляду $\Phi(x, y, y') = 0$, звідки і знайдемо y'.

Логарифмічне диференціювання. Іноді виникає потреба перед знаходженням похідної злогарифмувати функцію за схемою:

$$y = f(x), \quad \ln y = \ln f(x) = \varphi(x), \quad \frac{y'}{y} = \varphi'(x), \quad y' = y \cdot \varphi'(x) = f(x)\varphi'(x).$$

4. Таблиця похідних.

$$(c)' = 0,$$

$$(x)' = 1,$$

$$(x^2)' = 2x, \qquad (u^2)' = 2uu',$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \qquad \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2}u',$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad \left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}}u',$$

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1} (n \in R, n \neq 0), \qquad \left(u^n\right)' = nu^{n-1}u',$$

$$(e^x)' = e^x, \qquad (e^u)' = e^u u',$$

$$(a^x)' = a^x \ln a, \qquad (a^u)' = a^u \ln a u',$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \qquad (\ln \mathrm{u})' = \frac{1}{u}u',$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \qquad (\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a}u',$$

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\sin u)' = \cos u \cdot u',$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \qquad (\cos u)' = -\sin u \cdot u',$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u}u',$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \qquad (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u}u',$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u',$$
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u',$$
$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad (\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2}u',$$
$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \qquad (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2}u',$$
$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \qquad (\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u',$$
$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \qquad (\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u',$$
$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \qquad (\operatorname{th} u)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u}u',$$
$$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \qquad (\operatorname{cth} u)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u}u'.$$

5. Приклади на техніку диференціювання.

Знайти похідні функцій (2.2.3 – 2.2.11).

Приклад 2.2.3. $y = \dfrac{e^{ax}}{1+a^2}(a \sin x - \cos x)$.

Розв'язання.

$$y' = \frac{1}{1+a^2}\left[ae^{ax}(a \sin x - \cos x) + e^{ax}(a \cos x + \sin x)\right] =$$
$$= \frac{e^{ax}}{1+a^2}\left(a^2 \sin x - a\cos x + a\cos x + \sin x\right) = \frac{e^{ax}}{1+a^2}(1+a^2)\sin x = e^{ax}\sin x.$$

Приклад 2.2.4. $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+R} + \dfrac{R}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2+R}\right)$.

Розв'язання.

$$y' = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+R} + \frac{x}{2}\frac{2x}{2\sqrt{x^2+R}} + \frac{R}{2}\frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+R}}}{x+\sqrt{x^2+R}} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+R+x^2}{\sqrt{x^2+R}} + R\frac{\sqrt{x^2+R}+x}{(x+\sqrt{x^2+R})\sqrt{x^2+R}}\right) = \frac{1}{2}\frac{2(x^2+R)}{\sqrt{x^2+R}} = \sqrt{x^2+R}.$$

Приклад 2.2.5. $y = \arcsin\dfrac{2x^2}{1+x^4}, \quad |x| < 1$.

Розв'язання.

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2x^2}{1+x^4}\right)^2}} \cdot 2\frac{2x(1+x^4) - 4x^3x^2}{(1+x^4)^2} =$$

$$=2\frac{1+x^4}{\sqrt{1+2x^4+x^8-4x^4}}\frac{2x(1+x^4-2x^4)}{(1+x^4)^2}=4x\frac{1-x^4}{\sqrt{(1-x^4)^2(1+x^4)}}=\frac{4x}{1+x^4}.$$

Приклад 2.2.6. $y=e^x \operatorname{arctg} e^x - \ln\sqrt{1+e^{2x}}$.

Розв'язання. Перетворимо дану функцію:

$$y=e^x \operatorname{arctg} e^x-\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}),$$

тоді

$$y'=e^x \operatorname{arctg} e^x+e^x\frac{1}{1+e^{2x}}e^x-\frac{1}{2}\frac{1}{1+e^{2x}}2e^{2x}=$$

$$=e^x \operatorname{arctg} e^x+\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}-\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}=e^x\operatorname{arctg} e^x.$$

Приклад 2.2.7. $y=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}+\ln\dfrac{1+\sin x}{\cos x}$.

Розв'язання. Запишемо дану функцію у вигляді

$$y=\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\ln(1+\sin x)-\ln\cos x.$$

Тоді $y'=\dfrac{\cos x\cos^2 x-2\cos x(-\sin x)\sin x}{\cos^4 x}+\dfrac{\cos x}{1+\sin x}-\dfrac{-\sin x}{\cos x}=$

$$=\frac{\cos x(\cos^2 x+2\sin^2 x)}{\cos^4 x}+\frac{\cos^2 x+\sin x+\sin^2 x}{(1+\sin x)\cos x}=\frac{1+\sin^2 x}{\cos^3 x}+\frac{1+\sin x}{(1+\sin x)\cos x}=$$

$$=\frac{1}{\cos x}\left(\frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x}+1\right)=\frac{1+\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^3 x}=\frac{2}{\cos^3 x}=2\sec^3 x.$$

Приклад 2.2.8. $y=\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\left(3\ln\sqrt[3]{\dfrac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2}}+2\operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)$.

Розв'язання. Скористаємося властивостями логарифмів:

$$y=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(3\frac{1}{3}\left(\ln(1+x\sqrt{2}+x^2)-\ln(1-x\sqrt{2}+x^2)\right)+2\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right);$$

$$y'=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}+2x}{1+x\sqrt{2}+x^2}-\frac{-\sqrt{2}+2x}{1-x\sqrt{2}+x^2}+2\frac{1}{1+\dfrac{2x^2}{(1-x^2)^2}}\sqrt{2}\frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\sqrt{2}\left(\frac{1+\sqrt{2}x}{(1+x^2)+x\sqrt{2}}+\frac{1-\sqrt{2}x}{(1+x^2)-x\sqrt{2}}+2\frac{1+x^2}{1+x^4}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1-\sqrt{2}x+x^2+\sqrt{2}x-2x^2+\sqrt{2}x^3+1+x\sqrt{2}+x^2-\sqrt{2}x-2x^2-\sqrt{2}x^3}{(1+x^2)^2-2x^2}+\right.$$

$$\left.+2\frac{1+x^2}{1+x^4}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{2-2x^2}{1+x^4}+2\frac{1+x^2}{1+x^4}\right)=\frac{1}{4}2\left(\frac{1-x^2}{1+x^4}+\frac{1+x^2}{1+x^4}\right)=\frac{1}{1+x^4}.$$

Приклад 2.2.9. $y=\frac{1}{2}\,\mathrm{th}\,x+\frac{\sqrt{2}}{8}\ \ln\ \frac{1+\sqrt{2}\ \mathrm{th}\,x}{1-\sqrt{2}\ \mathrm{th}\,x}$.

Розв'язання.

$$y=\frac{1}{2}\ \mathrm{th}\,x+\frac{\sqrt{2}}{8}\left[\ln\,(1+\sqrt{2}\ \mathrm{th}\,x)-\ln\,(1-\sqrt{2}\ \mathrm{th}\,x)\right];$$

$$y'=\frac{1}{2}\frac{1}{\mathrm{ch}^2x}+\frac{\sqrt{2}}{8}\left[\frac{\sqrt{2}\,\frac{1}{\mathrm{ch}^2x}}{1+\sqrt{2}\ \mathrm{th}\,x}-\frac{-\sqrt{2}\,\frac{1}{\mathrm{ch}^2x}}{1-\sqrt{2}\ \mathrm{th}\,x}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{\mathrm{ch}^2x}+\frac{\sqrt{2}}{8}\frac{\sqrt{2}}{\mathrm{ch}^2x}\frac{1-\sqrt{2}\ \mathrm{th}\,x+1+\sqrt{2}\ \mathrm{th}\,x}{1-2\ \mathrm{th}^2x}=\frac{1}{2}\frac{1}{\mathrm{ch}^2x}\left(1+\frac{1}{1-2\ \mathrm{th}^2x}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\ \mathrm{ch}^2x}\frac{1-2\ \mathrm{th}^2x+1}{1-2\ \mathrm{th}^2x}=\frac{1-\ \mathrm{th}^2x}{\mathrm{ch}^2x(1-2\ \mathrm{th}^2x)}=\left|\begin{array}{l}1-\ \mathrm{th}^2x=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2x},\\ \mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{\mathrm{ch}^2x(\mathrm{ch}^2x-2\mathrm{sh}^2x)}=\frac{1}{(1+\mathrm{sh}^2x)(1-\mathrm{sh}^2x)}=\frac{1}{1-\mathrm{sh}^4x}.$$

Приклад 2.2.10. $y=\frac{\mathrm{ch}\,x^2}{\mathrm{sh}^2x^2}-\ln\ \mathrm{cth}\ \frac{x^2}{2}$.

Розв'язання. Позначимо $x^2=u$, тоді $y=\frac{\mathrm{ch}\,u}{\mathrm{sh}^2u}-\ln\,\mathrm{cth}\ \frac{u}{2}$, де $u=x^2$.

Знайдемо похідну:

$$y'=\left[\frac{\mathrm{sh}\,u\ \mathrm{sh}^2u-2\ \mathrm{sh}\,u\ \mathrm{ch}\,u\ \mathrm{ch}\,u}{\mathrm{sh}^4u}-\ \mathrm{th}\ \frac{u}{2}\left(-\frac{1}{\mathrm{sh}^2\,\frac{u}{2}}\right)\frac{1}{2}\right]u'=|\,u'=2x\,|=$$

$$=\left[\ \mathrm{sh}\,u\frac{\mathrm{sh}^2u-2\ \mathrm{ch}^2u}{\mathrm{sh}^4u}+\frac{\mathrm{sh}\ \frac{u}{2}}{2\ \mathrm{ch}\ \frac{u}{2}\ \mathrm{sh}^2\,\frac{u}{2}}\right]2x=\left|2\ \mathrm{sh}\ \frac{u}{2}\ \mathrm{ch}\ \frac{u}{2}=\mathrm{sh}\,u\right|=$$

$$=2x\left(\frac{-1-\mathrm{ch}^2u}{\mathrm{sh}^3u}+\frac{1}{\mathrm{sh}\,u}\right)=2x\frac{-1-\mathrm{ch}^2u+\mathrm{sh}^2u}{\mathrm{sh}^3u}=-\frac{4x}{\mathrm{sh}^3u}=-\frac{4x}{\mathrm{sh}^3x^2}.$$

Приклад 2.2.11. $y=\frac{1}{\sin^4x+1}+\ln\ \frac{\sin^4x}{\sin^4x+1}$.

Розв'язання. Позначимо $\sin^4x=u$, тоді

$$y=\frac{1}{u+1}+\ln\frac{u}{u+1}=\frac{1}{u+1}+\ \ln u-\ \ln\,(u+1)\text{, а}$$

$$y'=\left[-\frac{1}{(u+1)^2}+\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\right]u'=\frac{-u+u^2+2u+1-u^2-u}{u(u+1)^2}u'=\frac{u'}{u(u+1)^2}=$$

$$=\left|u'=4\sin^3x\cos x\,\right|=\frac{4\sin^3x\cos x}{\sin^4x\left(\sin^4x+1\right)^2}=\frac{4\,\mathrm{ctg}\,x}{\left(\sin^4x+1\right)^2}.$$

Знайти похідні функцій, а також їх значення в указаних точках (2.2.12 – 2.2.14).

Приклад 2.2.12. $y = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x - \ln \sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}}, \qquad x_0 = -\frac{1}{2}.$

Розв'язання. Область визначення функції – об′єднання двох множин:

$$D_1 = \left\{ x \left(\begin{cases} 1+x>0, \\ 1-x>0 \end{cases} \right) \right\} \quad \text{и} \quad D_2 = \left\{ x \left(\begin{cases} 1+x<0, \\ 1-x<0 \end{cases} \right) \right\}.$$

Перетворення функції $y = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{4}\ln(1+x) + \frac{1}{4}\ln(1-x)$ справедливі тільки для множини D_1. Формально треба розглядати і другий випадок, але оскільки точка $x_0 = -\frac{1}{2}$ належить множині D_1, то зупинимося на цьому перетворенні:

$$y' = \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{1+x} + \frac{1}{4}\frac{-1}{1-x} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2} -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\frac{1-x^2-1-x^2}{1-x^4} = -\frac{x^2}{1-x^4} = \frac{x^2}{x^4-1};$$

$$y'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{16}-1} = -\frac{4}{15}.$$

Приклад 2.2.13. $x = t\sqrt{4-t^2} + 4\arcsin\frac{t}{2}, \ t_1 = 0, \ t_2 = 2.$

Розв'язання. Тут x – функція, t – аргумент, отже,

$$x' = \frac{4-t^2-t^2}{\sqrt{4-t^2}} + 2\frac{2}{\sqrt{4-t^2}} = \frac{8-2t^2}{\sqrt{4-t^2}} = 2\sqrt{4-t^2}; \quad x'(0) = 4, \quad x'(2) = 0.$$

Дійсно, оскільки $t_2 = 2$ – гранична точка області визначення, похідної даної функції, строго кажучи, не існує. Знайдено лівосторонню похідну.

Приклад 2.2.14. $\rho = \varphi^2 \arccos\frac{2}{\varphi} - 2\sqrt{\varphi^2-4}, \ \varphi_1 = -2, \ \varphi_2 = 2.$

Розв'язання. Тут ρ – функція, φ – аргумент, отже,

$$\rho' = \frac{d\rho}{d\varphi} = 2\varphi\arccos\frac{2}{\varphi} + \varphi^2\left(-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{\varphi^2}}}\right)\left(-\frac{2}{\varphi^2}\right) - 2\frac{2\varphi}{2\sqrt{\varphi^2-4}} =$$

$$= 2\varphi\arccos\frac{2}{\varphi} + \frac{2|\varphi|}{\sqrt{\varphi^2-4}} - \frac{2\varphi}{\sqrt{\varphi^2-4}}.$$

При $\varphi > 0 \quad \rho' = 2\varphi\arccos\frac{2}{\varphi}, \quad \rho'(2) = 4\arccos 1 = 0$; при $\varphi < 0$

$\rho' = 2\varphi \arccos\frac{2}{\varphi} - \frac{4\varphi}{\sqrt{\varphi^2 - 4}}, \quad \rho'(-2) = +\infty$.

Тут також (див. зауваження до прикладу 2.2.13) знайдено односторонні похідні (самих похідних не існує).

Приклад 2.2.15. Показати, що функція $y = (x^2 + 1)(e^x + C)$ перетворює рівняння $y' - \frac{2xy}{x^2 + 1} = e^x (x^2 + 1)(*)$ в тотожність.

Розв'язання. Знайдемо $y' = 2x(e^x + C) + (x^2 + 1)e^x$.

Вирази для y і y' підставимо в ліву частину рівняння (*):

$$y' - \frac{2xy}{x^2 + 1} = 2x(e^x + C) + (x^2 + 1)e^x - \frac{2x(x^2 + 1)(e^x + C)}{x^2 + 1} =$$
$$= 2x(e^x + C) + (x^2 + 1)e^x - 2x(e^x + C) = e^x (x^2 + 1) .$$

Одержано праву частину рівняння (*). Отже, функція y перетворює дане рівняння в тотожність (є розв'язком цього рівняння).

Приклад 2.2.16. Показати, що функція $y = \frac{x - e^{-x^2}}{2x^2}$ задовольняє диференціальному рівнянню $xy' + 2y = e^{-x^2} + \frac{1}{2x}(**)$.

Розв'язання. Перетворимо дану функцію: $y = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^2} e^{-x^2}$.

Далі маємо

$$y' = -\frac{1}{2x^2} - \frac{-2}{2x^3} e^{-x^2} - \frac{1}{2x^2} e^{-x^2} (-2x) = -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^3} e^{-x^2} + \frac{1}{x} e^{-x^2} .$$

Вирази для y і y' підставимо в ліву частину рівняння (**):

$$-\frac{1}{2x} + \frac{1}{x^2} e^{-x^2} + e^{-x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} e^{-x^2} = e^{-x^2} + \frac{1}{2x} .$$

Одержано праву частину рівняння (**). Отже, функція задовольняє диференціальному рівнянню (**).

Приклад 2.2.17. Показати, що функція $s = t^2 (1 + m\sqrt[t]{e})$ задовольняє рівнянню $t^2 (s' - 1) = (2t - 1)s(***)$.

Розв'язання. Перетворимо функцію: $s = t^2 (1 + me^{\frac{1}{t}})$, знайдемо її похідну:

$$s' = 2t\left(1 + me^{\frac{1}{t}}\right) + t^2 me^{\frac{1}{t}}\left(-\frac{1}{t^2}\right) = 2t\left(1 + me^{\frac{1}{t}}\right) - me^{\frac{1}{t}} .$$

Вирази для s і s' підставимо в ліву частину рівняння (***):

$$t^2\left[2t\left(1 + me^{\frac{1}{t}}\right) - me^{\frac{1}{t}} - 1\right] = (2t - 1)t^2\left(1 + me^{\frac{1}{t}}\right) = (2t - 1)s .$$

Одержано праву частину рівності (***), отже, функція s задовольняє даному рівнянню.

Приклад 2.2.18. Знайти формулу для суми

$$S_1 = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}.$$

Розв'язання. Запишемо тотожність

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \qquad (x \neq 1).$$

Знайдемо похідні обох частин тотожності:

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} = \frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1} - 1)}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

Отже, $S_1 = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$.

Приклад 2.2.19. Одержати формулу для суми

$$S_2 = \sin x + 3\sin 3x + \ldots + (2n-1)\sin(2n-1)x.$$

Розв'язання. Спочатку дістанемо формулу для суми

$$S = \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \ldots + \cos(2n-1)x.$$

Домножимо обидві частини останньої рівності на $\sin x$:

$$\sin x \cdot S = \sin x \cos x + \sin x \cos 3x + \sin x \cos 5x + \ldots + \sin x \cos(2n-3)x + \\ + \sin x \cos(2n-1)x.$$

Далі одержимо:

$$\sin x \cdot S = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\sin 4x - \frac{1}{2}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 6x - \frac{1}{2}\sin 6x + \ldots$$

$$\ldots - \frac{1}{2}\sin(2n-4)x + \frac{1}{2}\sin(2n-2)x - \frac{1}{2}\sin(2n-2)x + \frac{1}{2}\sin 2nx,$$

$$\sin x \cdot S = \frac{1}{2}\sin 2nx,$$

$$S = \frac{\sin 2nx}{2\sin x} \quad (x \neq \pi k,\ k \in Z).$$

Таким чином, $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \ldots + \cos(2n-1)x = \dfrac{\sin 2nx}{2\sin x}$.

Знайшовши похідну, дістанемо

$$S_2 = \frac{2n\cos 2nx \sin x - \sin 2nx \cos x}{2\sin^2 x} = \frac{4n\cos 2nx \sin x - 2\sin 2nx \cos x}{4\sin^2 x} =$$

$$= \frac{2n\sin(2n+1)x - 2n\sin(2n-1)x - \sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x}{4\sin^2 x} =$$

$$= \frac{(2n-1)\sin(2n+1)x - (2n+1)\sin(2n-1)x}{4\sin^2 x}.$$

Зауваження. Існує зв'язок між монотонністю функції та знаком її похідної (докладно це питання розглядатиметься в підрозд. 2.2.7): якщо функція $y = f(x)$ диференційовна на інтервалі $(a; b)$ і $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ для кожного $x \in (a; b)$, то функція зростає (спадає) на цьому інтервалі.

Приклад 2.2.20. Знайти похідну функції, оберненої до функції $y = x + x^3, \quad x \in R$.

Розв'язання. Дана функція скрізь неперервна, її похідна $y' = 1 + 3x^2 > 0$, отже, функція строго монотонна, тому існує обернена функція $x = x(y)$, похідна якої

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1 + 3x^2}.$$

Приклад 2.2.21. Знайти похідну функції, оберненої до функції $y = x + \ln x, \quad x > 0$.

Розв'язання. Знайдемо $y' = 1 + \frac{1}{x} = \frac{1+x}{x}$. Оскільки $y' > 0$, то функція $y = y(x)$ – неперервна і монотонна при $x > 0$. Тому існує обернена функція $x = x(y)$, і її похідна дорівнює

$$x'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{x}{x+1}.$$

Приклад 2.2.22. Знайти значення похідної оберненої функції до функції $y = 2x - \frac{\cos x}{2}$ при $y_0 = -\frac{1}{2}$.

Розв'язання. Знайдемо $y' = 2 + \frac{\sin x}{2}, \quad y' > 0$.

Функція $y = y(x)$ неперервна і монотонна, тому існує обернена функція $x = x(y)$, і її похідна дорівнює

$$x' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2 + \frac{\sin x}{2}} = \frac{2}{4 + \sin x}.$$

Знайдемо таке x_0, яке відповідає $y_0 = -\frac{1}{2}$: $-\frac{1}{2} = 2x - \frac{\cos x}{2}$,

$$\cos x = 4x + 1, \; x_0 = 0; \; x'(y)\Big|_{y=-\frac{1}{2}} = \frac{2}{4 + \sin x}\Big|_{x=0} = \frac{1}{2}.$$

Приклад 2.2.23. Показати, що існує функція $y = f(x)$, визначена рівнянням $y - \varepsilon \sin y = x \quad (0 \le \varepsilon < 1)$, і знайти похідну $f'(x)$.

Розв'язання. Дане рівняння визначає функцію $x = \varphi(y)$. Знайдемо $\varphi'(y) = 1 - \varepsilon \cos y$. При заданих обмеженнях на ε $\varphi'(y) > 0$, отже, функція $x = \varphi(y)$ неперервна і монотонна, тобто існує обернена до неї функція, а саме функція $y = f(x)$. Знайдемо її похідну:

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} = \frac{1}{1 - \varepsilon \cos y}.$$

Приклад 2.2.24. Знайти похідну функції $y = \operatorname{arsh} x$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $x = \operatorname{sh} y$. Її похідна $x'(y) = \operatorname{ch} y > 0$, отже, функція неперервна і монотонна на числовій осі. Оберненою до неї є саме функція $y = y(x) = \operatorname{arsh} x$, тому

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\operatorname{ch} y} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \operatorname{ch} y = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 y} \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Тут похідна $y'(x)$ функції $y(x)$ виражена через x.

Таким чином, $(\operatorname{arsh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

Приклад 2.2.25. Дано $y = \dfrac{1 - x^4}{1 + x^4}$. Знайти $\dfrac{dx}{dy}$: а) через x; б) через y.

Розв'язання. Спочатку знайдемо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4x^3(1 + x^4) - 4x^3(1 - x^4)}{(1 + x^4)^2} = \frac{-8x^3}{(1 + x^4)^2}.$$

Далі маємо:

а) $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}} = -\dfrac{(1 + x^4)^2}{8x^3}$;

б) $y = \dfrac{1 - x^4}{1 + x^4} \Rightarrow x^4 = \dfrac{1 - y}{1 + y}$, $\quad x = \sqrt[4]{\dfrac{1 - y}{1 + y}}$,

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\left(1 + \dfrac{1 - y}{1 + y}\right)^2}{8\sqrt[4]{\left(\dfrac{1 - y}{1 + y}\right)^3}} = -\frac{4}{8(1 + y)^2\sqrt[4]{\left(\dfrac{1 - y}{1 + y}\right)^3}} = -\frac{1}{2\sqrt[4]{(1 - y)^3(1 + y)^5}}.$$

Приклад 2.2.26. Знаючи, що функції $\arcsin\sqrt{x}$ і $\sin^2 x$ – взаємно обернені і $(\sin^2 x)' = \sin 2x$, обчислити $(\arcsin\sqrt{x})'$.

Розв'язання. Функції $y = \arcsin\sqrt{x}$ і $x = \sin^2 y$ – взаємно обернені.

Далі маємо $x'_y = (\sin^2 y)'_y = 2\sin y \cos y = \sin 2y$,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\sin 2y}.$$

Повернемося до змінної x:

$$y'_x = \frac{1}{\sin 2y} = \frac{1}{2\sin y \cos y} = \left| \begin{array}{c} x = \sin^2 y \Rightarrow \\ \Rightarrow \sin y = \sqrt{x},\ \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1 - x}} = \frac{1}{2\sqrt{x - x^2}}.$$

Таким чином, $(\arcsin\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x - x^2}}$.

Приклад 2.2.27. Позначимо функцію, обернену до функції $y = x^x$, символом $\alpha(x)$, тобто будемо вважати, що із $y = x^x$ випливає $x = \alpha(y)$. Знайти формулу для похідної функції $y = \alpha(x)$.

Розв'язання. Функції $y = \alpha(x)$ і $x = y^y$ – взаємно обернені, тому

$$\alpha'(x) = \frac{1}{\left(y^y\right)'} = \frac{1}{\left(e^{y\ln y}\right)'} = \frac{1}{e^{y\ln y}\left(\ln y + y\frac{1}{y}\right)} = \frac{1}{y^y\left(\ln y + 1\right)} = \frac{1}{x\left(\ln \alpha(x) + 1\right)} .$$

Знайти похідні y' диференційовних функцій $y = y(x)$, заданих неявно рівняннями (2.2.28 – 2.2.31).

Приклад 2.2.28. $x^3 + y^3 3axy = 0$.

Розв'язання. Беремо похідні обох частин заданого рівняння, маючи на увазі, що y – функція аргументу x, тому його похідна дорівнює y':

$$3x^2 + 3y^2 y' - 3a(y + xy') = 0, \; y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}.$$

Приклад 2.2.29. $y - x = \varepsilon \sin y$, $\quad |\varepsilon| < 1$.

Розв'язання.

$$y' - 1 = \varepsilon \cos y \cdot y', \quad y' = \frac{1}{1 - \varepsilon \cos y}.$$

Приклад 2.2.30. $x \sin y - \cos y + \cos 2y = 0$.

Розв'язання.

$$\sin y + x \cos y \cdot y' + \sin y \cdot y' - 2 \sin 2y \cdot y' = 0,$$

$$y' = \frac{\sin y}{2 \sin 2y - x \cos y - \sin y} .$$

Приклад 2.2.31. $x^y = y^x$, $\; x \neq y$.

Розв'язання. Злогарифмуємо обидві частини рівняння: $y \ln x = x \ln y$.

Далі маємо

$$y' \ln x + \frac{y}{x} = \ln y + \frac{x}{y} y', \; xy \ln x \cdot y' + y^2 = xy \ln y + x^2 y', \; y' = \frac{y^2 - xy \ln y}{x^2 - xy \ln x} .$$

Знайти похідні $y'(x_0)$ диференційовних функцій $y = y(x)$, заданих неявно (2.2.32 – 2.2.34).

Приклад 2.2.32. $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 2 = 0$; $\quad y > -5$, $\quad x_0 = 0$.

Розв'язання. Поклавши $x = 0$, маємо $y^2 + 10y - 2 = 0$, звідки $y = -5 \pm \sqrt{27}$.

Оскільки $y > -5$, то $y_0 = -5 + \sqrt{27}$.

Далі маємо $2x + 2yy' - 6 + 10y' = 0$, звідки $y' = \dfrac{3 - x}{5 + y}$.

При $x_0 = 0$ і $y_0 = -5 + \sqrt{27}$ одержимо

$$y'(x_0) = y'(0) = \frac{3}{\sqrt{27}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Приклад 2.2.33. $xy + \ln y = 1; \quad y < e^2, \; x_0 = 0.$

Розв'язання. При $x = x_0 = 0$ $\ln y = 1 \Rightarrow y_0 = e$. Взявши похідні обох частин даного рівняння, одержимо

$$y + xy' + \frac{y'}{y} = 0, \;\; y^2 + xyy' + y' = 0, \;\; y' = -\frac{y^2}{1+xy}; \;\; y'(x_0) = -e^2.$$

Приклад 2.2.34. $\operatorname{arctg}(x+y) = x, \; x_0 = \frac{\pi}{4}.$

Розв'язання. При $x = x_0 = \frac{\pi}{4}$ $\operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{4} + y\right) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{4} + y = 1, \; y_0 = 1 - \frac{\pi}{4}.$

Далі маємо: $\frac{1}{1+(x+y)^2}(1+y') = 1, 1 + y' = 1 + (x+y)^2, \; y' = (x+y)^2, \; y'(x_0) = 1.$

Знайти похідні функцій, застосовуючи їх попереднє логарифмування (2.2.35 –2.2.38).

Приклад 2.2.35. $y = x^{x^2}$.

Розв'язання. Дана функція – степенево-показникова. Для її диференціювання не можна використовувати ні формулу для диференціювання показникової функції $y = a^x$ (a – стале число), ні формулу для диференціювання степеневої функції $y = x^\alpha$ (α – стале число).

Використаємо один із способів:

1) перетворимо дану функцію в показникову:

$$y = e^{x^2 \ln x}, \;\; y' = e^{x^2 \ln x}\left(2x \ln x + \frac{x^2}{x}\right) = x^{x^2}(2x \ln x + x);$$

2) логарифмуємо дану функцію: $\ln y = x^2 \ln x$, далі маємо:

$$\frac{y'}{y} = 2x \ln x + \frac{x^2}{x} = 2x \ln x + x, \;\; y' = y(2x \ln x + x) = x^{x^2}(2x \ln x + x).$$

Приклад 2.2.36. $y = (\sin x)^{x^2+1}$.

Розв'язання.

$$\ln y = (x^2+1) \ln \sin x,$$

$$\frac{y'}{y} = 2x \ln \sin x + (x^2+1)\frac{\cos x}{\sin x}, \;\; y' = (\sin x)^{x^2+1}\left(2x \ln \sin x + (x^2+1) \operatorname{ctg} x\right).$$

Приклад 2.2.37. $y = x^{x^x}$.

Розв'язання. Тут логарифмування застосовуємо двічі:

$$\ln y = x^x \ln x, \quad \ln\ln y = x \ln x + \ln\ln x, \;\; \frac{1}{\ln y}\frac{1}{y}y' = \ln x + x\frac{1}{x} + \frac{1}{\ln x}\frac{1}{x},$$

$$y' = x^{x^x} x^x \ \ln x\left(\ln x + 1 + \frac{1}{x \ln x}\right) = x^{x^x} x^{x-1}(x \ \ln^2 x + x \ \ln x + 1).$$

Приклад 2.2.38. $y = \dfrac{x^3 e^x \sqrt{x+1}}{(x+2)^5 \sqrt[3]{x-1}}$.

Розв'язання. Тут логарифмування значно спрощує розв'язання:

$$\ln y = 3 \ln x + x + \frac{1}{2} \ln (x+1) - 5 \ln (x+2) - \frac{1}{3} \ln (x-1),$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{x} + 1 + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{5}{x+2} - \frac{1}{3(x-1)},$$

$$y' = \frac{x^3 e^x \sqrt{x+1}}{(x+2)^5 \sqrt[3]{x-1}}\left(\frac{3}{x} + 1 + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{5}{x+2} - \frac{1}{3(x-1)}\right).$$

Знайти похідні y'_x функцій $y' = y(x)$, заданих параметрично (2.2.39, 2.2.40).

Приклад 2.2.39. $x = a \cos^3 t, \ \ y = b \sin^3 t, \ \ t \in \left(0; \ \dfrac{\pi}{2}\right).$

Розв'язання. Функції $x(t)$ і $y(t)$ диференційовні для всіх t і $x'_t = -3a \cos^2 t \sin t \neq 0$ при $t \in \left(0; \ \dfrac{\pi}{2}\right)$, тому

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3b \sin^2 t \cos t}{-3a \cos^2 t \sin t} = -\frac{b}{a} \operatorname{tg} t.$$

Звичайно користуються одним із позначень похідної.

Приклад 2.2.40. $x = \ \arcsin \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad y = \ \arccos \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$

Розв'язання.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} =$$

$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{1+t^2}}}\left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)^3}} 2t \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{t^2}{1+t^2}}} \frac{\sqrt{1+t^2} - t\dfrac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{1+t^2}\, t}{|t|\sqrt{(1+t^2)^3}}\right) : \left(\frac{\sqrt{1+t^2}\,(1+t^2-t^2)}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}\right) = \frac{(1+t^2)t}{|t|(1+t^2)} = \frac{t}{|t|}, \quad t \neq 0.$$

Таким чином, $y'_t = -1$, якщо $t < 0$, і $y'_t = 1$, якщо $t > 0$, тобто $y'_t = \operatorname{sign} t$.

Приклад 2.2.41. Обчислити похідну $f'(x_0)$ функції $y = f(x)$, заданої параметрично: $x = \dfrac{t^2}{1+t^2}, \quad y = \dfrac{t-t^2}{1+t^2}, \quad x_0 = \dfrac{1}{2}, \quad y_0 = -1.$

Розв'язання. Знайдемо, якому значенню t_0 відповідає точка $M_0(x_0; y_0)$. Якщо $x = x(t)$ і $y = y(t)$ – закон руху точки на площині, то t_0 – момент, коли матеріальна точка займе положення $M_0(x_0; y_0)$.

Знаходимо t_0:

$$\begin{cases} \dfrac{t^2}{1+t^2} = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{t-t^2}{1+t^2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t^2 = 1+t^2, \\ t-t^2 = -1-t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^2 = 1, \\ t = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \in \{-1;\ 1\}, \\ t \in \{-1\} \end{cases} \Rightarrow t_0 = -1.$$

Тоді

$$f'(x_0) = \left.\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right|_{t=t_0}, \quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = \left.\left(\frac{(1-2t)(1+t^2) - 2t(t-t^2)}{(1+t^2)^2} : \frac{2t(1+t^2) - 2tt^2}{(1+t^2)^2}\right)\right|_{t=-1} =$$

$$= \left.\left(\frac{1-2t+t^2-2t^3-2t^2+2t^3}{(1+t^2)^2} \frac{(1+t^2)^2}{2t+2t^3-2t^3}\right)\right|_{t=-1} = \left.\frac{1-2t-t^2}{2t}\right|_{t=-1} = -1.$$

Приклад 2.2.42. Переконатись, що функція $y = y(x)$, задана параметрично: $x = \ln t + \sin t$, $y = t(1 + \sin t) + \cos t$, задовольняє рівнянню $\ln y' + \sin y' = x$.

Розв'язання. Знаходимо

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1 + \sin t + t\cos t - \sin t}{\frac{1}{t} + \cos t} = \frac{t(1 + t\cos t)}{1 + t\cos t} = t.$$

Вирази для x і y' підставимо в рівняння: $\ln t + \sin t = \ln t + \sin t$.

Це тотожність. Отже, задана функція задовольняє даному в умові рівнянню.

Для функції $y = f(x)$, заданої полярним рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, де ρ і φ – полярні координати точки $(x; y)$, знайти похідну y'_x (2.2.43, 2.2.44).

Приклад 2.2.43. $\rho = a(1 + \cos\varphi),\ \ \varphi \in \left(0; \dfrac{2\pi}{3}\right).$

Розв'язання. Полярне задання функції – джерело для її параметризації.

Якщо $\rho = \rho(\varphi)$ – полярне рівняння функції $y = f(x)$, то $x = \rho(\varphi)\cos\varphi$, $y = \rho(\varphi)\sin\varphi$ – її параметричні рівняння.

Таким чином, $x = a(1+\cos\varphi)\cos\varphi,\ \ y = a(1+\cos\varphi)\sin\varphi$ – параметричне рівняння функції $y = f(x)$, тому

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_\varphi}{x'_\varphi} = \frac{a(\cos\varphi + \cos^2\varphi - \sin^2\varphi)}{a(-\sin\varphi - 2\sin\varphi\cos\varphi)} = -\frac{\cos\varphi + \cos 2\varphi}{\sin\varphi + \sin 2\varphi} =$$

$$= -\frac{2\cos\dfrac{3\varphi}{2}\cos\dfrac{\varphi}{2}}{2\sin\dfrac{3\varphi}{2}\cos\dfrac{\varphi}{2}} = -\operatorname{ctg}\frac{3\varphi}{2}.$$

Приклад 2.2.44. $\rho = e^{\varphi}, \varphi \in [0; \pi]$.

Розв'язання. Знайдемо параметричні рівняння (див. приклад 2.2.47) функції $y = f(x)$: $x = e^{\varphi}\cos\varphi, y = e^{\varphi}\sin\varphi, \varphi \in [0; \pi]$, тоді

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_\varphi}{x'_\varphi} = \frac{e^{\varphi}\sin\varphi + e^{\varphi}\cos\varphi}{e^{\varphi}\cos\varphi - e^{\varphi}\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi} = \frac{\sqrt{2}\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= \operatorname{tg}\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right), \qquad \varphi \neq \frac{\pi}{4}.$$

2.2.2. Задачі на геометричний та фізичний зміст похідної

1. Зміст похідної.

Геометричний зміст похідної. Нехай $y = f(x)$ – дана функція. Величина $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ – кутовий коефіцієнт січної, проведеної через точки $M(x; f(x))$ і $M_1(x+\Delta x; y+\Delta y)$ кривої $f(x)$ (рис. 2.2.6):

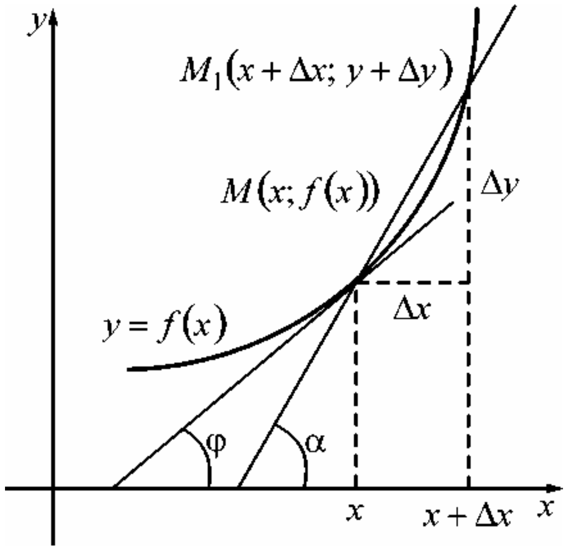


Рис. 2.2.6

$$k_{\text{січ}} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Похідна $f'(x)$ дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до кривої $f(x)$ в точці $M(x; f(x))$:

$$k_{\text{дот}} = \operatorname{tg}\varphi = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\operatorname{tg}\alpha.$$

Задача 2.2.1. Знайти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці $M(x_0; y_0)$ цієї кривої (рис. 2.2.7).

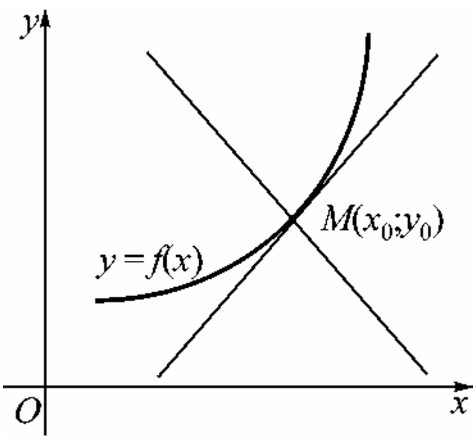


Рис. 2.2.7

Розв'язання. Оскільки дотична і нормаль – перпендикулярні прямі, то їх коефіцієнти зв'язані співвідношенням $1 + k_{\text{дот}}k_{\text{норм}} = 0$, звідки

$$k_{\text{норм}} = -\frac{1}{k_{\text{дот}}}.$$

Тепер маємо

$$k_{\text{дот}} = f'(x_0), \quad k_{\text{норм}} = -\frac{1}{f'(x)}.$$

Рівняння дотичної:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \qquad (2.2.9)$$

Рівняння нормалі:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \qquad (2.2.10)$$

Задача 2.2.2. Знайти рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$, якщо відомий кутовий коефіцієнт k_0 дотичної.

Розв'язання. З рівняння $f'(x) = k_0$ знайдемо абсцису x_0 точки дотику, потім одержимо відповідну ординату y_0 за формулою $y_0 = f(x_0)$.

Рівняння дотичної:

$$y - y_0 = k_0(x - x_0). \qquad (2.2.11)$$

Задача 2.2.3. Знайти рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$, якщо відомо, що дотична проходить через точку $M_1(x_1;\, y_1)$, яка не належить кривій (рис. 2.2.8).

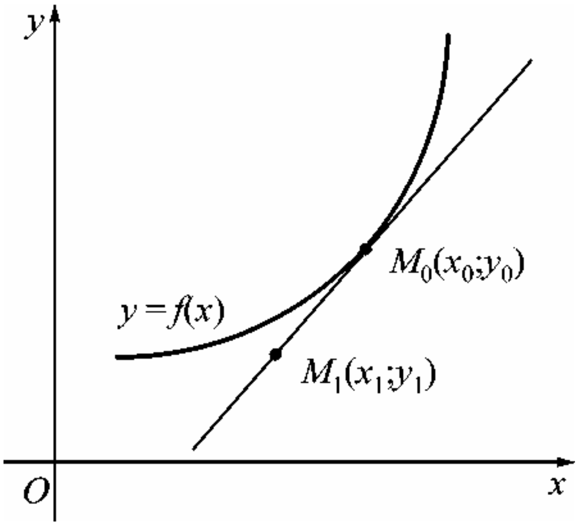


Рис. 2.2.8

Розв'язання. Нехай $M(x_0;\, y_0)$ – точка дотику.

Рівняння дотичної запишемо у вигляді $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Оскільки точка $M_1(x_1; y_1)$ лежить на дотичній, то її координати задовольняють рівнянню $y_1 - y_0 = f'(x_0)(x_1 - x_0)$.

Добавимо рівняння $y_0 = f(x_0)$ і з одержаної системи знайдемо x_0 і y_0, потім $f'(x_0)$, а отже, і шукане рівняння дотичної.

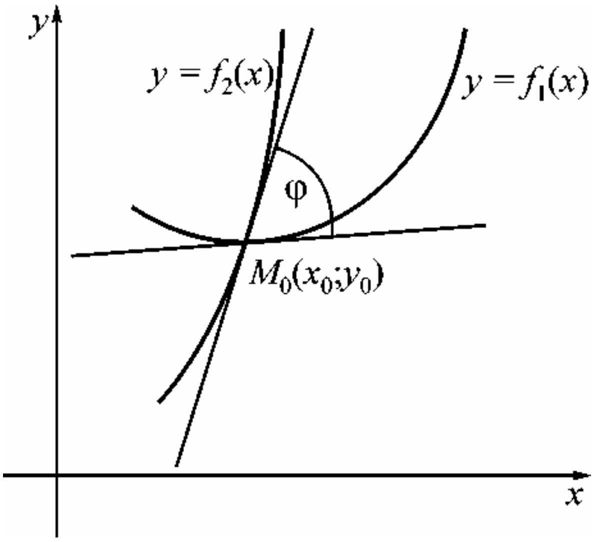


Рис. 2.2.9

Задача 2.2.4. Знайти кут між кривими $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ у точці їх перетину (рис. 2.2.9).

Розв'язання. Точку перетину знайдемо із системи $\begin{cases} y = f_1(x), \\ y = f_2(x). \end{cases}$

Знайдемо кутові коефіцієнти дотичних до кривих у точці їх перетину:

$$k_1 = f_1'(x_0),\ k_2 = f_2'(x_0).$$

Тоді кут між кривими одержимо з формули

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} =$$

$$= \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_2'(x_0) f_1'(x_0)}. \qquad (2.2.12)$$

Задача 2.2.5. Для кривої $y = f(x)$ і її точки $M(x;\, y)$ знайти піддотичну, піднормаль, дотичну, нормаль (рис. 2.2.10).

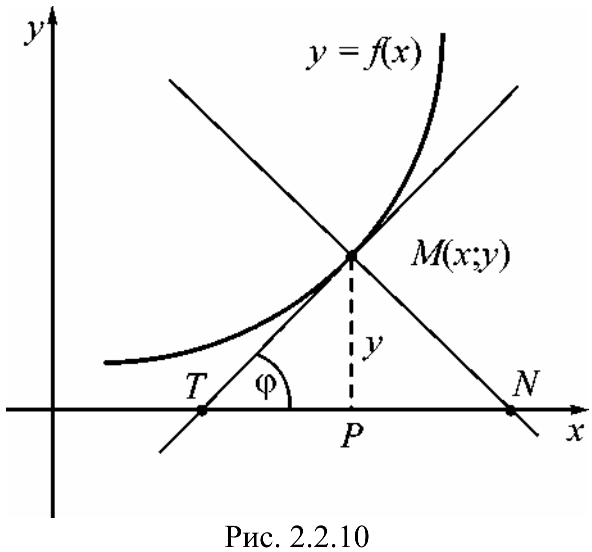


Рис. 2.2.10

Розв'язання. Для відрізків: PT – піддотичної, PN – піднормалі, MT – дотичної, MN – нормалі – одержимо такі значення:

$$PT = \left|\frac{y}{y'}\right|,\ PN = |yy'|,\ MT = \left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1+y'^2},\ MN = |y|\sqrt{1+y'^2}. \qquad (2.2.13)$$

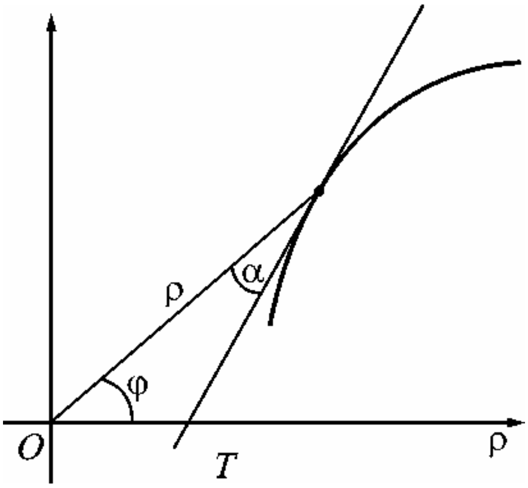


Рис. 2.2.11

Задача 2.2.6. Для кривої $\rho = \rho(\varphi)$, заданої в полярній системі координат, знайти кут між дотичною, проведеною до кривої в її точці $M(\varphi;\rho)$, і радіусом-вектором точки дотику (рис. 2.2.11).

Розв'язання. Якщо α – кут, утворений дотичною MT і радіусом-вектором OM точки дотику M, то

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\rho}{\rho'}. \qquad (2.2.14)$$

Кут α між кривими $\rho_1(\varphi)$ і $\rho_2(\varphi)$ знаходимо за формулою

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\rho_2\rho_1' - \rho_1\rho_2'}{\rho_2\rho_1 + \rho_2'\rho_1'}. \qquad (2.2.15)$$

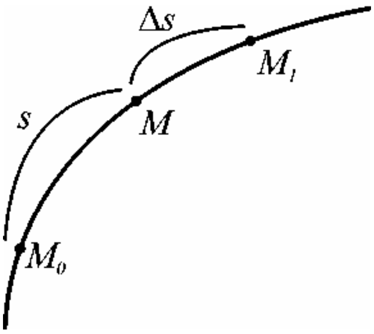


Рис. 2.2.12

Фізичний зміст похідної.

1. Нехай $s = s(t)$ – закон руху матеріальної точки; s – довжина шляху від деякої початкової точки M_0; t – час, за який пройдено шлях s (рис. 2.2.12).

Тоді $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ – середня швидкість руху на шляху від точки M до точки M_1.

Похідна $s'(t)$ – величина миттєвої швидкості руху в момент часу t (швидкість – похідна шляху за часом):

$$v = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \qquad (2.2.16)$$

2. Нехай $q = q(t)$ – кількість електрики, що протікає через поперечний переріз провідника за час t.

Тоді $\frac{\Delta q}{\Delta t}$ – середня сила струму за проміжок часу Δt.

Похідна $q'(t)$ – сила струму I в момент часу t:

$$I = q'(t) = \frac{dq}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}. \qquad (2.2.17)$$

3. Нехай даний неоднорідний тонкий стрижень має довжину l і нехай $m = m(x)$ – маса частини стрижня з довжиною x ($0 \le x \le b$), відміряною від одного фіксованого кінця (рис. 2.2.13).

Величина $\frac{\Delta m}{\Delta x}$ – середня лінійна щільність стрижня на відрізку від x до $x+\Delta x$.

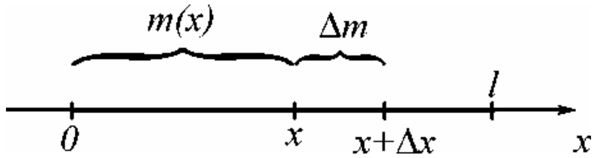


Рис. 2.2.13

Похідна $m'(x)$ – лінійна щільність ρ стрижня в точці x:

$$\rho = m'(x) = \frac{dm}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x}. \qquad (2.2.18)$$

Біологічний зміст похідної.

Нехай $p = p(t)$ – залежність між числом особин популяції мікроорганізмів p і часом t.

Тоді $\frac{\Delta p}{\Delta t}$ – середня швидкість розмноження (середня продуктивність життєдіяльності популяції) за час Δt.

Похідна $p'(t)$ – продуктивність життєдіяльності популяції мікроорганізмів у момент часу t.

Економічний зміст похідної.

Візьмемо виробничу функцію, яка визначає відповідність між величиною затрат x і величиною одержаного прибутку y: $y = f(x)$.

Позначимо через Δx зміну затрат від деякого значення x до величини $x+\Delta x$. Тоді $y+\Delta y = f(x+\Delta x)$ – нове значення маси продукту, що відповідає затратам у розмірі $x+\Delta x$, а $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ – додатковий продукт, одержаний в результаті зростання затрат на величину Δx.

Відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ – середня швидкість зміни величини продукту, або середня чутливість виробничої функції відповідно до величини затрат Δx.

Похідна $y'(x)$ – швидкість зміни маси продукту при даній величині затрат, або чутливість виробничої функції при даній величині затрат.

2. Задачі на геометричний зміст похідної.

Знайти рівняння дотичної і нормалі до графіка функції $y = f(x)$ у заданих точках (2.2.45 – 2.2.47).

Приклад 2.2.45. $y = \sqrt{4+3x-x^2}$, $x_0 = 3$.

Розв'язання. Знайдемо кутові коефіцієнти:

$$y_0 = \sqrt{4+3x-x^2}\Big|_{x=3} = 2,$$

$$k_{дот} = y'\Big|_{x=3} = \frac{3-2x}{2\sqrt{4+3x-x^2}}\Big|_{x=3} = -\frac{3}{4},$$

$$k_{норм} = -\frac{1}{k_{дот}} = \frac{4}{3}.$$

Рівняння дотичної: $y - 2 = -\frac{3}{4}(x-3) \Leftrightarrow 3x + 4y - 17 = 0$.

Рівняння нормалі: $y-2=\frac{4}{3}(x-3)\Leftrightarrow 4x-3y-6=0$.

Приклад 2.2.46. $y=x^2\sqrt[3]{x+2}$, $x_0=-2$.

Розв'язання. Знаходимо

$$y_0=y(-2)=0,$$

$$y'=2x\sqrt[3]{x+2}+\frac{1}{3}x^2\frac{1}{\sqrt[3]{(x+2)^2}}=\frac{6x(x+2)+x^2}{3\sqrt[3]{(x+2)^2}}=\frac{x(7x+12)}{3\sqrt[3]{(x+2)^2}},\quad \lim_{x\to-2}y'=+\infty.$$

У точці $x_0=-2$ дана функція неперервна і має нескінченну похідну, отже, в цій точці існують дотична до графіка функції, перпендикулярна до осі Ox, і нормаль, паралельна осі Ox.

Рівняння дотичної: $x=-2$; рівняння нормалі: $y=0$.

Приклад 2.2.47. $y=\max(x^2,x+2)$, $x_0=2$ (рис. 2.2.14).

Розв'язання. Знайдемо точку перетину ліній $y=x^2$ і $y=x+2$: $x^2=x+2$, $x^2-x-2=0$; $x_1=-1$, $x_2=2$; $y_1=1$, $y_2=4$; $M_1(-1;1)$, $M_2(2;4)$.

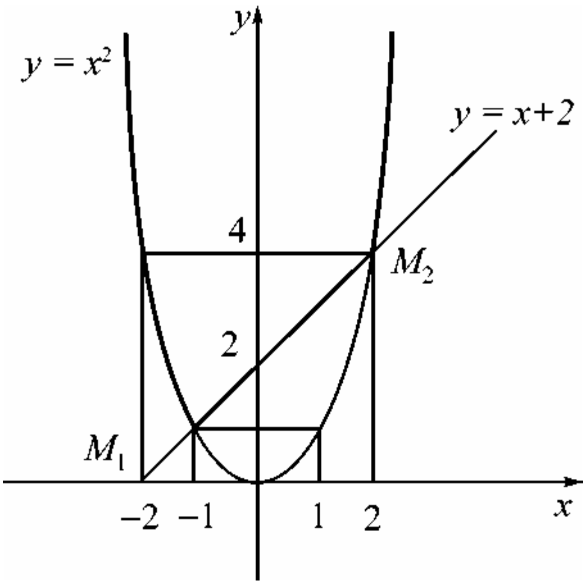


Рис. 2.2.14

Дану функцію можна записати як

$$y=\begin{cases}x+2, \text{якщо } x\in[-1,\,2],\\ x^2, \text{ якщо } x\notin[-1,\,2].\end{cases}$$

Тоді

$$y'(2-0)=(x+2)'\Big|_{x=2}=1,$$

$$y'(2+0)=(x^2)'\Big|_{x=2}=4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'(2-0)\neq y'(2+0).$$

Отже, ні дотичної, ні нормалі до кривої в указаній точці провести не можна.

Знайти рівняння дотичної і нормалі до графіка функції, заданої параметрично рівняннями $x=\varphi(t)$ і $y=\psi(t)$, у точці $t=t_0$ (2.2.48 –2.2.50).

Приклад 2.2.48. $x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y=\frac{2t}{1+t^2}$, $t_0=\frac{1}{2}$.

Розв'язання. Знайдемо точку M_0 графіка, яка відповідає $t=t_0=\frac{1}{2}$:

$$x_0=\frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}=\frac{3}{5},\ y_0=\frac{2\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}}=\frac{4}{5},\ M_0\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right).$$

Тоді

$$k_{\text{дот}} = y'_x\Big|_{t=\frac{1}{2}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\Big|_{t=\frac{1}{2}} = \left[2\frac{1+t^2-2t^2}{(1+t^2)^2} : \frac{-2t(1+t^2)-2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\right]\Bigg|_{t=\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1-t^2}{-2t}\Bigg|_{t=\frac{1}{2}} = -\frac{3}{4},\ k_{\text{норм}} = \frac{4}{3}.$$

Рівняння дотичної: $y - \frac{4}{5} = -\frac{3}{4}\left(x - \frac{3}{5}\right) \Leftrightarrow 3x + 4y - 5 = 0$.

Рівняння нормалі: $y - \frac{4}{5} = \frac{4}{3}\left(x - \frac{3}{5}\right) \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x$.

Приклад 2.2.49. $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $t_0 = \frac{3\pi}{4}$.

Розв'язання. Знайдемо точку M_0 графіка, яка відповідає $t_0 = \frac{3\pi}{4}$:

$$x_0 = x\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4},\ y_0 = y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4},\ M_0\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

Тоді

$$k_{\text{дот}} = y'_x\Big|_{t=t_0} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\Big|_{t=t_0} = \frac{3\sin^2 t\cos t}{-3\cos^2 t\sin t}\Bigg|_{t=t_0} = -\operatorname{tg} t\Big|_{t=t_0} = 1,\ k_{\text{норм}} = -1.$$

Рівняння дотичної: $y - \frac{\sqrt{2}}{4} = x + \frac{\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow 2x - 2y + \sqrt{2} = 0$.

Рівняння нормалі: $y - \frac{\sqrt{2}}{4} = -\left(x + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \Leftrightarrow y = -x$.

Приклад 2.2.50. $x = te^t$, $y = te^{-t}$, $t_0 = 1$.

Розв'язання. Знайдемо точку M_0 графіка, яка відповідає $t_0 = 1$:

$$x_0 = x(1) = e,\ y_0 = y(1) = e^{-1},\ M_0(e, e^{-1}).$$

Оскільки $k_{\text{дот}} = y'_x\Big|_{t=1} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\Big|_{t=1} = \frac{e^{-t} - te^{-t}}{e^t + te^t}\Bigg|_{t=1} = 0$, то дотична паралельна осі Ox, а нормаль перпендикулярна до осі Ox, і їх рівняння, відповідно, запишемо як $y = \frac{1}{e}$, $x = e$.

Приклад 2.2.51. Знайти рівняння дотичної і нормалі до графіка функції $\rho = \frac{2}{1 - \cos\varphi}$ при $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Розв'язання. Запишемо параметричні рівняння кривої в декартовій системі координат:

$$x = \rho(\varphi)\cos\varphi = \frac{2}{1 - \cos\varphi}\cos\varphi,\ y = \rho(\varphi)\sin\varphi = \frac{2\sin\varphi}{1 - \cos\varphi}.$$

Знайдемо точку M_0, яка відповідає параметру $\varphi = \frac{\pi}{3}$, та коефіцієнти дотичної і нормалі:

$$x_0 = x\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{1-\frac{1}{2}}\frac{1}{2} = 2,\ y_0 = y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{1-\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3},\ M_0(2;\ \ 2\sqrt{3});$$

$$k_{\text{дот}} = y'_x\Big|_{t=\frac{\pi}{3}} = \frac{y'_\varphi}{x'_\varphi}\Big|_{t=\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \left[\left(2\frac{\cos\varphi(1-\cos\varphi) - \sin\varphi\sin\varphi}{(1-\cos\varphi)^2}\right) : \left(2\frac{-\sin\varphi(1-\cos\varphi) - \cos\varphi\sin\varphi}{(1-\cos\varphi)^2}\right)\right]\Bigg|_{t=\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \frac{\cos\varphi - 1}{-\sin\varphi}\Bigg|_{t=\frac{\varphi}{3}} = \frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};\ k_{норм} = -\sqrt{3}.$$

Рівняння дотичної: $y - 2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}(x-2) \Leftrightarrow x - \sqrt{3}y + 4 = 0$.

Рівняння нормалі: $y - 2\sqrt{3} = -\sqrt{3}(x-2) \Leftrightarrow y + \sqrt{3}x - 4\sqrt{3} = 0$.

Знайти рівняння дотичної і нормалі до графіка функції, заданої неявно, в точці $M_0(x_0; y_0)$ *(2.2.52, 2.2.53).*

Приклад 2.2.52. $x^3 + y^3 - 6xy = 0$, $M_0(3;\ 3)$.

Розв′язання.

$$3x^2 + 3y^2y' - 6y - 6xy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x};$$

$$k_{\text{дот}} = y'\Big|_{M_0} = -1,\ k_{\text{норм}} = 1.$$

Рівняння дотичної: $y - 3 = -(x-3) \Leftrightarrow x + y - 6 = 0$.

Рівняння нормалі: $y - 3 = x - 3 \Leftrightarrow y = x$.

Приклад 2.2.53. $x^2 + y^2 = R^2$, $M_0(0;\ R)$.

Розв′язання. Послідовно знаходимо $2x + 2yy' = 0$, $y' = -\frac{x}{y}$, $k_{\text{дот}} = y'\Big|_{M_0} = 0$.

Отже, дотична паралельна осі Ox, а нормаль перпендикулярна до осі Ox, тому рівняння дотичної і нормалі, відповідно, запишемо як $y = R$, $x = 0$.

Приклад 2.2.54. Знайти рівняння дотичної до гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точці $M_0(x_0;\ y_0)$.

Розв'язання. Знайшовши $\frac{2x}{a^2}-\frac{2yy'}{b^2}=0$, $y'=\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$, $k_{\text{дот}}=y'\Big|_{M_0}=\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}$, запишемо рівняння дотичної:

$$y-y_0=\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)\Leftrightarrow b^2x_0x-a_0y_0y=b^2x_0^2-a^2y_0^2,$$

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}.$$

Оскільки точка M_0 лежить на гіперболі, то $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$, тому остаточно маємо $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$.

На графіку функції $y=f(x)$ знайти точку, в якій нормаль до кривої паралельна заданій прямій (2.2.55 – 2.2.58).

Приклад 2.2.55. $f(x)=\ln(4x-1)$, $3x+12y-1=0$.

Розв'язання. Оскільки за умовою нормаль до кривої паралельна прямій, то дотична буде перпендикулярною до прямої, отже, $k_{\text{дот}}=-\frac{1}{k_{\text{пр}}}$. Якщо рівняння прямої задано у вигляді $ax+by+c=0$, то її кутовий коефіцієнт $k_{\text{пр}}=-\frac{a}{b}$.

Для даної прямої $k_{\text{пр}}=-\frac{1}{4}$, звідки $k_{\text{дот}}=4$. З рівняння $y'=k_{\text{дот}}$ знайдемо абсцису x_0 точки, а потім і ординату y_0:

$$y'=\frac{4}{4x-1},\ \frac{4}{4x-1}=4,\ x_0=\frac{1}{2},\ y_0=y(x_0)=0.$$

Отже, $M_0\left(\frac{1}{2};\,0\right)$ – шукана точка.

Приклад 2.2.56. $x=4t^2$, $y=3t^2+t$; $4x-3y-1=0$.

Розв'язання. Аналогічне розв'язанню прикладу 2.2.55:

$$k_{\text{пр}}=\frac{4}{3},\ k_{\text{дот}}=-\frac{3}{4},\ y'_x=\frac{\dot y}{\dot x}=\frac{6t+1}{8t},\ \frac{6t+1}{8t}=-\frac{3}{4},$$

$$t_0=-\frac{1}{12},\ x_0=x(t_0)=\frac{1}{36},\ y_0=y(t_0)=-\frac{1}{16},\ M_0\left(\frac{1}{36};-\frac{1}{16}\right).$$

Приклад 2.2.57. $x^2+y^2-2x=0$, $3x-4y-1=0$.

Розв'язання. Послідовно знаходимо (див. приклад 2.2.55):

$$k_{\text{пр}}=\frac{3}{4},\ k_{\text{дот}}=-\frac{4}{3},\ 2x+2yy'-2=0,\ y'=\frac{1-x}{y},\ \begin{cases}\frac{1-x}{y}=-\frac{4}{3},\\ x^2+y^2-2x=0\end{cases}\Rightarrow x_1=\frac{1}{5},$$

$$y_1 = -\frac{3}{5};\ x_2 = \frac{9}{5},\ y_2 = \frac{3}{5};\ M_1\left(\frac{1}{5}; -\frac{3}{5}\right),\ M_2\left(\frac{9}{5}; \frac{3}{5}\right).$$

Приклад 2.2.58. $\rho = 2$, $2x - 2y + 3 = 0$.

Розв'язання. Параметризуємо дану криву:

$$x = \rho\cos\varphi = 2\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi = 2\sin\varphi.$$

Далі маємо (див. приклад 2.2.55):

$$k_{\text{пр}} = 1,\ k_{\text{дот}} = -1,\ y'_x = \frac{y'_\varphi}{x'_\varphi} = \frac{2\cos\varphi}{-2\sin\varphi} = -\operatorname{ctg}\varphi,\ -\operatorname{ctg}\varphi = -1,\ \ \operatorname{ctg}\varphi = 1,$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{4},\ \varphi_2 = \frac{5\pi}{4};\ x_1 = x(\varphi_1) = \sqrt{2},\ y_1 = y(\varphi_1) = \sqrt{2},\ M_1(\sqrt{2}; \sqrt{2});$$

$$x_2 = x(\varphi_2) = -\sqrt{2},\ y_2 = y(\varphi_2) = -\sqrt{2},\ M_2(-\sqrt{2}; -\sqrt{2}).$$

Знайти рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$, якщо дотична перпендикулярна до заданої прямої (2.2.59 – 2.2.61).

Приклад 2.2.59. $y = \operatorname{tg} x$, $x + y - 1 = 0$.

Розв'язання. Перш за все знайдемо на кривій точку дотику (див. приклад 2.2.55):

$$k_{\text{пр}} = -1,\ k_{\text{дот}} = \frac{1}{2},\ y' = \frac{1}{\cos^2 x},\ \frac{1}{\cos^2 x} = 1,\ \ \cos^2 x = 1,\ x_k = \pi k,\ k \in Z;$$

$$y_k = y(x_k) = 0.$$

Отже, $M_k(\pi k; 0)$, $k \in Z$ – точки дотику.

Рівняння дотичних: $y = x - \pi k$, $k \in Z$.

Приклад 2.2.60. $x = t^2 - 1,\ y = t^2 + t + 1,\ 2x + y - 1 = 0$.

Розв'язання. Знаходимо точку дотику (див. приклад 2.2.55):

$$k_{\text{пр}} = -2,\ k_{\text{дот}} = \frac{1}{2},\ y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t+1}{2t-1},\ \frac{2t+1}{2t-1} = \frac{1}{2},$$

$$t_0 = -\frac{3}{2},\ x_0 = x(t_0) = \frac{19}{4},\ y_0 = \frac{7}{4},\ M_0\left(\frac{19}{4}; \frac{7}{5}\right).$$

Рівняння дотичної: $y - \frac{7}{4} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{19}{4}\right) \Leftrightarrow 4x - 8y - 5 = 0$.

Приклад 2.2.61. $x^3 + y^3 - 3xy = 0,\ x - 2 = 0$.

Розв'язання. Дана пряма – перпендикулярна до осі Ox, тому шукана дотична – паралельна осі Ox, а кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює нулю:

$$k_{\text{дот}} = 0,\ 3x^2 + 3y^2 y' - 3y - 3xy' = 0,\ y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x};\ \begin{cases} \dfrac{y - x^2}{y^2 - x} = 0, \\ x^3 + y^3 - 3xy = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0 = \sqrt[3]{2},\ y_0 = \sqrt[3]{4},\ M_0(\sqrt[3]{2}; \sqrt[3]{4}).$$

Рівняння дотичної: $y = \sqrt[3]{4}$.

Знайти рівняння дотичної до графіка даної функції, якщо ця дотична проходить через точку $M_1(x_1; y_1)$, що не належить даній функції (2.2.62, 2.2.63).

Приклад 2.2.62. $y=\dfrac{1}{x}$, $M_1(1;-3)$.

Розв'язання. Точку дотику $M_0(x_0;\ y_0)$ знаходимо із системи

$$\begin{cases} y_1 - y = f'(x)(x_1 - x), \\ y = f(x) \end{cases}$$

(див. задачу 2.2.3): $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$, $x_1=1$, $y_1=-3$.

Запишемо систему для даного прикладу:

$$\begin{cases} -3 - y = -\dfrac{1}{x^2}(1-x), \\ y=\dfrac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x^2}(1-x), \\ y=\dfrac{1}{x}, \end{cases}$$

$$3x^2+2x-1=0,\ x_0'=-1,\ y_0'=-1;\ x_0''=\frac{1}{3},\ y_0''=3.$$

Існує дві точки дотику: $M_0'(-1;-1)$, $M_0''\left(\dfrac{1}{3};\ 3\right)$.

Кутові коефіцієнти дотичних: $k_1=-1$, $k_2=-9$.

Рівняння дотичних:

$$y+1=-(x+1) \Leftrightarrow x+y+2=0 \text{ і } y-3=-9\left(x-\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow 9x+y-6=0.$$

Приклад 2.2.63. $x=\cos t$, $y=\sin t$; $M_1(\sqrt{2};0)$.

Розв'язання. Адаптуємо результати задачі 2.2.3 для параметричного задання функції $y=f(x)$.

Одразу знайдемо значення параметра t_0, яке відповідає точці дотику, із рівняння $y_1-y(t)=y_x'(x_1-x(t))$, а потім саму точку дотику: $x_0=x(t_0)$, $y_0=y(t_0)$; $y(t)=\sin t$, $y_x'=\dfrac{y_t'}{x_t'}=\dfrac{\cos t}{-\sin t}=-\operatorname{ctg} t$, $y_1=0$, $x_1=\sqrt{2}$.

Рівняння для знаходження t_0: $-\sin t=-\operatorname{ctg} t(\sqrt{2}-\cos t) \Rightarrow \sin^2 t=$

$$=\cos t(\sqrt{2}-\cos t),\ \ \cos t=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Достатньо знайти розв'язок на проміжку $[-\pi;\pi]$, оскільки функції $x(t)$ і $y(t)$ – періодичні з періодом $T=2\pi$: $t_0'=\dfrac{\pi}{4}$, $t_0''=-\dfrac{\pi}{4}$.

Точки дотику: $x_0'=x(t_0')=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $y_0'=y(t_0')=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $M_0'\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $x_0''=$ $=x(t_0'')=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $y_0''=y(t_0'')=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $M_0''\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Кутові коефіцієнти дотичних: $k_1 = y'_x\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = -1$, $k_2 = y'_x\Big|_{t=-\frac{\pi}{4}} = 1$.

Рівняння дотичних:

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Leftrightarrow x + y - \sqrt{2} = 0,\ y + \frac{\sqrt{2}}{2} = x - \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x - y - \sqrt{2} = 0.$$

Визначити, в яких точках і під яким кутом перетинаються графіки функцій (2.2.64 – 2.2.66).

Приклад 2.2.64. $y = x^3$ і $y = \dfrac{1}{x^2}$.

Розв'язання. Знаходимо (див. задачу 2.2.4):

– точку перетину: $\begin{cases} y = x^3, \\ y = \dfrac{1}{x^2} \end{cases} \Rightarrow x_1 = 1,\ y_1 = 1;\ M_1(1;\,1)$;

– кутові коефіцієнти ліній в точці перетину:

$$k_1 = (x^3)'\Big|_{x=1} = (3x^2)\Big|_{x=1} = 3,\ k_2 = \left(\frac{1}{x^2}\right)'\Bigg|_{x=1} = \left(-\frac{2}{x^3}\right)\Bigg|_{x=1} = -2;$$

– кут між кривими в точці перетину:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} = \frac{-2-3}{1+(-2)3} = 1,\ \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Приклад 2.2.65. $x^2 + y^2 = 5$ і $y^2 = 4x$.

Розв'язання. Знаходимо (див. задачу 2.2.4 і приклад 2.2.64):

а) точку перетину: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ y^2 = 4x \end{cases} \Rightarrow x^2 + 4x - 5 = 0,\quad x_1 = -5,\quad x_2 = 1$

(оскільки має бути $4x \geq 0$, то $x_1 = -5$ – корінь зайвий); $\begin{cases} x = 1, \\ y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow M_1(1;\,-2)$, $M_2(1;\,2)$;

б) кутові коефіцієнти:

– для лінії, заданої рівнянням $x^2 + y^2 = 5$: $2x + 2yy' = 0$, $y' = -\dfrac{x}{y}$,

$$k_1' = y'\Big|_{M_1} = \frac{1}{2},\ k_1'' = y'\Big|_{M_2} = -\frac{1}{2};$$

– для лінії, заданої рівнянням $y^2 = 4x$: $2yy' = 4$, $y' = \dfrac{2}{y}$, $k_2' =$

$$= y'\Big|_{M_1} = 1,\ k_2'' = y'\Big|_{M_2} = 1;$$

в) кути між лініями:

– у точці M_1: $\operatorname{tg}\varphi_1 = \dfrac{k_1' - k_2'}{1 + k_1' k_2'} = \dfrac{\frac{1}{2} + 1}{1 + \frac{1}{2}(-1)} = 3$, $\varphi_1 = \operatorname{arctg} 3$;

– у точці M_2: $\operatorname{tg}\varphi_2 = \dfrac{k_2'' - k_1''}{1 + k_2'' k_1''} = \dfrac{1 + \frac{1}{2}}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)1} = 3$, $\varphi_2 = \operatorname{arctg} 3$.

Приклад 2.2.66. $x = t - t^2$, $y = 3t - t^3$ і $y = x$.

Розв'язання. Знаходимо (див. задачу 2.2.4 і приклад 2.2.64):

а) точку перетину: $\begin{cases} x = t - t^2, \\ y = 3t - t^3, \Rightarrow t - t^2 = 3t - t^3, \quad t^3 - t^2 - 2t = 0, \\ y = x \end{cases}$

$t_1 = 0$, $t_2 = -1$, $t_3 = 2$; для $t_1 = 0$ одержимо точку $M_1(0; 0)$, для $t_2 = -1$ – $M_2(-2; -2)$, для $t_3 = 2$ – $M_3(-2; -2)$, отже, точки M_2 і M_3 – це та ж сама точка, але будемо вважати їх різними, оскільки вони відповідають різним t (крива перетинає сама себе);

б) кутові коефіцієнти:

– для лінії, заданої рівняннями $x = t - t^2$ і $y = 3t - t^3$:

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{3 - 3t^2}{1 - 2t}, \ k_1' = y_x'\Big|_{t=0} = 3, \ k_1'' = y_x'\Big|_{t=-1} = 0, \ k_1''' = y_x'\Big|_{t=2} = 3;$$

– для прямої $y = x$: $k_2' = k_2'' = k_2''' = 1$;

в) кути між лініями:

– у точці M_1: $\operatorname{tg}\varphi_1 = \dfrac{k_1' - k_2'}{1 + k_1' k_2'} = \dfrac{3 - 1}{1 + 3} = \dfrac{1}{2}$, $\varphi_1 =$ acrtg $\dfrac{1}{2}$;

– у точці M_2: $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{4}$;

– у точці M_3: $\varphi_3 = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{2}$.

Приклад 2.2.67. В якій точці дотична до параболи $y = x^2$ утворює з прямою $3x - y + 1 = 0$ кут 45°?

Розв'язання. Нехай $M_0(x_0, y_0)$ – шукана точка. Кутовий коефіцієнт дотичної до параболи в цій точці дорівнює $k_1 = (x^2)'\Big|_{x=x_0} = 2x_0$, а кутовий коефіцієнт прямої – $k_2 = 3$.

Одержимо рівняння $\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} = \operatorname{tg} 45^\circ$, тобто $\dfrac{3 - 2x_0}{1 + 3x_0} = 1 \Rightarrow \quad x_0 = \dfrac{1}{4}$,

$y_0 = \frac{1}{16}$. Отже, точка $M_0\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{16}\right)$ – шукана.

3. Задачі на фізичний зміст похідної.

Приклад 2.2.68. Сторона квадрата збільшується зі швидкістю v_0. Знайти швидкість зміни периметра і площі квадрата у момент часу, коли сторона дорівнює a.

Розв'язання. Позначимо: x, P, S – відповідно сторона, периметр і площа квадрата в поточний момент часу t; a – сторона квадрата у фіксованій точці t_1.

З умови випливає, що $x = v_0 t$, тоді $P = 4x = 4v_0 t$, $s = x^2 = v_0^2 t^2$.

Швидкості зміни: периметра – $\frac{dP}{dt} = 4v_0$; площі – $\frac{dS}{dt} = 2v_0^2 t$.

Знайдемо момент часу t_1, в який $x = a$: $v_0 t = a$, $t_1 = \frac{a}{v_0}$.

Швидкість зміни периметра – величина стала і не залежить від часу.

Швидкість зміни площі в момент часу t_1: $\left.\frac{dS}{dt}\right|_{t=t_1} = 2v_0^2 \frac{a}{v_0} = 2av_0$.

Приклад 2.2.69. Радіус кулі зростає рівномірно зі швидкістю 5 см/с. Знайти швидкість зміни об'єму кулі в момент часу, коли її радіус дорівнюватиме 50 см.

Розв'язання. Позначимо: r, V – відповідно радіус і об'єм кулі в поточний момент часу t; t_1 – момент часу, коли радіус кулі дорівнюватиме $r_1 = 50$ см; v_0 – швидкість зміни радіуса.

Для того щоб не загубити розмірність величин, будемо розв'язувати задачу в загальному вигляді, а в кінці укажемо розмірність.

З умови випливає, що $r = v_0 t$, тоді $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(v_0 t)^3 = \frac{4}{3}\pi v_0^3 t^3$.

Швидкість зміни об'єму, см^3/с: $\frac{dV}{dt} = 4\pi v_0^3 t^2$.

Знайдемо момент часу t_1: $v_0 t = r_1$, $t_1 = \frac{r_1}{v_0}$.

Швидкість зміни об'єму в момент часу t_1: $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=t_1} =$
$= 4\pi v_0^3 \left(\frac{r_1}{v_0}\right)^2 = 4\pi v_0 r_1^2$. Підставимо початкові дані: $t_1 = \frac{50}{5} = 10$, $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=10} =$
$= 4\pi \cdot 5 \cdot 50^2 = 5\pi \cdot 10^4$ см^3/с$= 5\pi \cdot 10^{-2}$ м^3/с$= 0{,}05\pi$ м^3/с.

Приклад 2.2.70. Тіло, кинуте вертикально вверх зі швидкістю $v_0 = 30$ м/с, знаходиться на висоті $h = 30t - 4{,}9t^2$. Визначити час його підіймання, момент знаходження в найвищій точці, час падіння та найбільшу висоту.

Розв'язання. Природно, що між характером руху тіла і його швидкістю руху v існує така відповідність:

– $v > 0$ – тіло рухається вверх;

– $v = 0$ – тіло зупинилося в найвищій точці (відповідну висоту позначимо h_1, а час – t_1);

– $v < 0$ – тіло падає вниз (момент падіння позначимо t_2).

Знайдемо швидкість руху тіла: $v = \dfrac{dh}{dt} = 30 - 9{,}8t$.

Знайдемо:

– момент знаходження в найвищій точці (він же – час підіймання) t_1:

$$30 - 9{,}8t = 0,\ t_1 = \frac{30}{9{,}8} \approx 3{,}06 \text{ с;}$$

– найбільшу висоту підіймання:

$$h\Big|_{t=t_1} = (30t - 4{,}9t^2)\Big|_{t=t_1} = 30 \cdot \frac{30}{9{,}8} - 4{,}9 \cdot \frac{30^2}{9{,}8} = \frac{30}{9{,}8} \cdot 15 \approx 45{,}9 \text{ м;}$$

– момент падіння: $\begin{cases} h = 0, \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30t - 4{,}9t^2 = 0, \\ t > 0 \end{cases} \Rightarrow t_2 = 6{,}12$ с;

– час падіння: $t_2 - t_1 = 3{,}06$ с.

Приклад 2.2.71. Куля, випущена зі швидкістю 250 м/с під кутом 30° до обрію, пройшла за час t, с, у горизонтальному напрямі відстань $x = 125\sqrt{3}t$, а у вертикальному – $y = 125t - 4{,}9t^2$ (опором повітря нехтуємо). Знайти швидкість кулі наприкінці п'ятої секунди.

Розв'язання. Знайдемо швидкість кулі по напрямах:

– горизонтальному:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 125\sqrt{3};$$

– вертикальному:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 125 - 9{,}8t.$$

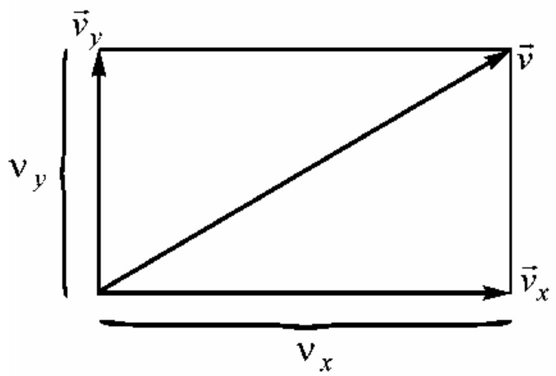


Рис. 2.2.15

Розглядаючи швидкості як векторні величини, знайдемо результуючу швидкість $\bar{v} = \bar{v}_x + \bar{v}_y$ (рис. 2.2.15), величина якої

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(125\sqrt{3})^2 + (125 - 9{,}8t)^2}.$$

Наприкінці п'ятої секунди швидкість кулі

$$v(5) = \sqrt{(125\sqrt{3})^2 + (125 - 9{,}8 \cdot 5)^2} \approx 229{,}45 \text{ м/с.}$$

Приклад 2.2.72. Резервуар, який має форму півкулі з внутрішнім радіусом R, м, наповнюється водою зі швидкістю Q, л/с. Знайти швидкість підвищення рівня води в резервуарі в момент, коли він дорівнюватиме $0{,}5R$.

Розв'язання. Позначимо через h рівень води в метрах і через V – її об'єм у метрах кубічних. Знайдемо залежність між змінними h і V, користуючись формулою об'єму кульового сегмента: $V = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)$.

Диференціюючи цю рівність за часом t, знайдемо залежність між швидкостями зміни величин h і V:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\cdot\frac{dh}{dt} = \pi\left[2h\left(R - \frac{h}{3}\right) - \frac{1}{3}h^2\right]\frac{dh}{dt} = \pi(2Rh - h^2)\frac{dh}{dt}.$$

Прийнявши відповідно до умови $\frac{dV}{dt} = 0{,}001Q$, одержимо

$$\frac{dh}{dt} = \frac{0{,}001Q}{\pi h(2R - h)}, \text{ а при } h = \frac{R}{2} \text{ маємо } \frac{dh}{dt} = \frac{0{,}004Q}{3\pi R^2}.$$

Приклад 2.2.73. Пліт підтягується до берега за допомогою каната, який намотується на коловорот зі швидкістю 3 м/хв. Знайти швидкість руху плоту в той момент, коли відстань від берега до плоту дорівнюватиме 25 м, якщо коловорот розміщений на березі вище поверхні води на 4 м.

Розв'язання. Позначимо через s довжину каната між коловоротом і плотом, через x – відстань від плоту до берега (рис. 2.2.16). За умовою $s^2 = x^2 + 4^2$.

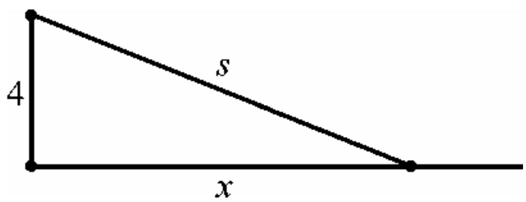


Рис. 2.2.16

Диференціюючи це співвідношення за часом t, знайдемо залежність між швидкостями: $2ss'_t = 2x'_t$, звідки $x'_t = \frac{s}{x}s'_t$.

Враховуючи, що $s'_t = 3$, $x = 25$, $s = \sqrt{25^2 + 4^2} \approx 25{,}3$, одержимо

$$x'_t = \frac{\sqrt{25^2 + 4^2}}{25}\cdot 3 \approx 3{,}03 \text{ м/хв.}$$

Приклад 2.2.74. Колесо повертається так, що кут повороту пропорційний квадрату часу. Перший поворот був здійснений за 8 с. Знайти кутову швидкість ω через 64 с після початку руху.

Розв'язання. З умови випливає, що кут повороту дорівнює $\varphi = at^2$, де a – коефіцієнт пропорційності. Прийнявши відповідно до умови $\varphi = 2\pi$ і $t = 8$, одержимо $2\pi = 64a$, звідки $a = \frac{\pi}{32}$.

Таким чином, кут повороту визначається формулою $\varphi = \frac{\pi}{32}t^2$.

Знаходимо кутову швидкість: $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\pi}{16}t$.

При $t = 64$ одержимо $\omega(64) = 4\pi$ рад/с.

Приклад 2.2.75. Маємо тонкий неоднорідний стрижень AB довжиною 20 см. Відомо, що в будь-якій точці стрижня, віддаленій від точки A на x см, маса частини стрижня, г, визначається формулою $m = 3x^2 + 5x$. Знайти лінійну щільність ρ стрижня в точках: C_1, віддаленій від A на 5 см; A і B.

Розв'язання. Щільність у будь-якій точці C, віддаленій від A на x, дорівнює $\rho = \frac{dm}{dx} = 6x + 5$.

Шукані щільності: у точці C_1 – $\rho(5) = 35$ г/см; у точці A – $\rho(0) = 5$ г/см; у точці B – $\rho(20) = 125$ г/см.

Приклад 2.2.76. Знайти силу струму наприкінці п'ятої секунди, якщо відомо, що кількість електрики, Кл, яка протікає через провідник, починаючи з моменту часу $t = 0$ визначається формулою $q = 2t^2 + 3t$.

Розв'язання. Сила струму в момент часу t – $I = \frac{dq}{dt} = 4t + 3$, а при $t = 5$ – $\mathrm{I}(5) = 23$ А.

Приклад 2.2.77. Кількість тепла, Дж, потрібного для нагріву 1 кг води від $0\,^{\circ}\mathrm{C}$ до $t\,^{\circ}\mathrm{C}$, визначається формулою $Q = t + 2 \cdot 10^{-5} t^2 + 3 \cdot 10^{-7} t^3$. Знайти теплоємність води при $100\,^{\circ}\mathrm{C}$.

Розв'язання. Теплоємність в момент часу t:

$$\frac{dQ}{dt} = 1 + 4 \cdot 10^{-5} t + 9 \cdot 10^{-7} t^2.$$

При $t = 100$ одержимо $\left.\frac{dQ}{dt}\right|_{t=100} = 1 + 4 \cdot 10^{-5} + 9 \cdot 10^{-7} = 1{,}013$ Дж/К.

Приклад 2.2.78. Маса радіоактивної речовини змінюється за законом $m = m_0 2^{(t-t_0)/T}$, де t – час, m_0 – маса в момент часу t_0, T – період піврозпаду. Довести, що швидкість розпаду радіоактивної речовини пропорційна кількості речовини. Знайти коефіцієнт пропорційності.

Розв'язання. Знаходимо швидкість розпаду радіоактивної речовини в момент часу t: $\frac{dm}{dt} = -\frac{m_0}{T} \ln 2 \cdot 2^{(t_0 - t)/T} = -\frac{\ln 2}{T} m_0 2^{(t_0 - t)/T}$.

Звідси $\frac{dm}{dt} = -\frac{\ln 2}{T} m$, тобто швидкість розпаду радіоактивної речовини дійсно пропорційна кількості речовини з коефіцієнтом $-\frac{\ln 2}{T}$.

2.2.3. Диференціал і його застосування в наближених обчисленнях

1. Означення диференціала і його геометричний зміст.

Означення 2.2.2. Нехай для неперервної функції $y = f(x)$ в точці x і її околі приріст функції Δy у фіксованій точці x може бути поданий у вигляді

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha \Delta x, \qquad (2.2.19)$$

де $A = A(x)$ – величина, що не залежить від Δx; $\alpha = \alpha(x, \Delta x)$ – нескінченно мала при $\Delta x \to 0$. Тоді функція $y = f(x)$ називається диференційовною в точці x, а величина $A\Delta x$ – диференціалом у точці x і позначається $dy(df)$.

Зауваження:

1. Диференціал функції $f(x)$ в точці x може бути записаний так: $dy = A\Delta x$.

Можна показати, що $A = f'(x)$, тоді одержимо $dy = f'(x)\Delta x$.

2. Приріст функції відрізняється від її диференціала на нескінченно малу величину вищого порядку малості відносно Δx: дійсно, $\frac{\alpha\Delta x}{\Delta x} \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Геометричний зміст диференціала.

Проведемо дотичну до кривої $y = f(x)$ в точці $M(x, f(x))$.

Будемо мати $AB = \Delta x \operatorname{tg}\varphi = f'(x)\Delta x$, але $f'(x)\Delta x = dy$, тобто $dy = AB$ (рис. 2.2.17).

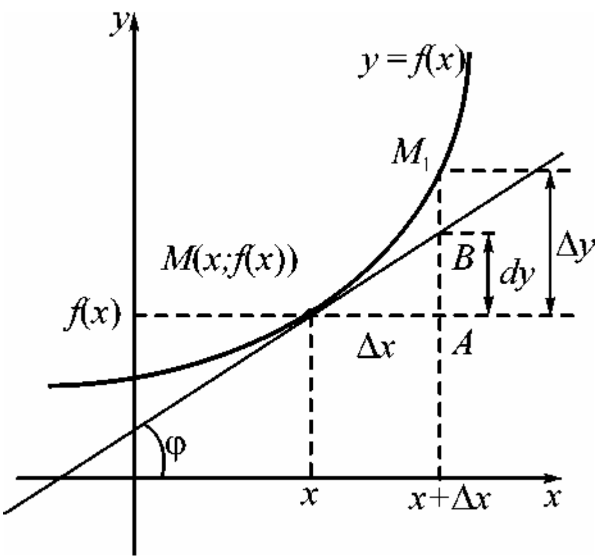


Рис. 2.2.17

Таким чином, диференціал дорівнює приросту ординати дотичної, якщо аргумент x одержує приріст Δx.

2. Знаходження диференціала та його властивості.

Оскільки похідна функції і її диференціал відрізняються тільки множником Δx, то як операцію знаходження похідної, так і операцію знаходження її диференціала називають однаково – диференціюванням функції.

Знайдемо диференціал незалежної змінної x.

Нехай $y = f(x) = x$, тоді $dy = dx = f'(x)\Delta x = (x)'\Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x,$ звідки $dx = \Delta x$, тобто диференціал незалежної змінної дорівнює її приросту.

Формулу $dy = f'(x)\Delta x$ можна переписати у вигляді

$$dy = f'(x)dx. \qquad (2.2.20)$$

З останньої формули видно, що $f'(x) = dy : dx = \frac{dy}{dx}$. Таким чином, символ $\frac{dy}{dx}$, застосований для позначення похідної, є відношенням диференціалів функції і незалежної змінної.

Формула $dy = f'(x)dx$ справедлива і для незалежної змінної x і тоді, коли $x = \varphi(t)$ – диференційовна функція іншої змінної t. У цьому полягає інваріантність форми диференціала.

Основні правила знаходження диференціалів (функції u і v диференційовні в точці x):

$$dc = 0;$$
$$d(cu) = cdu;$$
$$d(u \pm v) = du \pm dv;$$
$$d(uv) = vdu + udv;$$
$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2} \quad (v(x) \neq 0);$$
$$d(F(u)) = F'_u du.$$

Приклад 2.2.79. Знайти диференціал функції
$$y = \ln\frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}} + 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\sin x}.$$

Розв'язання. Позначимо $u = \sqrt{\sin x}$ і перепишемо функцію у вигляді $y = F(u) = \ln(1+u) - \ln(1-u) + 2\,\mathrm{acrtg}\,u$.

Тоді $dy = F'(u)du = \left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} + 2\frac{1}{1+u^2}\right) = \left(\frac{2}{1-u^2} + \frac{2}{1+u^2}\right)du =$

$$= \frac{4}{1-u^4}du = \left| du = u'dx = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}dx \right| = \frac{4}{1-\sin^2 x}\cdot\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}dx =$$
$$= \frac{2\cos x}{\cos^2 x\sqrt{\sin x}}dx = \frac{2}{\cos x\sqrt{\sin x}}dx.$$

Приклад 2.2.80. Знайти диференціал функції $y = \frac{1}{x} + \ln\frac{x-1}{x}$ в точці $x = -1$.

Розв'язання. В околі точки $x = -1$ функцію можна подати у вигляді
$$y = \frac{1}{x} + \ln\frac{1-x}{-x} = \frac{1}{x} + \ln(1-x) - \ln(-x).$$

Тоді $dy = y'dx = \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x}\right)dx$, $dy\Big|_{x=-1} = -\frac{1}{2}dx$.

Приклад 2.2.81. Знайти диференціал функції $y = y(x)$, заданої неявно рівнянням $x^4 + y^4 - 8x^2 - 10y^2 + 16 = 0$ в точці $(1;3)$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо похідну $y'(x)$:
$$4x^3 + 4y^3y' - 16x - 20yy' = 0,\quad y' = \frac{4x - x^3}{y^3 - 5y}.$$

Тоді $dy = y'dx$, $dy\Big|_{(1;\,3)} = \frac{1}{4}dx$.

Приклад 2.2.82. Знайти диференціал функції $y = y(x)$, заданої параметрично рівняннями $x = \frac{e^t}{t}$, $y = (t-1)^2e^t$, в точці $M\left(-\frac{2}{\sqrt{e}}; \frac{9}{4\sqrt{e}}\right)$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку похідну $y'(x)$:

$$y'(x)=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{2(t-1)e^t+(t-1)^2e^t}{\dfrac{te^t-e^t}{t^2}}=(t+1)t^2,$$

а потім значення параметра t, якому відповідає точка M:

$$\begin{cases}\dfrac{e^t}{t}=-\dfrac{2}{\sqrt{e}},\\ (t-1)^2e^t=\dfrac{9}{4\sqrt{e}}\end{cases}\Rightarrow t=-\frac{1}{2}.$$

При $t=-\frac{1}{2}$ одержимо $dy\Big|_M=\left(y'(x)dx\right)\Big|_{t=-\frac{1}{2}}=\left((1+t)t^2\right)\Big|_{t=-\frac{1}{2}}=\frac{1}{8}dx$.

Приклад 2.2.83. У точці $M(0;a)$ знайти диференціал функції, заданої в полярній системі координат рівнянням $\rho=a(1+\cos\varphi)$, $0<\varphi<\pi$.

Розв'язання. Параметризуємо дану функцію:

$$\begin{cases}x=\rho(\varphi)\cos\varphi=a(1+\cos\varphi)\cos\varphi,\\ y=\rho(\varphi)\cos\varphi=a(1+\cos\varphi)\sin\varphi.\end{cases}$$

Точку $M(0,a)$ одержимо при $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

Далі знаходимо: $dy\Big|_M=\left(\frac{y'_\varphi}{x'_\varphi}dx\right)\Bigg|_{t=\frac{\pi}{2}}=\frac{a(\cos\varphi+\cos2\varphi)}{a(-\sin\varphi-\sin2\varphi)}\Bigg|_{\varphi=\frac{\pi}{2}}dx=dx$.

Приклад 2.2.84. Знайти диференціал функції $y=\frac{uv}{u^2+v^2}$, якщо диференціали функцій u і v відомі.

Розв'язання.

$$dy=d\left(\frac{uv}{u^2+v^2}\right)=\frac{\left(u^2+v^2\right)d(uv)-uvd\left(u^2+v^2\right)}{\left(u^2+v^2\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(u^2+v^2\right)(vdu+udv)-uv(2udu+2vdv)}{\left(u^2+v^2\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(u^2v+v^3-2u^2v\right)du+\left(u^3+v^2u-2uv^2\right)dv}{\left(u^2+v^2\right)^2}=$$

$$=\frac{v\left(v^2-u^2\right)du+u\left(u^2-v^2\right)dv}{\left(u^2+v^2\right)^2}=\frac{v^2-u^2}{\left(u^2+v^2\right)^2}(vdu-udv).$$

Виразити диференціал складеної функції через незалежну змінну і її диференціал (2.2.85, 2.2.86).

Приклад 2.2.85. $y = e^{5x}$, $x = \sin^2 t$.

Розв'язання. Тут маємо складену функцію вигляду $y = y[x(t)]$, тому

$$dy = y'_t dt = y'_x x'_t dt = 5e^x \sin 2t\, dt = 5e^{\sin^2 t} \sin\, 2t\, dt.$$

Приклад 2.2.86. $y = \dfrac{1}{x}$, $x = \sqrt{1+t^2}$, $t = \operatorname{tg}\sqrt{s}$, $0 < s < 1$.

Розв'язання. Задана функція є складеною функцією вигляду $y = y\{x[t(s)]\}$.

Її диференціал дорівнює $dy = y'_x x'_t t'_s ds = -\dfrac{1}{x^2}\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\dfrac{1}{\cos^2\sqrt{s}}\dfrac{1}{2\sqrt{s}}ds =$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{1+t^2}\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\frac{1}{\cos^2\sqrt{s}}\frac{1}{\sqrt{s}}ds = -\frac{1}{2}\frac{t}{\sqrt{\left(1+t^2\right)^3}}\frac{1}{\cos^2 s}\frac{1}{\sqrt{s}}ds =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\operatorname{tg}\sqrt{s}\,\cos^3 s}{\sqrt{s}\,\cos^2 s}ds = -\frac{1}{2}\frac{\sin\sqrt{s}}{\sqrt{s}}ds.$$

3. Застосування диференціала в наближених обчисленнях.

Диференціал використовують в наближених обчисленнях, маючи на увазі, що:

1) диференціал – головна лінійна частина приросту функції відносно Δx;

2) диференціал відрізняється від приросту функції на нескінченно малу величину вищого порядку малості відносно Δx.

Із сказаного випливає:

1) диференціал відносно легко знайти;

2) при малих значеннях Δx приріст функції буде відрізнятись від диференціала на незначну величину.

Звичайно, необхідно вміти оцінювати похибку при заміні приросту функції її диференціалом, але зараз цю задачу не розглядатимемо.

Схема застосування диференціала.

Припустимо, що відомо значення функції $f(x)$ в точці x. Треба знайти значення цієї функції в точці $x + \Delta x$, якщо Δx – мале.

Точне значення дорівнює $f\left(x+\Delta x\right) = f\left(x\right) + \Delta y\Big|_{x,\,\Delta x}$.

Через технічну складність знаходження Δy виникає потреба в заміні його на dy.

Запишемо наближену формулу

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)\Delta x. \qquad (2.2.21)$$

Замінивши в формулі (2.2.21) x на x_0, а $x+\Delta x$ на x, одержимо формулу

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \qquad (2.2.22)$$

Приклад 2.2.87. Знайти приріст і диференціал функції $y = 3x^3 + x + 1$ в точці $x=1$ при $\Delta x=0{,}1$.

Знайти абсолютну і відносну похибки, які допускаються при заміні функції її диференціалом.

Розв'язання. Знаходимо

$$\Delta y=\left[3(x+\Delta x)^3+(x+\Delta x)-1\right]-\left(3x^3+x-1\right)=9x^2\Delta x+9x(\Delta x)^2+3\Delta x^3+\Delta x;$$

$$dy=\left(9x^2+1\right)dx.$$

Звідси при $x=1$ і $\Delta x=0{,}1$ одержимо $\Delta y=1{,}093$, $dy=1$, $\Delta y-dy=0{,}093$.

Абсолютна похибка – $\left|\Delta y-dy\right|=0{,}093$, відносна похибка – $\left|\dfrac{\Delta y-dy}{\Delta y}\right|=\dfrac{0{,}093}{1{,}093}\approx 0{,}085$, або $8{,}5\%$.

Приклад 2.2.88. Знайти наближене значення функції $y=\sqrt[5]{\dfrac{2-x}{2+x}}$ при $x=0{,}15$.

Розв'язання. Легко знайти значення функції при $x_0=0$, а оскільки точка $x=0{,}15$ відносно близька до точки x_0, то приріст $\Delta x=x-x_0=0{,}15$.

За формулою (2.2.22) одержимо

$$y(0{,}15)=y(0)+f'(0)\Delta x=1+\left[\frac{1}{5}\sqrt[5]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^4}\,\frac{(-4)}{(2+x)^2}\Delta x\right]\Bigg|_{\substack{x=0,\\ \Delta x=0{,}15}}=$$

$$=1-\frac{1}{5}0{,}15=1-0{,}03=0{,}97.$$

Замінюючи приріст функції диференціалом, знайти наближено такі значення (2.2.89, 2.2.90).

Приклад 2.2.89. $\operatorname{arctg}1{,}05$.

Розв'язання. Позначимо $a=\operatorname{arctg}1{,}05$. Число a – значення функції $y=\operatorname{arctg}x$ при $x=1{,}05$. Легко знаходиться $\operatorname{arctg}x$ при $x_0=1$, а оскільки точка $x=1{,}05$ знаходиться близько до точки $x_0=1$, $\Delta x=x-x_0=0{,}05$:

$$a=\operatorname{arctg}x\Big|_{x=1{,}05}\approx\operatorname{arctg}x\Big|_{x=1}+dy\Big|_{x=1,\ \Delta x=0{,}05}=\frac{\pi}{4}+\left(y'\Delta x\right)\Big|_{x=1,\ \Delta x=0{,}05}=$$

$$=\frac{\pi}{4}+\left(\frac{1}{1+x^2}\Delta x\right)\Bigg|_{x=1,\ \Delta x=0{,}05}=\frac{\pi}{4}+\frac{0{,}05}{2}=\frac{\pi}{4}+0{,}025\approx 0{,}8104.$$

Приклад 2.2.90. $\cos 121^\circ$.

Розв'язання. Спростимо дане число:

$$\cos 121^\circ=\cos\left(180^\circ-59^\circ\right)=-\cos 59^\circ.$$

Позначимо $b=-\cos 59^\circ$. Число b – значення функції $y=-\cos x$ при $x=59^\circ$: $b=\left(-\cos x\right)\Big|_{x=59^\circ}$.

Досить просто знаходимо

$$\left.(-\cos x)\right|_{x=x_0=60^\circ} = -\frac{1}{2} \text{ і } \Delta x = x - x_0 = -1^\circ = -\frac{\pi}{180} \text{ рад.}$$

Тоді $b \approx y(60^\circ) + y'(60^\circ)\Delta x = -\frac{1}{2} + \left.(\cos x \cdot \Delta x)\right|_{x=60^\circ,\ \Delta x = \frac{\pi}{180}} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{180} \approx -0{,}5151.$

Приклад 2.2.91. Довести наближену формулу

$$\sqrt[n]{a^n + x} \approx a + \frac{x}{na^{n-1}} \quad (a > 0), \tag{2.2.23}$$

де $|x| << a^n$. За допомогою цієї формули наближено обчислити:

$$1)\ \sqrt[4]{80};\quad 2)\ \sqrt[10]{1090}.$$

Розв'язання. Розглянемо функцію $y = \sqrt[n]{a^n + x}$. При переході від точки $x_0 = 0$ до фіксованої точки x аргумент набуває приросту $\Delta x = x - x_0 = x$. З умови випливає, що Δx – мале число, тому для знаходження значення функції y у фіксованій точці x приріст можна замінити диференціалом:

$$y(x) \approx y(0) + y'(0)\Delta x.$$

Враховуючи, що $y(0) = a$, $y'(x) = \frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt[n]{(a^n + x)^{n-1}}}$, $y(0) = \frac{1}{na^{n-1}}$, $\Delta x = x$, матимемо $\sqrt[n]{a^n + x} \approx a + \frac{x}{na^{n-1}}$.

Перейдемо до обчислень:

1) $\sqrt[4]{80} = \sqrt[4]{3^4 - 1} \approx \left| \begin{matrix} a = 3, x = -1, \\ n = 4 \end{matrix} \right| \approx 3 - \frac{1}{4 \cdot 3^3} \approx 2{,}9907$;

2) $\sqrt[10]{1090} = \sqrt[10]{1024 + 66} = \sqrt[10]{2^{10} + 66} \approx \left| \begin{matrix} n = 10, \\ a = 2, x = 66 \end{matrix} \right| \approx 2 + \frac{66}{10 \cdot 2^9} \approx 2{,}0129.$

Зауваження. На основі поняття диференціала можуть бути одержані важливі формули:

$$(1 + \alpha)^n \approx 1 + n\alpha; \tag{2.2.24}$$

$$e^\alpha \approx 1 + \alpha; \tag{2.2.25}$$

$$\sin \alpha \approx \alpha; \tag{2.2.26}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha; \tag{2.2.27}$$

$$\ln(1 + \alpha) \approx \alpha, \tag{2.2.28}$$

де α – мала величина (у практичному розумінні цього слова).

Приклад 2.2.92. З якою відносною похибкою допустимо вимірювати радіус кулі, щоб її об'єм можна було визначити з точністю до 2%?

Розв'язання. Позначимо: r – радіус; Δr – похибка вимірювання, δ_r – відносна похибка вимірювання радіуса кулі; V – об'єм кулі; ΔV – похибка знаходження об'єму кулі; δ_V – відносна похибка знаходження об'єму кулі.

Об'єм кулі визначається формулою $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Похибка Δr вимірювання радіуса кулі спричиняє похибку ΔV визначення її об'єму.

Застосовуючи поняття диференціала, знаходимо

$$\Delta V \approx dV = V'(r)\Delta r = 4\pi r^2 \Delta r\,,\ \delta_V = \left|\frac{\Delta V}{V}\right| \approx \left|\frac{4\pi r^2 \Delta r}{\frac{4}{3}\pi r^3}\right| = 3\left|\frac{\Delta r}{r}\right| = 3\delta_r \Rightarrow \delta_r \approx \frac{1}{3}\delta_V .$$

Отже, $\delta_r \le 0{,}67\ \%$.

Приклад 2.2.93. Знайти абсолютну похибку десяткового логарифма числа $x(x > 0)$, якщо відносна похибка цього числа дорівнює δ.

Розв'язання. Нехай Δx – похибка числа. З умови випливає, що $\left|\frac{\Delta x}{x}\right| = \delta$.

Функція десяткового логарифма числа має вигляд $y = \lg x$. Знайдемо, яку похибку Δy для y спричинить похибка Δx числа x:

$$\Delta y \approx dy = y'(x)\Delta x = \frac{1}{x\ln 10}\Delta x = \frac{1}{\ln 10}\frac{\Delta x}{x} \Rightarrow |\Delta y| \approx \frac{1}{\ln 10}\left|\frac{\Delta x}{x}\right| = \frac{\delta}{\ln 10}.$$

Приклад 2.2.94. Довести, що кути за логарифмічною таблицею тангенсів знаходяться точніше, ніж за логарифмічною таблицею синусів.

Розв'язання. З умови випливає, що один і той же кут x можна знайти із співвідношень $y = \ln \operatorname{tg} x$ і $y = \ln \sin x$, де $\ln \operatorname{tg} x$ і $\ln \sin x$ – відповідно значення в логарифмічній таблиці тангенсів і логарифмічній таблиці синусів.

Звідси находимо $x_1 = \operatorname{arctg} e^y$ і $x_2 = \arcsin e^y$, де x_1, x_2 – одне і те ж значення кута x, знайдене за різними таблицями.

Знайдемо похибки x_1 і x_2, якщо похибки Δy в обох таблицях однакові:

$$\Delta x_1 \approx dx_1 = x_1'(y)\Delta y = \frac{e^y}{1 + e^{2y}}\Delta y,\ \Delta x_2 \approx dx_2 = x_2'(y)\Delta y = \frac{e^y}{\sqrt{1 - e^{2y}}}\Delta y .$$

Абсолютні похибки відповідно дорівнюють

$$|\Delta x_1| \approx \frac{e^y}{1 - e^{2y}}|\Delta y|\,,\ |\Delta x_2| \approx \frac{e^y}{\sqrt{1 + e^{2y}}}|\Delta y|.$$

Доведемо, що $|\Delta x_2| \ge |\Delta x_1|$: $\frac{e^y}{\sqrt{1 + e^{2y}}}|\Delta y| \ge \frac{e^y}{1 - e^{2y}}|\Delta y|$.

Якщо $|\Delta y| = 0$, то співвідношення очевидне. Нехай $|\Delta y| > 0$, тоді маємо: $\sqrt{1 - e^{2y}} \le 1 + e^{2y}$, $1 - e^{2y} \le 1 + e^{2y} + e^{4y}$, $e^{4y} + 3e^{2y} \ge 0$ – очевидно. Отже, $|\Delta x_2| \ge |\Delta x_1|$.

Приклад 2.2.95. Віддаль d від світлової точки до оптичного центра двоопуклого скла і відстань від її зображення до оптичного центра зв'язані формулою $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$, де F – стала для даного скла і даного виду променів. Як впливає похибка вимірювання d на похибку обчислення f?

Розв'язання. Знайдемо f:

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{F}-\frac{1}{d}=\frac{d-F}{Fd},\ f=\frac{Fd}{d-F}.$$

Похибка Δd вимірювання d спричиняє похибку Δf обчислення f:

$$\Delta f \approx df = f'_d \Delta f = F\frac{d-F-d}{(d-F)^2}\Delta d = -\frac{F^2}{(d-F)^2}\Delta d.$$

2.2.4. Основні теореми диференціального числення. Правило Лопіталя і його застосування

1. Локальні екстремуми функції. Теореми Ферма і Дарбу.

Означення 2.2.3. Нехай функція $y=f(x)$ неперервна в точці c і її околі. Точка c називається точкою локального максимуму (мінімуму) функції $y=f(x)$, якщо існує такий окіл точки c, що для всіх точок $x \neq c$ цього околу справедлива нерівність $f(x)\le f(c)$ $(f(x)\ge f(c))$ (рис. 2.2.18).

Позначення: $c=x_{\max}$ ($c=x_{\min}$).

Точки локального максимуму і локального мінімуму називаються точками локального екстремуму.

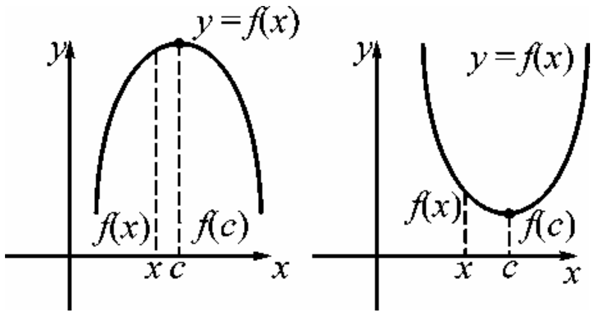


Рис. 2.2.18

Значення функції $y=f(x)$ в точці локального максимуму (мінімуму) називається її локальним максимумом (мінімумом).

Позначення: $f(c)=y_{\max}$ ($f(c)=x_{\min}$).

Локальні максимуми і мінімуми функції називаються її локальними екстремумами.

Теорема 2.2.2 (теорема Ферма). Якщо функція $y=f(x)$, диференційовна на інтервалі $(a;b)$ і в точці $x_0\in(a;b)$, має локальний екстремум, то $f'(x_0)=0$.

Теорема 2.2.3 (теорема Дарбу). Якщо функція $f(x)$ диференційовна на відрізку $[a;b]$ і $f'(a+0)f'(b-0)<0$, то існує принаймні одна точка $c\in(a;b)$, така, що $f'(c)=0$.

Висновок. Якщо функція $y=f(x)$ диференційовна на інтервалі $(a;b)$ і її похідна не перетворюється на нуль, то на цьому інтервалі похідна $f'(x)$ зберігає знак.

2. Теореми Ролля, Лагранжа і Коші.

Теорема 2.2.4 (теорема Ролля). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, диференційовна на інтервалі $(a;b)$ і $f(a)=f(b)$, то існує принаймні одна точка $c\in(a;b)$, така, що $f'(c)=0$ (рис. 2.2.19).

Висновок 1. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і диференційовна на інтервалі $(a;b)$, то між кожними двома нулями функції $f(x)$ міститься принаймні один нуль її похідної $f'(x)$ (рис. 2.2.20).

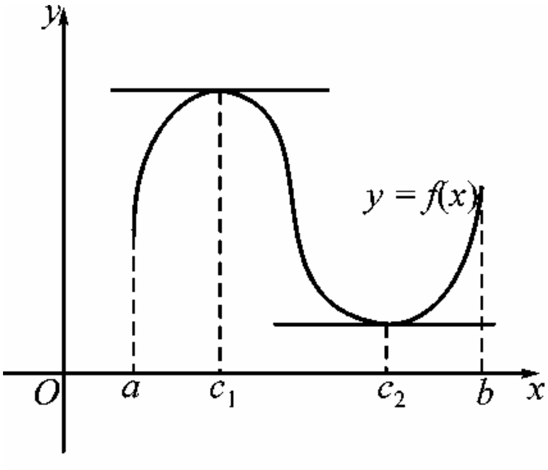


Рис. 2.2.19

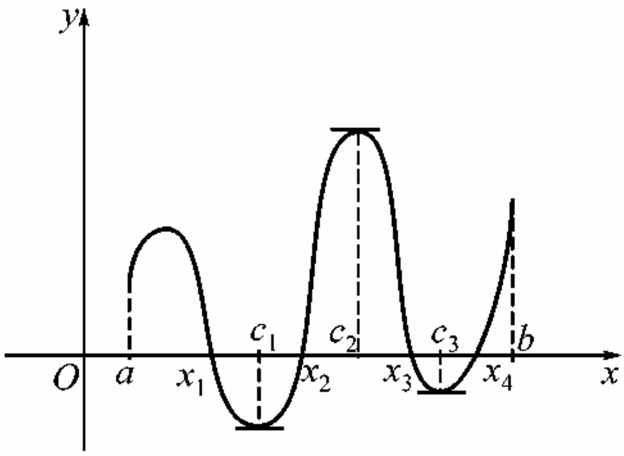


Рис. 2.2.20

Висновок 2. Якщо функція $f(x)$, неперервна на відрізку $[a;b]$ і диференційовна на інтервалі $(a;b)$, має на відрізку $[a;b]$ n коренів, то її похідна $f'(x)$ має принаймні $n-1$ коренів.

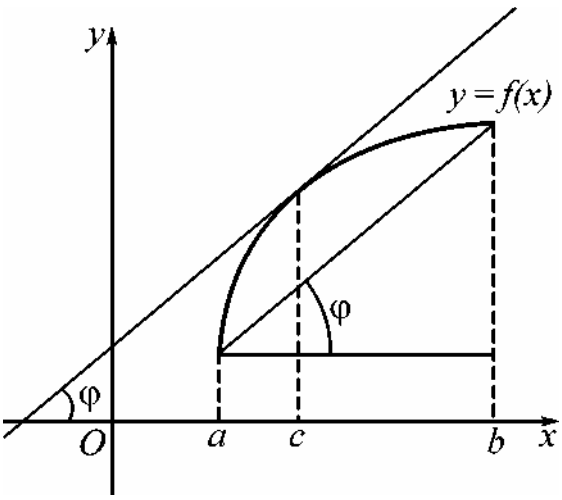


Рис. 2.2.21

Теорема 2.2.5 (теорема Лагранжа). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і диференційовна на інтервалі $(a;b)$, то існує принаймні одна точка $c\in(a;b)$, така (рис. 2.2.21), що

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c). \qquad (2.2.29)$$

Формула (2.2.29) називається формулою Лагранжа (формулою скінченних приростів).

Інші вигляди формули Лагранжа:

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c); \qquad (2.2.30)$$

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(a+\Theta(b-a)),\ 0<\Theta<1; \qquad (2.2.31)$$

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\Theta\Delta x)\Delta x,\ 0<\Theta<1; \qquad (2.2.32)$$

$$\Delta y=\Delta x f'(c). \qquad (2.2.33)$$

Висновок 1 (ознака сталості функції). Якщо $f'(x)=0$ на інтервалі $(a;b)$, то на цьому інтервалі функція $f(x)$ стала.

Висновок 2. Якщо функція $f(x)$ диференційовна на інтервалі $(a;b)$, то на цьому інтервалі похідна $f'(x)$ не може мати точок розриву.

Теорема 2.2.6 (теорема Коші). Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні на відрізку $[a; b]$ і диференційовні на інтервалі $(a; b)$, причому $\varphi'(x) \neq 0$ при $x \in (a; b)$, то існує принаймні одна точка $c \in (a, b)$, така, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \tag{2.2.34}$$

Формула (2.2.34) називається формулою Коші. Другий вигляд формули Коші:

$$\frac{\Delta f}{\Delta \varphi} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \tag{2.2.35}$$

Приклад 2.2.96. Довести висновок із теореми Дарбу: якщо функція $f(x)$ диференційовна на інтервалі $(a; b)$ і її похідна не перетворюється на нуль, то на цьому інтервалі похідна $f'(x)$ зберігає знак.

Розв'язання. Припустимо, що існують точки x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ на інтервалі $(a; b)$, такі, що $f'(x_1) f'(x_2) < 0$, тоді на відрізку $[x_1, x_2]$ ця функція задовольняє умову теореми Дарбу, а отже, $\exists c \in (x_1, x_2)$, така, що $f'(c) = 0$. Останнє суперечить умові задачі.

Приклад 2.2.97. Показати, що рівняння $x^3 + 3x + 2$ має тільки один дійсний корінь.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = x^3 + 3x + 2$. Її похідною є $f'(x) = 3(x^2 + 1)$. Очевидно, що функція $f(x)$ – неперервна і диференційовна і $f'(x) \neq 0$ на R. Оскільки $f(-1) < 0$, а $f(0) > 0$, то корінь c_1 існує, причому він лежить на інтервалі $(-1; 0)$ (див. теорему 2.1.25). Якби функція мала ще один корінь c_2, за висновком із теореми Ролля між коренями c_1 і c_2 функції знайшовся хоча б один корінь c похідної, тобто $f'(c) = 0$. Останнє неможливе.

Приклад 2.2.98. Довести, що для будь-якого $a \in R$ рівняння $x^3 - 3x + a = 0$ (1) не може мати двох різних коренів на відрізку $[0; 1]$.

Розв'язання. Припустимо, що існує $a \in R$, таке, що рівняння (1) на відрізку $[0; 1]$ має два різних кореня: c_1 і c_2. Тоді для функції $f(x) = x^3 - 3x + a$, яка є неперервною і диференційовною на проміжку $[0; 1]$, справедливе $f(c_1) = f(c_2) = 0$. Тоді за теоремою Ролля $\exists c \in (c_1, c_2)$: $f'(c) = 3(c^2 - 1) = 0$. Маємо, з одного боку, $f'(x) = 0$ тільки в двох точках $c_1 = -1$ і $c_2 = 1$, а з другого – на $(c_1, c_2) \in [0; 1]$ існує точка c, така, що $f'(c) = 0$. Одержана суперечність якраз і свідчить про те, що рівняння $x^3 - 3x + a = 0$ ні при якому a не може мати на відрізку $[0; 1]$ двох різних коренів.

Приклад 2.2.99. Довести, що всі корені похідної багаточлена $f(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ дійсні, і вказати межі, між якими вони містяться.

Розв'язання. Корені $f(x)$: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$.

Похідна $f'(x)$ – багаточлен 3-го степеня. За висновком із теореми Ролля похідна $f'(x)$ має три дійсних кореня c_1, c_2, c_3, що знаходяться відповідно на інтервалах $(-1;1)$, $(1;2)$, $(2;3)$. Оскільки багаточлен 3-го степеня має всього три кореня, а вони всі вказані, то звідси випливає, що всі корені $f'(x)$ – дійсні.

3. Правило Лопіталя і його застосування для знаходження границь.

Теорема 2.2.7 (правило Лопіталя). Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ – неперервні і диференційовні в околі (лівому, правому) точки a (a – скінченне або нескінченне), при $x \to a$ ($x \to a-0$, $x \to a+0$, $x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$) $f(x) \to 0$ і $\varphi(x) \to 0$ (або $f(x) \to \infty$ і $\varphi(x) \to \infty$), існує границя $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$ (A – скінченне або нескінченне), то

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \tag{2.2.36}$$

Формула (2.2.36) називається формулою (правилом) Лопіталя.

Зауваження:

1. Зміст правила Лопіталя: при деяких обмеженнях границя відношення функцій дорівнює границі відношень їх похідних.

2. Безпосередньо правило Лопіталя застосовується для розкриття невизначеностей типу $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ і $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, але його можна використати і для розкриття невизначеностей інших типів.

Якщо $f \to 0$, $\varphi \to \infty$, то $\lim(f\varphi) = \lim \dfrac{f}{\frac{1}{\varphi}} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$ або $\lim \dfrac{\varphi}{\frac{1}{f}} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Невизначеність типу $(0 \cdot \infty)$ зведено до невизначеності $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ або $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Якщо $f \to \infty$, $\varphi \to \infty$, то $\lim(f - \varphi)(\infty - \infty) = \lim\left[f\left(1 - \dfrac{\varphi}{f}\right)\right] = (\infty \cdot 0)$ при $\dfrac{\varphi}{f} \to 1$.

Якщо $f \to 1(0,\infty)$, $\varphi \to 1(0,\infty)$, то границя $\lim f^{\varphi}$ може бути однією з невизначеностей: 1^{∞}, 0^{0}, 0^{∞}, ∞^{∞}. Зведемо до простіших типів, користуючись формулою $\lim f^{\varphi} = e^{\lim(\varphi \ln f)}$.

3. Якщо границю $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ знайти безпосередньо важко, але функції $f'(x)$ і $\varphi'(x)$ задовольняють умови теореми Лопіталя, то правило Лопіталя можна безпосередньо застосувати до границі $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Таким чином, правило Лопіталя можна застосовувати багаторазово:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}=\ldots.$$

Застосовуючи правило Лопіталя, знайти границі функцій (2.2.100 − 2.2.114).

Приклад 2.2.100. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\left(x^2-3\right)}{x^2+3x-10}$.

Розв'язання. Позначимо $f(x)=\ln\left(x^2-3\right)$, $\varphi(x)=x^2+3x-10$, тоді $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2-3}$, $\varphi'(x)=2x+3$. Функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ – неперервні і диференційовні в околі точки $x=2$; $f(x)\to 0$ і $\varphi(x)\to 0$ при $x\to 2$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\dfrac{4}{7}$, тому $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{4}{7}$.

Звичайно, що всі вказані перевірки роблять усно, тому скорочений запис має вигляд $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\left(x^2-3\right)}{x^2+3x-1}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x}{2x+3}=\dfrac{4}{7}$.

Приклад 2.2.101. $A_1=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x}$.

Розв'язання. Дана границя – невизначеність типу $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. За правилом Лопіталя $A_1=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos x}{1}$, тобто границі не існує. Оскільки границя відношення похідних не існує, то правило Лопіталя в цьому випадку незастосовне.

Водночас, обчисливши границю безпосередньо, маємо

$$A_1=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)=\Big|\,|\sin x|\le 1\,\Big|=1.$$

Приклад 2.2.102. $A_2=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x^2}{\ln\cos\left(2x^2-x\right)}$.

Розв'язання.

$$A_2=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{6x\cos 3x^2\cos\left(2x^2-x\right)}{-\sin\left(2x^2-x\right)(4x-1)}=\left|\begin{array}{c}\cos 3x^2\to 1,\\ \cos\left(2x^2-x\right)\to 1,\\ 4x-1\to -1\end{array}\right|=$$

$$=6\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin\left(2x^2-x\right)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\text{застосуємо правило Лопіталя ще раз}\right|=$$

$$=6\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos\left(2x^2-x\right)(4x-1)}=-6.$$

Зауваження. Треба комбінувати безпосередній спосіб знаходження границі з правилом Лопіталя. Прийоми, одержані раніше, треба використовувати і зараз, зокрема, нескінченно малі множники заміняти еквівалентними величинами.

Обчислимо дану границю ще раз:

$$A_2 = \left(\frac{0}{0}\right) = \left| \begin{array}{l} \sin 3x^2 \sim 3x^2, \\ \ln\cos\left(2x^2 - x\right) \sim \cos\left(2x^2 - x\right) - 1 \sim \\ \sim -\dfrac{\left(2x^2 - x\right)^2}{2} \end{array} \right| = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{-\dfrac{\left(2x^2 - x\right)^2}{2}} =$$

$$= -6 \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2 (2x-1)^2} = -6 .$$

Застосування правила Лопіталя виявилося непотрібним.

Приклад 2.2.103. $A_3 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x)\left(e^x - \cos x\right)\left(e^{x^3} - 1\right)}{\sqrt{4+x}\ \mathrm{tg}^3(2x)(1-\cos x)}$.

Розв'язання.

$$A_3 = \left(\frac{0}{0}\right) = \left| \begin{array}{l} \ln(1+2x) \sim 2x,\ e^{x^3} - 1 \sim x^3, \\ \sqrt{4+x} \to 2,\ \mathrm{tg}^3(2x) \sim (2x)^3, \\ 1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{2x \cdot x^3 \left(e^x - \cos x\right)}{8x^3 \dfrac{x^2}{2}} =$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{1}{4} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \sin x}{1} = \frac{1}{4}.$$

Приклад 2.2.104. $A_4 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^2}{2} - x - 1}{\cos x + \dfrac{x^2}{2} - 1}$.

Розв'язання. Тут будемо застосовувати правило Лопіталя багаторазово:

$$A_4 = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \dfrac{x^2}{2} - x - 1}{-\sin x + x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{1 - \cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1.$$

Приклад 2.2.105. $A_5 = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^m - 2^m}{x^n - 2^n}$.

Розв'язання.

$$A_5 = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 2} \frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}} = \frac{m}{n} 2^{m-n} .$$

(Порівняйте це розв'язання з розв'язанням прикладу 2.1.18).

Приклад 2.2.106. $A_6 = \lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$.

Розв'язання.

$$A_6 = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 7}\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}} - \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+20)^2}}}{\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{\sqrt[4]{(x+9)^3}}} = \frac{\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{27}}{\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{8}} = \frac{112}{27}.$$

(Порівняйте це розв'язання з розв'язанням прикладу 2.1.22).

Приклад 2.2.107. Порівняти функції $\log_a x$ $(a>1)$ і a^x $(a>1)$ з функцією x^b $(b>0)$ при $x\to+\infty$.

Розв'язання. За правилом Лопіталя

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^b} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\ln a\cdot bx^{b-1}} = \frac{1}{b\ln a}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^b} = 0.$$

Оскільки $b>0$, то знайдуться два послідовних натуральних числа n і $n+1$, таких, що $n\le b<n+1$.

Застосуємо правило Лопіталя n раз:

$$A = \lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^b} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln a}{bx^{b-1}} =$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln^2 a}{b(b-1)x^{b-2}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \ldots = \lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln^n a}{b(b-1)\cdots(b-n+1)x^{b-n}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

Очевидно, що $0\le b-n<1$. Якщо $b-n=0$, то $A=\infty$. Якщо $b-n>0$, то ще раз застосуємо правило Лопіталя і одержимо

$$A = \lim_{x\to+\infty}\frac{a^n\ln^{n+1} a x^{n+1-b}}{b(b-1)\cdots(b-n+1)(b-n)} = \infty.$$

Висновок: при $x\to+\infty$ логарифмічна функція $\log_a x$ $(a>1)$ зростає до нескінченності повільніше, ніж степенева функція x^b $(b>0)$; показникова функція a^x $(a>1)$ зростає швидше, ніж степенева функція x^b $(b>0)$.

Приклад 2.2.108. $A_7 = \lim\limits_{x\to 1}\left[(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}\right]$.

Розв'язання.

$$A_7 = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\dfrac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{2}} = \lim_{x\to 1}\frac{-1}{-\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{\pi x}{2}}\dfrac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

Приклад 2.2.109. $A_8 = \lim\limits_{x\to -0}\left(\dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\right)$.

Розв'язання.

$$A = \lim_{x\to -0}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \left|\begin{array}{l} y=\dfrac{1}{x}\Rightarrow x=\dfrac{1}{y}, \\ y\to-\infty,\ \text{якщо}\ x\to -0\end{array}\right| = \lim_{y\to-\infty}\left(ye^y\right) = (\infty\cdot 0) =$$

$$= \lim_{y\to-\infty} \frac{y}{e^{-y}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{y\to-\infty} \frac{1}{-e^{-y}} = 0 .$$

Приклад 2.2.110. $A_9 = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[(\pi - 2\operatorname{arctg} x)\ln x\right]$.

Розв'язання.

$$A_9 = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{\dfrac{1}{\ln x}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{\left(1+x^2\right)\left(-\dfrac{1}{\ln^2 x}\dfrac{1}{x}\right)} =$$

$$= 2\lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln^2 x}{1+x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = 2\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x + 2\ln x}{2x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x\cdot\dfrac{1}{x} + 2\dfrac{1}{x}}{1} =$$

$$= 2\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x + 1}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = 2\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 .$$

Приклад 2.2.111. $A_{10} = \lim\limits_{x\to1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right)$.

Розв'язання.

$$A_{10} = (\infty - \infty) = \lim_{x\to1} \frac{x - 1 - \ln x}{(x-1)\ln x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to1} \frac{1 - \dfrac{1}{x}}{\ln x + 1 - \dfrac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{x-1}{x\ln x + x - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to1} \frac{1}{\ln x + 2} = \frac{1}{2} .$$

Приклад 2.2.112. $A_{11} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg} x} - \dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$.

Розв'язання.

$$A_{11} = (\infty - \infty) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2x\sin x - \pi}{2\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x + 2x\cos x}{-2\sin x} = -1 .$$

Приклад 2.2.113. $A_{12} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

Розв'язання.

$$A_{12} = \left(1^\infty\right) = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x \ln\sin x)} ;$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x\ln\sin x) = (\infty\cdot 0) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\sin x}{\operatorname{ctg} x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\left(-\sin^2 x\right)}{\sin x} =$$

$$= -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x\cos x) = 0;$$

$$A_{12} = e^0 = 1 .$$

Приклад 2.2.114. $A_{13}=\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln\left(e^x-1\right)}}$.

Розв'язання.

$$A_{13}=\left(0^0\right)=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln\left(e^x-1\right)}\ln x\right]};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln\left(e^x-1\right)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{x}=1;$$

$$A_{13}=e^1=e.$$

2.2.5. Похідні та диференціали вищих порядків

1. Похідні вищих порядків і їх загальні властивості.

Означення 2.2.4. Нехай функція $f(x)$ визначена на множині X і диференційовна на множині X_1. Тоді на множині X_1 буде визначеною функція $f'(x)$, яка називається похідною функції $f(x)$ (першою похідною функції $f(x)$).

Якщо функція $f'(x)$ диференційовна на множині X_2, то її похідна називається другою похідною функції $f(x)$ і позначається

$$f''(x),\ \frac{d^2f}{dx^2},\ y''(x),\ \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Таким чином, друга похідна – це похідна від першої похідної:

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)',\ \frac{d^2f}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right).$$

Продовжуючи ці міркування, одержимо: якщо похідна порядку $n-1$ функції $f(x)$ диференційовна на множині X_n, то її похідна називається n-ю похідною функції $f(x)$ (похідною n-го порядку функції $f(x)$) і позначається

$$f^{(n)}(x),\ \frac{d^nf}{dx^n},\ y^n(x),\ \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Таким чином, n-та похідна – це похідна від ($n-1$)-ї похідної:

$$f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)',\ \text{або}\ \frac{d^nf}{dx^n}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{(n-1)}f}{dx^{n-1}}\right).$$

Для областей визначення похідних справедливе

$$X\supseteq X_1\supseteq X_2\supseteq\ldots\supseteq X_n.$$

Якщо функція $f(x)$ має похідну n-го порядку на інтервалі $(a;b)$, то кажуть, що функція $f(x)$ диференційовна n раз на цьому інтервалі. Якщо, крім того, $f^{(n)}(x)$ – неперервна функція на інтервалі $(a;b)$, то функцію $f(x)$ називають функцією класу C^n і позначають $f(x)\in C^n$.

Функція $f(x)$ – нескінченно диференційовна на інтервалі $(a;b)$, якщо для кожного $n\in N$ вона має на інтервалі $(a;b)$ похідну n-го порядку. В цьому випадку функцію $f(x)$ називають функцією класу C^∞ і позначають $f(x)\in C^\infty$.

Загальні властивості похідної n-го порядку:

1) $$\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right)=\frac{d^{m+n}f}{dx^{m+n}} \qquad (2.2.37)$$

(припускається, що функція $f(x)$ диференційовна $m+n$ раз);

2) якщо функція $f(x)$ n раз диференційовна на інтервалі $(a;b)$, то функції $f(x)$, $f'(x),\ldots,$ $f^{(n-1)}(x)$ неперервні на $(a;b)$;

3) $(u+v)^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)}$; (2.2.38)

4) $(cu)^{(n)}=cu^{(n)}$ (c – стала); (2.2.39)

5) $(uv)'=u^{(n)}v+C_n^1u^{(n-1)}v'+C_n^2u^{(n-2)}v''+\ldots+C_n^2u''v^{(n-2)}+C_n^1u'v^{(n-1)}+uv^{(n)}$ (2.2.40)

(u, v – функції, диференційовні n раз).

Формула (2.2.40) називається формулою Лейбніца.

2. Кратне диференціювання функцій, заданих явно. Загальні формули для похідних n-го порядку.

Таблиця похідних n-го порядку для деяких елементарних функцій:

$$\left(x^m\right)^{(n)}=\begin{cases}0, & \text{якщо } m<n,\\ m!, & \text{якщо } m=n,\\ m(m-1)\ldots(m-n+1), & \text{якщо } m>n;\ m,n\in N;\end{cases} \qquad (2.2.41)$$

$$\left(x^\alpha\right)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n},\ n\in N,\ \alpha\in R; \qquad (2.2.42)$$

$$\left(e^x\right)^{(n)}=e^x,\ \left(e^{ax}\right)^{(n)}=a^ne^{ax},\ \left(a^x\right)^{(n)}=a^x\ln^n a,\ a>0; \qquad (2.2.43)$$

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),\ (\sin ax)^{(n)}=a^n\sin\left(ax+n\frac{\pi}{2}\right); \qquad (2.2.44)$$

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),\ (\cos ax)^{(n)}=a^n\cos\left(ax+n\frac{\pi}{2}\right); \qquad (2.2.45)$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}; \qquad (2.2.46)$$

$$\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{(x+a)^{n+1}}; \qquad (2.2.47)$$

$$\left(\frac{1}{a-x}\right)^{(n)}=\frac{n!}{(a-x)^{n+1}}; \qquad (2.2.48)$$

$$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=(-1)^na^n\frac{n!}{(ax+b)^{n+1}}; \qquad (2.2.49)$$

$$(\ln x)^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}; \qquad (2.2.50)$$

$$\left(\ln(1+x)\right)^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n};\qquad(2.2.51)$$

$$\left(\ln(1-x)\right)^{(n)}=-\frac{(n-1)!}{(1-x)^n};\qquad(2.2.52)$$

$$\left(\ln(ax+b)\right)^{(n)}=(-1)^{n-1}a^n\frac{(n-1)!}{(ax+b)^n};\qquad(2.2.53)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{ax+b}}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{a^n(2n-1)!!}{2^n\sqrt{(ax+b)^{2n+1}}}.\qquad(2.2.54)$$

Приклад 2.2.115. Знайти похідну 2-го порядку функції

$$y=\frac{x\left(1+3\sqrt{1-x^2}\right)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Розв'язання. Запишемо дану функцію у вигляді $y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+3x$.

Знайдемо першу похідну:

$$y'=\frac{\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}+3=\frac{1-x^2+x^2}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}+3=\frac{1}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}+3.$$

Диференціюючи першу похідну, одержимо другу похідну:

$$y''=(y')'=-\frac{3}{2}\frac{-2x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^5}}=\frac{3x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^5}}.$$

Приклад 2.2.116. Знайти похідну 2-го порядку функції $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

Розв'язання.

$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}};$$

$$y''=(y')'=-\frac{2x}{2\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}=-\frac{x}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}.$$

Приклад 2.2.117. Знайти похідну 2-го порядку функції $y=\frac{x^5}{(x-1)^4}$ в точці $x=5$.

Розв'язання. Для знаходження y' застосуємо логарифмічне диференціювання:

$$\ln y=5\ln x-4\ln(x-1);\ \frac{y'}{y}=\frac{5}{x}-\frac{4}{x-1}=\frac{x-5}{x(x-1)};$$

$$y'=\frac{x^5}{(x-1)^4}\frac{x-5}{x(x-1)^4}=\frac{x^4(x-5)}{(x-1)^5}.$$

Для знаходження y'' знову застосуємо логарифмічне диференціювання:

$$\ln y'=4\ln x+\ln(x-5)-5\ln(x-1);$$

$$\frac{y''}{y'}=\frac{4}{x}+\frac{1}{x-5}-\frac{5}{x-1}=\frac{4\left(x^2-6x+5\right)+x^2-x-5\left(x^2-5x\right)}{x(x-1)(x-5)}=\frac{20}{x(x-1)(x-5)};$$

$$y''=\frac{x^4(x-5)}{(x-1)^5}\frac{20}{x(x-1)(x-5)}=\frac{20x^3}{(x-1)^6}.$$

Далі знаходимо $y''(5)=\dfrac{20\cdot 5^3}{4^6}=\dfrac{625}{1024}$.

Приклад 2.2.118. Визначити, чи задовольняє функція $y=(A\cos 3x+B\sin 3x)e^{-x}$ рівнянню $y''+2y'+10y=0$.

Розв'язання. Знайдемо похідні:

$$y'=(-3A\sin 3x+3B\cos 3x)e^{-x}-(A\cos 3x+B\sin 3x)e^{-x}=$$
$$=[(-3A-B)\sin 3x+(3B-A)\cos 3x]e^{-x};$$
$$y''=[(-9A-3B)\cos 3x+(-9B+3A)\sin 3x]e^{-x}-$$
$$-[(-3A-B)\sin 3x+(3B-A)\cos 3x]e^{-x}=$$
$$=[(-8A-6B)\cos 3x+(6A-8B)\sin 3x]e^{-x}.$$

Значення y, y', y'' підставимо в дане рівняння і скоротимо на e^{-x}, в результаті одержимо

$$(-8A-6B)\cos 3x+(6A-8B)\sin 3x+(6B-2A)\cos 3x+$$
$$+(-6A-2B)\sin 3x+10A\cos 3x+10B\sin 3x=0,$$
$$(-8A-6B+6B-2A+10A)\cos 3x+(6A-8B-6A-2B+10B)\sin 3x=0,$$
$$0\cdot\cos 3x+0\cdot\sin 3x=0.$$

Одержано істинну рівність. Отже, дана функція задовольняє рівнянню.

Приклад 2.2.119. Знайти y'', вважаючи відомими u', u'', v', v'', якщо $y=\dfrac{v+2u}{u}$.

Розв'язання. Запишемо функцію y в іншій формі: $y=\dfrac{v}{u}+2$. Двічі диференціюємо останню рівність:

$$y'=\frac{uv'-vu'}{u^2},\ y''=\frac{(u'v'+uv''-v'u'-vu'')u^2}{u^4}-\frac{2uu'(uv'-vu')}{u^4}=$$
$$=\frac{u^2v''-uvu''-2uu'v'+2vu'^2}{u^3}.$$

Знайти похідні $y^{(n)}(x)$ функцій (2.2.120 – 2.2.132).

Приклад 2.2.120. $y = x^3 + x + e^{3x}$.

Розв'язання. Позначимо: $u = x^3 + x$, $v = e^{3x}$.

Знаходимо $u' = 3x^2 + 1$, $u'' = 6x$, $u''' = 6$, $u^{(4)} = u^{(5)} = \ldots = 0$. За формулою (2.2.43) $v^{(n)} = 3^n e^{3x}$. Отже, маємо: $y^{(n)} = 3x^2 + 1 + 3e^{3x}$ при $n = 1$; $y^{(n)} = 6x + 3^2 e^{3x}$ при $n = 2$; $y^{(n)} = 6 + 3^3 e^{3x}$ при $n = 3$; $y^{(n)} = 3^n e^{3x}$ при $n \geq 4$.

Приклад 2.2.121. $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$.

Розв'язання. Скористаємося формулою (2.2.41): $\left(a_0 x^n\right)^{(n)} = a_0 n!$; $\left(a_k x^{n-k}\right)^{(n)} = 0$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$, тому $y^{(n)} = a_0 n!$.

Приклад 2.2.122. $y = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m$.

Розв'язання. Скористаємося формулою (2.2.41):

$$\left(a_k x^{m-k}\right)^{(n)} = 0 \text{ при } m - k < n;\ \left(a_k x^{m-k}\right)^{(n)} = a_k n! \text{ при } m - k = n;$$

$$\left(a_k x^{m-k}\right)^{(n)} = a_k (m-k)(m-k-1)\ldots(m-k-n+1)x^{m-k-n} \text{ при } m - k > n.$$

Тому маємо: якщо $m < n$, то $y^{(n)} = 0$; якщо $m = n$, то $y^{(n)} = a_0 m!$; якщо $m > n$, то $y^{(n)} = a_0 m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n} + a_1(m-1)(m-2)\ldots\times$ $\times(m-n)x^{m-n-1} + \ldots + a_k(m-k)(m-k-1)\ldots(m-k-n+1)x^{m-k-n} + \ldots + a_{m-n}n!$.

Приклад 2.2.123. $y = \dfrac{1+x}{1-x}$.

Розв'язання. Перетворимо функцію:

$$y = -\frac{2 + (x-1)}{x-1} = -\frac{2}{x-1} - 1.$$

Скористаємося формулою (2.2.47):

$$y^{(n)} = (-1)^{n+1}\frac{2n!}{(x-1)^{n+1}} = \frac{2n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

Приклад 2.2.124. $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Розв'язання. Виділимо цілу частину даної дробово-лінійної функції:

$$y = \frac{\frac{a}{c}(cx+d) + b - \frac{ad}{c}}{cx+d} = \frac{bc-ad}{c}\frac{1}{cx+d} + \frac{a}{c}.$$

Тепер скористаємося формулою (2.2.49):

$$y^{(n)} = \frac{bc-ad}{c}c^n(-1)^n\frac{n\,!}{(cx+d)^{n+1}} = (-1)^n\frac{(bc-ad)c^{n-1}n!}{(cx+d)^{n+1}}.$$

Приклад 2.2.125. $y = \dfrac{x}{x^2 - 4x - 12}$.

Розв'язання. Подамо функцію у вигляді суми елементарних дробів:

$$\frac{x}{x^2 - 4x - 12} = \frac{x}{(x+2)(x-6)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-6}.$$

Звідси $x = A(x-6) + B(x+2)$, $\begin{array}{r|ll} x=-2 & -2=-8A, & A=\dfrac{1}{4}, \\ x=6 & 6=8B, & B=\dfrac{3}{4}. \end{array}$

Таким чином, $y = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{3}{x-6}\right)$.

Тепер скористаємося формулою (2.2.47):

$$y^{(n)} = \frac{1}{4}(-1)^n n!\left(\frac{1}{(x+2)^{n+1}} + \frac{3}{(x-6)^{n+1}}\right).$$

Приклад 2.2.126. $y = \dfrac{3-2x^2}{2x^2+3x-2}$.

Розв'язання. Спочатку виділимо цілу частину дробу, а потім повторимо алгоритм розв'язання прикладу 2.2.125:

$$\begin{array}{r|l} -\quad 2x^2+3 & 2x^2+3x-2 \\ -\quad 2x^2-3x+2 & -\quad 1 \\ \hline 3x+1 & \end{array};\quad y = \frac{3x+1}{2x^2+3x-2} - 1;$$

$$\frac{3x^2+1}{2x^2+3x-2} = \frac{3x+1}{(x+2)(2x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{2x-1};\ 3x+1 = A(2x-1) + B(x+2);$$

$$\begin{array}{r|l} x=-2 & -5=-5A,\ A=1, \\ x=\dfrac{1}{2} & \dfrac{5}{2}=\dfrac{5}{2}B,\ B=1; \end{array}\quad y = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{2x-1} - 1.$$

Скористаємося формулами (2.2.47) і (2.2.49):

$$y^{(n)} = (-1)^n n!\left(\frac{1}{(x+2)^{n+1}} + \frac{2^n}{(2x-1)^{n+1}}\right).$$

Приклад 2.2.127. Довести формулу (2.2.54):

$$\left(\frac{1}{\sqrt{ax+b}}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{a^n}{2^n}\frac{(2n-1)\ !!}{\sqrt{(ax+b)^{2n+1}}}.$$

Розв'язання. Послідовно знаходимо похідні функції $y = \dfrac{1}{\sqrt{ax+b}}$:

$$y' = -\frac{1}{2}\frac{a}{\sqrt{(ax+b)^3}};$$

$$y'' = \frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{a^2}{\sqrt{(ax+b)^5}};$$

$$y''' = -\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\frac{a^3}{\sqrt{(ax+b)^7}} = (-1)^3\frac{a^3}{2^3}\frac{5!!}{\sqrt{(ax+b)^7}};$$

……………………………………………

$$y^{(n)} = (-1)^n \frac{a^n}{2^n}\frac{(2n-1)!!}{\sqrt{(ax+b)^{2n+1}}}.$$

Приклад 2.2.128. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$.

Розв'язання. Одразу скористаємося формулою (2.2.54):

$$y^{(n)} = (-1)^n \frac{(-2)^n}{2^n} \frac{(2n-1)!!}{\sqrt{(1-2x)^{2n+1}}} = \frac{(2n-1)!!}{\sqrt{(1-2x)^{2n+1}}}.$$

Приклад 2.2.129. Довести формулу (2.2.53):

$$\left(\ln(ax+b)\right)^{(n)} = (-1)^{n-1} a^n \frac{(n-1)\,!}{(ax+b)^n}.$$

Розв'язання. Позначимо $y = \ln(ax+b)$. Послідовно знаходимо похідні:

$$y' = \frac{a}{(ax+b)};$$

$$y'' = -\frac{a^2}{(ax+b)^2};$$

$$y''' = a^3 \frac{1\cdot 2}{(ax+b)^3};$$

$$y^{(4)} = -a^4 \frac{1\cdot 2\cdot 3}{(ax+b)^4} = (-1)^3 a^4 \frac{(n-1)\,!}{(ax+b)^4};$$

…………………………………………

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1} a^n \frac{(n-1)\,!}{(ax+b)^n}.$$

Приклад 2.2.130. Довести формулу (2.2.44): $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Розв'язання.

$$y = \sin x,$$

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left[\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right] = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''' = \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left[\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right] = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right), \ldots,$$

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Приклад 2.2.131. $y = \sin ax \sin bx$.

Розв'язання. Перетворимо функцію: $y = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right)$.

Скористаємося формулою (2.2.45):

$$y^{(n)} = \frac{1}{2}\left[(a-b)^n \cos\left((a-b)x + n\frac{\pi}{2}\right) - (a+b)^n \cos\left((a+b)x + n\frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

$$=\frac{(a-b)^n}{2}\cos\left((a-b)x+n\frac{\pi}{2}\right)-\frac{(a+b)^n}{2}\cos\left((a+b)x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

Приклад 2.2.132. $y=\cos^4 x$.

Розв'язання. Перетворимо функцію

$$y=\left(\cos^2 x\right)^2=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\cos^2 2x=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}(1+\cos 4x)=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x.$$

Скористаємося формулою (2.2.45):

$$y^{(n)}=\frac{1}{2}2^n\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{8}4^n\cos\left(4x+n\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=2^{n-1}\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}4^{n-1}\cos\left(4x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

Знайти похідні n-го порядку функцій (2.2.133, 2.2.134).

Приклад 2.2.133. $y=(3-2x)^2e^{2-3x}$.

Розв'язання. Перепишемо функцію у вигляді

$$y=e^{2-3x}\left(9-12x+4x^2\right).$$

Позначимо $u=e^{2-3x}$, $v=9-12x+4x^2$ і скористаємося формулою Лейбніца: $y^{(n)}=u^{(n)}v+C_n^1u^{(n-1)}v'+C_n^2u^{(n-2)}v''$. Оскільки $v'''=v^{(4)}=\ldots=0$, то решта доданків дорівнює нулю, і їх не пишемо. Таким чином,

$$y^{(n)}=(-3)^ne^{2-3x}\left(9-12x+4x^2\right)+n(-3)^{n-1}e^{2-3x}(-12+8x)+$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}(-3)^{n-2}e^{2-3x}\cdot 8=(-3)^{n-2}e^{2-3x}\left(36x^2-12(9+2n)x+81+32n+4n^2\right).$$

Приклад 2.2.134. $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{1-2x}}$.

Розв'язання. Запишемо функцію у вигляді $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}x^2$. Позначимо $u=\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$, $v=x^2$ і застосуємо формулу Лейбніца: $y^{(n)}=u^{(n)}v+C_n^1u^{(n-1)}v'+$ $+C_n^2u^{(n-2)}v''$. Оскільки $v'''=v^{(4)}=\ldots=0$, то решта доданків у формулі відсутня. Скориставшись формулою (2.2.54), одержимо

$$y^{(n)}=(-1)^n\frac{(-2)^n}{2^n}\frac{(2n-1)!!}{\sqrt{(1-2x)^{2n+1}}}x^2+n(-1)^{n-1}\frac{(-2)^{n-1}}{2^{n-1}}\frac{(2n-3)!!}{\sqrt{(1-2x)^{2n-1}}}2x+$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-2}\frac{(-2)^{n-2}}{2^{n-2}}\frac{(2n-5)!!}{\sqrt{(1-2x)^{2n-3}}}2=$$

$$=\frac{(2n-5)!!}{\sqrt{(1-2x)^{2n-3}}}\left(\frac{(2n-3)(2n-1)}{(1-2x)^2}x^2+\frac{2n(2n-3)}{1-2x}x+n(n-1)\right)=$$

$$=\frac{(2n-5)!!}{\sqrt{(1-2x)^{2n-3}}}\frac{\left(4n^2-8n+3\right)x^2+\left(4n^2-6n\right)\left(x-2x^2\right)+\left(n^2-n\right)\left(1-4x+4x^2\right)}{(1-2x)^2}=$$

$$=(2n-5)!!\frac{3x^2-2nx+n^2-n}{\sqrt{(1-2x)^{2n+1}}}.$$

Обчислити в заданій точці похідну вказаного порядку (2.2.135 – 2.2.137).

Приклад 2.2.135. $y=\dfrac{x^2}{1-x}$, $n=8$, $x=0$.

Розв'язання. Перетворимо функцію:

$$y=\frac{x^2}{1-x}=-\frac{\left(x^2-1\right)+1}{x-1}=-x-1-\frac{1}{x-1}.$$

Тоді за формулою (2.2.47) одержимо $y^{(8)}=(-1)^9\dfrac{8!}{(x-1)^9}=\dfrac{8!}{(1-x)^9}$ і $y^8(0)=8!$

Приклад 2.2.136. $y=\sqrt{x^2+3x^3}$, $n=5$, $x=1$.

Розв'язання. Перетворимо функцію: $y=\sqrt{x^2(1+3x)}=|x|\sqrt{1+3x}$. В околі точки $x=1$ $|x|=x$, тому $y=x\sqrt{1+3x}$. Позначимо $u=\sqrt{1+3x}$ і $v=x$ і застосуємо формулу Лейбніца: $y^{(5)}=u^{(5)}v+5u^{(4)}v'$.

Оскільки $v''=v'''=\ldots=0$, то решта доданків у формулі дорівнює нулю.

Знайдемо $u'=\dfrac{3}{2\sqrt{1+3x}}$. Тепер скористаємося формулою (2.2.54), враховуючи, що $u^{(4)}=(u')^{(3)}$ і $u^{(5)}=(u')^{(4)}$:

$$y^{(5)}=\frac{3}{2}(-1)^4\frac{3^4}{2^4}\frac{7!!}{\sqrt{(1+3x)^9}}x+5\frac{3}{2}(-1)^3\frac{3^3}{2^3}\frac{5!!}{\sqrt{(1+3x)^7}};$$

$$y^{(5)}(1)=\frac{3^5}{2^5}\frac{7!!}{2^9}-5\frac{3^4}{2^4}\frac{5!!}{2^7}=\frac{3^4}{2^4}\frac{5!!}{2^7}\left(\frac{3}{2}\frac{7}{4}-5\right)=-\frac{3^4\cdot 3\cdot 5}{2^{11}}\frac{19}{8}=-\frac{95\cdot 3^5}{2^{14}}.$$

Приклад 2.2.137. $y=\left(x^2-2x\right)\cos 3x$, $n=101$, $x=1$.

Розв'язання. Перепишемо функцію у вигляді $y=\cos 3x\left(x^2-2x\right)$. Позначимо $u=\cos 3x$, $v=x^2-2x$ і, враховуючи, що $v'''=v^{(4)}=\ldots=0$, запишемо формулу Лейбніца (див. формулу (2.2.45)):

$$y^{(101)}=u^{(101)}v+101u^{(100)}v'+\frac{101\cdot 100}{2}u^{(99)}v''=$$

$$=3^{101}\cos\left(3x+101\frac{\pi}{2}\right)\left(x^2-2x\right)+101\cdot 3^{100}\cos\left(3x+100\frac{\pi}{2}\right)(2x-2)+$$

$$+5050\cdot 2\cdot 3^{99}\cos\left(3x+99\frac{\pi}{2}\right)=3^{99}\Big[9\left(x^2-2x\right)(-\sin 3x)+303(2x-2)\cos 3x+$$

$$+10100\cdot 3^{99}\sin 3x\Big];$$

$$y^{(101)}(1)=3^{99}(9\sin 3+10100\sin 3)=10109\cdot 3^{99}\sin 3.$$

3. Кратне диференціювання функцій, заданих неявно.

Нехай треба знайти другу похідну y'' функції $y=y(x)$, заданої неявно рівнянням $F(x,\, y)=0$.

Для знаходження y'' через x і y складаємо систему:

$$F(x,y)=0,\ \frac{d}{dx}F(x,y)=F_1(x,y,y')=0,\ \frac{d}{dx}F_1(x,y,y')=F_2(x,y,y',y'')=0,$$

або інакше: вихідне рівняння двічі диференціюємо за змінною x і з одержаної системи знаходимо y'' через x і y.

Аналогічно знаходяться похідні більш високого порядку.

Для функцій $y=y(x)$, заданих неявно, знайти y'' (2.2.138, 2.2.139).

Приклад 2.2.138. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (1).

Розв'язання. Послідовним диференціюванням одержимо:

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0\Rightarrow y'=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}\ \ (2),$$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{yy''}{b^2}=0\Rightarrow y''=-\frac{a^2y'^2+b^2}{a^2y}\ \ (3).$$

Підставимо (2) в (3):

$$y''=-\frac{a^2\frac{b^4}{a^4}\frac{x^2}{y^2}+b^2}{a^2y}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{b^2x^2+a^2y^2}{a^2y^3}=-\frac{b^4}{a^2}\frac{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}{y^3}=-\frac{b^4}{a^2}\frac{1}{y^3}.$$

Приклад 2.2.139. $e^{x-y}=x+y$ (1).

Розв'язання. Диференціюємо рівняння (1): $e^{x-y}(1-y')=1+y'$. Враховуючи рівняння (1), одержимо

$$(x+y)(1-y')=1+y'\ \ (2)\Rightarrow y'=\frac{x+y-1}{x+y+1}\ \ (3).$$

Диференціюємо рівняння (2):

$$(1+y')(1-y')+(x+y)(-y'')=y''\Rightarrow y''=\frac{1-y'^2}{x+y+1}\ \ (4).$$

Підставимо (3) в (4):

$$y''=\frac{1-\left(\frac{x+y-1}{x+y+1}\right)^2}{x+y+1}=\frac{(x+y+1-x-y+1)(x+y+1+x+y-1)}{(x+y+1)^3}=\frac{4(x+y)}{(x+y+1)^3}.$$

4. Кратне диференціювання функцій, заданих параметрично.

Нехай треба знайти другу похідну $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ функції $y=f(x)$, заданої параметрично рівняннями $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t). \end{cases}$

Знаходимо першу похідну: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{\psi'_t}{\varphi'_t}=\psi_1(t)$ (1).

Рівність (1) визначає першу похідну $\dfrac{dy}{dx}$ функції $y=f(x)$ через параметр t. Додавши сюди рівняння $x=\varphi(t)$, одержимо систему $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ \dfrac{dy}{dx}=\psi_1(t), \end{cases}$ що визначає функцію $\dfrac{dy}{dx}=f'(x)$ як функцію аргументу x, задану параметрично.

Знаходимо похідну від $\dfrac{dy}{dx}$, тобто другу похідну $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ функції $y=f(x)$:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)'_t}{x'_t}=\frac{\psi'_{1t}}{\varphi'_t}=\psi_2(t).$$

Дописавши сюди рівняння $x=\varphi(x)$, одержимо параметричні рівняння для другої похідної $\dfrac{d^2y}{dx^2}=f''(x)$: $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ \dfrac{d^2y}{dx^2}=\psi_2(t). \end{cases}$

Аналогічно знаходять похідні більш високого порядку.

Для функцій, заданих параметрично, знайти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ *(2.2.140, 2.2.141).*

Приклад 2.2.140. $x=\dfrac{e^t}{1+t}$, $y=(t-1)e^t$.

Розв'язання.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{e^t+(t-1)e^t}{\dfrac{e^t(1+t)-e^t}{(1+t)^2}}=(1+t)^2;\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)'_t}{x'_t}=\frac{2(1+t)}{\dfrac{te^t}{(1+t)^2}}=2\frac{(1+t)^3}{te^t}.$$

Приклад 2.2.141. $x=\dfrac{1}{\cos t}$, $y=\operatorname{tg} t-t$.

Розв'язання.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{\dfrac{1}{\cos^2 t}-1}{\dfrac{\sin t}{\cos^2 t}}=\frac{1-\cos^2 t}{\sin t}=\frac{\sin^2 t}{\sin t}=\sin t;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_t'}{x_t'}=\frac{\cos t}{\dfrac{\sin t}{\cos^2 t}}=\frac{\cos^3 t}{\sin t}.$$

Приклад 2.2.142. Для функції, заданої параметрично рівняннями $\begin{cases} x=a\,\mathrm{ch}\,t, \\ y=a\,\mathrm{sh}\,t, \end{cases}$ знайти $\dfrac{d^3y}{dx^3}$.

Розв'язання.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{a\,\mathrm{ch}\,t}{a\,\mathrm{sh}\,t}=\mathrm{cth}\,t;\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_t'}{x_t'}=\frac{-\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 t}}{a\,\mathrm{sh}\,t}=-\frac{1}{a\,\mathrm{sh}^3 t};$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)_t'}{x_t'}=\frac{\dfrac{3\,\mathrm{ch}\,t}{a\,\mathrm{sh}^4 t}}{a\,\mathrm{sh}\,t}=\frac{3}{a^2}\frac{\mathrm{ch}\,t}{\mathrm{sh}^5 t}.$$

Приклад 2.2.143. Для функції, заданої рівняннями $x=\dfrac{2t-t^2}{t-1}$, $y=\dfrac{t^2}{t-1}$, знайти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ в точці $(0;4)$.

Розв'язання. Знайдемо, якому значенню параметра t відповідає точка

$$(0;4):\ \begin{cases} \dfrac{2t-t^2}{t-1}=0, \\ \dfrac{t^2}{t-1}=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t\in\{0,2\}, \\ t\in\{2\} \end{cases} \Rightarrow t=2.$$

Тоді

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{\dfrac{2t(t-1)-t^2}{(t-1)^2}}{\dfrac{(2-2t)(t-1)-2t+t^2}{(t-1)^2}}=\frac{t^2-2t}{-t^2+2t-2}=-1+\frac{2}{t^2-2t+2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_t'}{x_t'}=\frac{-\dfrac{2(2t-2)}{(t^2-2t+2)^2}}{\dfrac{-t^2+2t-2}{(t-1)^2}}=4\left(\frac{t-1}{t^2-2t+2}\right)^3,\quad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=2}=4\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{2}.$$

5. Задачі на фізичний зміст другої похідної.

Якщо $s = s(t)$ – закон руху точки по прямій, то $v = v(t) = \dfrac{ds}{dt}$ – її швидкість, а $a = a(t) = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2s}{dt^2}$ – прискорення в момент часу t.

Приклад 2.2.144. Точка рухається за законом $s(t) = 2t^2 + \dfrac{5}{3}t^3$ (s вимірюється в метрах, t – в секундах). Знайти її прискорення через 5 с після початку руху.

Розв'язання. Прискорення точки в момент часу t дорівнює $a(t) = \dfrac{d^2s}{dt^2} = 4 + 10t$, а при $t = 5$ одержимо $a(5) = 54$ м/с^2.

Приклад 2.2.145. Одна точка рухається за законом $s_1(t) = t^3 + \dfrac{t^2}{2} + t + \dfrac{1}{2}$, друга – за законом $s_2(t) = \dfrac{2}{3}t^3 + 3t^2 - 5t$ (s_1, s_2 вимірюються в метрах, t – в секундах). Знайти прискорення точок у той момент, коли їх швидкості рівні.

Розв'язання. Знайдемо швидкості руху точок:

$$v_1(t) = \frac{ds_1}{dt} = 3t^2 + t + 1,\ v_2(t) = \frac{ds_2}{dt} = 2t^2 + 6t - 5.$$

Прирівнюючи $v_1(t)$ і $v_2(t)$, знайдемо, в який момент швидкості рівні: $3t^2 + t + 1 = 2t^2 + 6t - 5$, $t^2 - 5t + 6 = 0$, $t_1 = 2$, $t_2 = 3$.

Знайдемо прискорення руху точок: $a_1(t) = \dfrac{d^2s_1}{dt^2} = 6t + 1$, $a_2(t) = \dfrac{d^2s_2}{dt^2} = 4t + 6$. Таким чином, при $t = 2$ $a_1(2) = 13$ м/с^2 і $a_2(2) = 14$ м/с^2, при $t = 3$ $a_1(3) = 19$ м/с^2 і $a_2(3) = 18$ м/с^2.

Приклад 2.2.146. Знайти величину сили, що діє на точку масою $m = 0{,}1$, в момент часу $t = 3$, якщо точка рухається за законом $s(t) = t^2 - 4t^4$ (m, s, t задані в одиницях CI).

Розв'язання. Знайдемо прискорення точки в момент часу t: $a = \dfrac{d^2s}{dt^2} = 2 - 48t^2$.

Величина сили, що діє на точку, в момент t дорівнює $F = |ma| = \left|m\left(2 - 48t^2\right)\right|$. При $t = 3$ одержимо $F\big|_{t=3} = \left|m\left(2 - 48t^2\right)\right|\Big|_{t=3} = \left|0{,}1(2 - 48 \cdot 9)\right| = 43$ Н.

6. Диференціали вищих порядків.

Означення 2.2.5. Якщо функція $f(x)$ визначена на множині X і диференційовна на множині X_1, то для неї існує диференціал (назвемо його першим диференціалом): $df(x)=f'(x)\Delta x$.

Перший диференціал є функцією аргументів x і Δx, а якщо вважати приріст Δx сталим, то диференціал стає функцією однієї змінної x. Якщо ця функція диференційовна на множині X_2, то від неї можна взяти диференціал, який називається другим диференціалом функції $f(x)$ і позначається $d^2 f(x)$:

$$d^2 f(x)=d(f'(x)\Delta x)=\Delta x d(f'(x))=\Delta x f''(x)\Delta x=f''(x)\Delta x^2;$$

$$d^2 f(x)=f''(x)\Delta x^2.$$

Таким чином, другий диференціал – це диференціал від першого диференціала:

$$d^2 f(x)=d(df(x)).$$

Продовжуючи диференціювання, одержимо: якщо $(n-1)$-й диференціал $d^{n-1}f(x)$ функції $f(x)$ диференційовний на множині X_n, то його диференціал називається n-м диференціалом функції $f(x)$ (диференціалом n-го порядку функції $f(x)$) і позначається

$$d^n f(x),\ d^n f,\ d^n y.$$

Таким чином, n-й диференціал – це диференціал від $(n-1)$-го диференціала:

$$d^n f=d\left(d^{n-1}f\right).$$

Для n-го диференціала справедливе $d^n f=f^{(n)}(x)\Delta x^n$.

Якщо x – незалежна змінна, то $dx=\Delta x$, тоді

$$df=f'(x)dx,\ d^2 f=f''(x)dx^2,\ ...,\ d^n f=f^{(n)}(x)dx^n.$$

З формули $d^n f=f^{(n)}(x)dx^n$ випливає, що $f^{(n)}(x)=\dfrac{d^n f}{dx^n}$, тобто символ $\dfrac{d^n f}{dx^n}$, застосований для позначення похідної, можна розглядати як відношення диференціалів.

Якщо для функції $f(x)$ на якійсь множині існує похідна $f^{(n)}(x)$, то на цій множині для неї існує диференціал $d^n f(x)$.

Загальні властивості диференціала n-го порядку:

$$d^m\left(d^n f\right)=d^{m+n}f; \tag{2.2.55}$$

$$d^n(u+v)=d^n u+d^n v; \tag{2.2.56}$$

$$d^n(cu)=cd^n u \tag{2.2.57}$$

(u, v – функції, диференційовні n раз; c – стала).

Зауважимо, що диференціали вищих порядків $(n\ge 2)$ не зберігають своєї форми (тобто не мають інваріантності форми), наприклад: для незалежної змінної x $d^2 f=f''(x)dx^2$, а для залежної змінної $x=x(t)$ другий диференціал має вигляд $d^2 f = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x$. Якщо $x = x(t) = at + b$ ($a, b \in R$), то інваріантність форми диференціалів вищого порядку зберігається.

Приклад 2.2.147. Знайти загальний вигляд диференціала третього порядку функції $y = f(x)$ для випадків: 1) x – незалежна змінна; 2) $x = x(t)$ – функція аргументу t (вважається, що $x(t)$ – тричі диференційовна функція).

Розв'язання.

1. $d^3y = f'''(x)dx^3$ (1).

2. Оскільки перший диференціал зберігає свою форму, то $dy = f'(x)dx$. Далі знаходимо:

$$d^2(y) = d(dy) = d\left(f'(x)dx\right) = d\left(f'(x)\right)dx + f'(x)d(dx) = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x;$$

$$d^3y = d\left(d^2y\right) = d\left(f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x\right) = d\left(f''(x)dx^2\right) + d\left(f'(x)d^2x\right) =$$
$$= d\left(f''(x)\right)dx^2 + f''(x)d\left(dx^2\right) + d\left(f'(x)\right)d^2x + f'(x)d\left(d^2x\right) =$$
$$= f'''(x)dx^3 + 2f''(x)dxd^2x + f''(x)dxd^2x + f'(x)d^3x =$$
$$= f'''(x)dx^3 + 3f''(x)dxd^2x + f'(x)d^3x.$$

Якщо x – незалежна змінна, то $dx = \Delta x$ – величина стала, і тому $d^2x = d^3x = 0$, тобто знову одержимо формулу (1).

Приклад 2.2.148. Знайти другий диференціал функції $y = \left(x^2 + x + 1\right)e^{-x}$.

Розв'язання. Оскільки $d^2y = y''dx^2$, то задача зводиться до знаходження y'':

$$y' = (2x+1)e^{-x} - \left(x^2 + x + 1\right)e^{-x} = \left(-x^2 + x\right)e^{-x};$$
$$y'' = (-2x+1)e^{-x} - \left(-x^2 + x\right)e^{-x} = \left(x^2 - 3x + 1\right)e^{-x};$$
$$d^2y = \left(x^2 - 3x + 1\right)e^{-x}dx^2.$$

Приклад 2.2.149. Знайти другий диференціал функції $y = x\sqrt[3]{(x-5)^2}$ в точці $x = -3$.

Розв'язання. Оскільки $d^2y\Big|_{x=-3} = y''(-3)dx^2$, то задача зводиться до знаходження другої похідної y'' функції в точці $x = -3$:

$$\ln y = \ln x + \frac{2}{3}\ln(x-5); \quad \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \frac{2}{3}\frac{1}{x-5} = \frac{5x-15}{3x(x-5)} = \frac{5}{3}\frac{x-3}{x(x-5)};$$

$$y' = \frac{5}{3}x\sqrt[3]{(x-5)^2}\,\frac{x-3}{x(x-5)} = \frac{5}{3}\frac{x-3}{\sqrt[3]{x-5}}; \quad \ln y' = \ln\frac{5}{3} + \ln(x-3) - \frac{1}{3}\ln(x-5);$$

$$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{3}\frac{1}{x-5} = \frac{2x-12}{3(x-3)(x-5)} = \frac{2}{3}\frac{x-6}{(x-3)(x-5)};$$

$$y'' = \frac{5}{3}\frac{2}{3}\frac{x-3}{\sqrt[3]{x-5}}\frac{x-6}{(x-3)(x-5)} = \frac{10}{9}\frac{x-6}{\sqrt[3]{(x-5)^4}};$$

$$d^2y\Big|_{x=-3} = \frac{10}{9}\frac{x-6}{\sqrt[3]{(x-5)^4}}\Bigg|_{x=-3} dx^2 = \frac{10}{9}\frac{-9}{2^4}dx^2 = -\frac{5}{8}dx^2.$$

Приклад 2.2.150. Знайти диференціал восьмого порядку функції $y = \left(2x^2+1\right)\mathrm{sh}^2 x$ в точці $x = 0$.

Розв'язання. Оскільки $d^8 y\Big|_{x=0} = y^{(8)}(0)dx^8$, то треба знайти $y^{(8)}(x)$ у точці $x = 0$. Знайдемо $y = \mathrm{sh}^2 x\left(2x^2+1\right)$, позначимо $u = \mathrm{sh}^2 x$, $v = 2x^2+1$, тоді $y^{(8)} = u^{(8)}v + 8u^{(7)}v' + \frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}u^{(6)}v''$. Оскільки $v''' = v^{(4)} = \ldots = 0$, то решта доданків дорівнює нулю, і їх не пишемо.

Тепер знаходимо похідні множника u:

$$u' = 2\mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}\, x = \mathrm{sh}\, 2x,\ u'' = 2\mathrm{ch}\, 2x,\ u''' = 4\mathrm{sh}\, 2x,\ \ldots,$$

$$u^{(6)} = 2^5 \mathrm{ch}\, 2x,\ u^{(7)} = 2^6 \mathrm{sh}\, 2x,\ u^{(8)} = 2^7 \mathrm{ch}\, 2x;$$

$$v = 2x^2+1,\ v' = 4x,\ v'' = 4;$$

$$y^{(8)} = 2^7 \mathrm{ch}\, 2x\left(2x^2+1\right) + 8\cdot 2^6 \mathrm{sh}\, 2x \cdot 4x + 28\cdot 2^5 \mathrm{ch}\, 2x\cdot 4 =$$

$$= 2^7\left(\left(2x^2+1\right)\mathrm{ch}\, 2x + 16x\, \mathrm{sh}\, 2x + 28\mathrm{ch}\, 2x\right).$$

В результаті одержуємо

$$y^{(8)}\Big|_{x=0} = 2^7\cdot(1+28) = 29\cdot 2^7,\ d^8 y\Big|_{x=0} = 29\cdot 2^7 dx^8.$$

Приклад 2.2.151. Для функції $y = \sin z$, де $z = e^x$ і $x = t^2$, виразити $d^2 y$ через: а) z і dz; б) x і dx; в) t і dt.

Розв'язання. Відповідно до умови маємо:

а) $dy = \cos z dz$, $d^2 y = d(\cos z dz) = -\sin z dz^2 + \cos z d^2 z$ (1);

б) $dz = e^x dx$, $d^2 z = d\left(e^x dx\right) = e^x dx^2 + e^x d^2 x$; вирази для z, dz і $d^2 z$ підставимо в (1):

$$d^2 y = -\sin e^x \cdot e^{2x}dx^2 + \cos e^x\left(e^x dx^2 + e^x d^2 x\right) =$$

$$= e^x\left(\cos e^x - e^x \sin e^x\right)dx^2 + e^x \cos e^x d^2 x \ (2);$$

в) $dx = 2tdt$, $d^2 x = 2dt^2$; вирази для x, dx і $d^2 x$ підставимо в (2):

$$d^2 y = e^{t^2}\left(\cos e^{t^2} - e^{t^2}\sin e^{t^2}\right)4t^2 dt^2 + e^{t^2}\cos e^{t^2}\cdot 2dt^2 =$$

$$= e^{t^2}\left[\left(4t^2+2\right)\cos e^{t^2} - 4t^2 e^{t^2}\sin e^{t^2}\right]dt^2 \ (3).$$

Формула (1) дає вираз dy через z і dz, (2) – x і dx, (3) – t і dt.

Приклад 2.2.152. Знайти $d^2 y$ функції $y = \sqrt{u^2+v^2}$, вважаючи відомими du, $d^2 u$, dv, $d^2 v$.

Розв'язання.

$$dy = d\sqrt{u^2+v^2} = \frac{1}{2\sqrt{u^2+v^2}}\,d\left(u^2+v^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{u^2+v^2}}(2udu+2vdv) = \frac{udu+vdv}{\sqrt{u^2+v^2}};$$

$$d^2y = d\left(\frac{udu+vdv}{\sqrt{u^2+v^2}}\right) =$$

$$= \frac{\left(du^2+ud^2u+dv^2+vd^2v\right)\sqrt{u^2+v^2}-(udu+vdv)\dfrac{udu+vdv}{\sqrt{u^2+v^2}}}{u^2+v^2} =$$

$$= \frac{\left(du^2+ud^2u+dv^2+vd^2v\right)\left(u^2+v^2\right)-(udu+vdv)^2}{\sqrt{\left(u^2+v^2\right)^3}} =$$

$$= \frac{v^2du^2+u^2dv^2-2uv\,du\,dv+\left(u^2+v^2\right)\left(ud^2u+vd^2v\right)}{\sqrt{\left(u^2+v^2\right)^3}} =$$

$$= \frac{(vdu-udv)^2+\left(u^2+v^2\right)\left(ud^2u+vd^2v\right)}{\sqrt{\left(u^2+v^2\right)^3}}.$$

Приклад 2.2.153. У точці $(1;1)$ знайти диференціал d^2y функції $y=y(x)$, заданої неявно рівнянням $x^2+2xy+y^2-4x+2y-2=0$ (1).

Розв'язання. Беремо диференціал від обох частин рівняння (1): $2xdx+2ydx+2xdy+2ydy-4dx+2dy=0$; $(x+y-2)dx+(x+y+1)dy=0$ (2). Підставимо в (2) значення $x=1$ і $y=1$: $4dy=0 \Rightarrow dy=0$ (3).

Вираз (3) дає значення першого диференціала dy функції $y=y(x)$ в точці $(1;1)$.

Беремо диференціал від обох частин рівняння (2), маючи на увазі, що dx – стала величина для незалежної змінної x: $(dx+dy)dx+$ $+(dx+dy)dy+(x+y+1)d^2y=0$, $(dx+dy)^2+(x+y+1)d^2y=0$ (4). Підставимо в (4) значення $x=1$, $y=1$ і $dy=0$: $dx^2+3d^2y=0$, $d^2y=-\frac{1}{3}dx^2$.

Приклад 2.2.154. У точці $(0;4)$ знайти диференціал d^2y функції $y=f(x)$, заданої параметрично рівняннями $\begin{cases} x=t^3+3t-4, \\ y=t^3+2t^2+t. \end{cases}$

Розв'язання. Знайдемо, якому значенню параметра t відповідає точка $(0;4)$:

$$\begin{cases} t^3+3t-4=0, \\ t^3+2t^2+t=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^3+3t-4=0 & (1), \\ t^3+2t^2+t-4=0 & (2). \end{cases}$$

Розв'яжемо (1): $t_1=1$, $\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 3 & -4 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 4 & \boxed{0} \end{array}$, $t^2+t+4=0$, $D<0$, $t\in\varnothing$.

Розв'яжемо (2): $t_1=1$, $\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 1 & -4 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 4 & \boxed{0} \end{array}$, $t^2+3t+4=0$, $D<0$, $t\in\varnothing$.

Таким чином, $t_1=1$ – спільний корінь рівнянь (1) і (2), а точці $(0;\,4)$ відповідає параметр $t=1$.

Вираз для d^2y: $d^2y=f''(x)dx^2$.

Задача зводиться до знаходження другої похідної $f''(x)$ функції $y=f(x)$, заданої параметрично:

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{3t^2+4t+1}{3t^2+3}=\frac{1}{3}\frac{3t^2+4t+1}{t^2+1};$$

$$f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(f'(x)\right)'_t}{x'_t}=\frac{1}{3}\frac{(6t+4)\left(t^2+1\right)-2t\left(3t^2+4t+1\right)}{3\left(t^2+1\right)\left(t^2+1\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{9}\frac{-4t^2+4}{\left(t^2+1\right)^3}=-\frac{4}{9}\frac{t^2-1}{\left(t^2+1\right)^3};\ f''(x)\Big|_{t=1}=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{18};$$

$$d^2y\Big|_{(0;\,4)}=f''(x)\Big|_{t=1}dx^2=\frac{1}{18}dx^2.$$

2.2.6. Формула Тейлора і її застосування

1. Різні вигляди формули Тейлора і її залишкового члена.

Якщо функція $f(x)$ диференційовна $n+1$ раз в околі точки $x=a$, то вона може бути подана у вигляді:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x). \quad (2.2.58)$$

Формула (2.2.58) називається формулою Тейлора n-го порядку для функції $f(x)$. Кажуть також, що функція подана формулою Тейлора (розвинена за формулою Тейлора) в околі точки $x=a$ (за степенями $x-a$).

Багаточлен

$$P_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (2.2.59)$$

називається багаточленом Тейлора.

Доданок $R_n(x)$ називається залишковим членом формули Тейлора.

Якщо записати наближену рівність $f(x)\approx P_n(x)$, то $R_n(x)$ являє собою похибку від заміни функції її багаточленом Тейлора.

Точна рівність має вигляд $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$.

Різні вигляди залишкового члена:

– у формі Лагранжа

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (a<c<x,\ a>c>x), \tag{2.2.60}$$

або

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(a+\Theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (0<\Theta<1); \tag{2.2.61}$$

– у формі Коші

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(a+\Theta(x-a))}{n!}(1-\Theta)^n(x-a)^{n+1} \quad (0<\Theta<1); \tag{2.2.62}$$

– у формі Пеано

$$R_n(x)=o\left((x-a)^n\right). \tag{2.2.63}$$

Прийнявши у формулі (2.2.58) $a=0$, одержимо

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x). \tag{2.2.64}$$

Функція $f(x)$ розвинена за формулою Тейлора в околі точки $x=0$ (за степенями x).

Формулу (2.2.64) ще називають формулою Маклорена.

Залишковий член формули Маклорена має вигляд:

– у формі Лагранжа

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0<c<x,\ \ 0>c>x), \tag{2.2.65}$$

або

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0<\Theta<1); \tag{2.2.66}$$

– у формі Коші

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{n!}(1-\Theta)^n x^{n+1} \quad (0<\Theta<1); \tag{2.2.67}$$

– у формі Пеано

$$R_n(x)=0\left(x^n\right). \tag{2.2.68}$$

Замінивши у формулі (2.2.58) a на x, а x на $x+\Delta x$, одержимо

$$f(x+\Delta x)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}\Delta x+\frac{f''(x)}{2!}\Delta x^2+\ldots+\frac{f^n(x)}{n!}\Delta x^k+R_n(\Delta x). \tag{2.2.69}$$

Враховуючи, що $f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta f$, а $f^{(k)}(x)\Delta x^k=d^k f \quad \left(k=\overline{1,n}\right)$, дістанемо

$$\Delta f=\frac{df}{1!}+\frac{d^2 f}{2!}+\ldots+\frac{d^n f}{n!}+R_n. \tag{2.2.70}$$

Остання формула зручна тим, що вона має такий же вигляд для функцій багатьох змінних.

2. Формули Тейлора для деяких елементарних функцій.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x), \qquad (2.2.71)$$

де $R_n(x) = \dfrac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}$;

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x), \qquad (2.2.72)$$

де $R_{2n}(x) = (-1)^n \cos c \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$;

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x), \qquad (2.2.73)$$

де $R_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} \cos c \dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$;

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + R_n(x), \qquad (2.2.74)$$

де $R_n(x) = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!} (1+c)^{\alpha-n-1} x^{n+1}$;

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(x), \qquad (2.2.75)$$

де $R_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}$;

$$\operatorname{acrtg} x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + R_{2n}(x), \qquad (2.2.76)$$

де $R_{2n}(x) = o\left(x^{2n}\right)$ і $|R_{2n}(x)| < \left|\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\right|$, якщо $|x| < 1$;

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right); \qquad (2.2.77)$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o\left(x^{2n}\right). \qquad (2.2.78)$$

Із формули (2.2.74) випливають такі формули:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + R_n(x), \qquad (2.2.79)$$

де $R_n(x) = (-1)^{n+1} (1+c)^{-n-2} x^{n+1}$;

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + R_n(x), \qquad (2.2.80)$$

де $R_n(x) = (1-c)^{-n-2} x^{n+1}$.

В усіх формулах $0 < c < x$ $(0 > c > x)$.

3. Задачі на розвинення функцій за формулою Тейлора.

Деякі загальні прийоми:

1. Якщо $f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-a)^k+o\left((x-a)^n\right)$ і $\varphi(x)=\sum_{k=0}^{n}b_k(x-a)^k+o\left((x-a)^n\right)$,

то

$$f(x)+\varphi(x)=\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)(x-a)^k+o\left((x-a)^n\right) \tag{2.2.81}$$

і

$$f(x)\varphi(x)=\sum_{k=0}^{n}c_k(x-a)^k+o\left((x-a)^n\right), \tag{2.2.82}$$

де $c_k=\sum_{l=0}^{k}a_lb_{k-l}$.

2. Якщо $F(x)=f(\varphi(x))$ – складена функція і $f(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kz_k+o(z^n)$, $\varphi(x)=\sum_{k=0}^{n}b_kx^k+o(x^n)$, то для знаходження коефіцієнтів $c_k\left(k=\overline{0,n}\right)$ розкладу $F(x)=f(\varphi(x))=\sum_{k=0}^{n}c_kx^k+o(x^n)$ треба в рівність для $f(z)$ замість z підставити розклад функції $\varphi(x)$, виконати відповідні арифметичні операції, зберігаючи при цьому тільки члени вигляду $\alpha_{kl}x^k$ $\left(k=\overline{0,n},\ l=1,2,\ldots\right)$.

Зокрема, якщо $f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k+o(x^n)$, то

$$f(bx)=\sum_{k=0}^{n}a_kb^kx^k+o(x^n) \tag{2.2.83}$$

і

$$f(bx^m)=\sum_{k=0}^{n}a_kb^kx^{mk}+o(x^{mn}). \tag{2.2.84}$$

3. Якщо відомий розклад похідної $f'(x)$ функції $f(x)$

$$f'(x)=\sum_{k=0}^{n}b_k(x-a)^k+o\left((x-x_0)^n\right),$$

де $b_k=\dfrac{f^{(k+1)}(a)}{k!}$ $\left(k=\overline{0,n}\right)$, то розклад самої функції $f(x)$ має вигляд

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=0}^{n}a_{k+1}(x-a)^{k+1}+o\left((x-a)^{n+1}\right), \tag{2.2.85}$$

де $a_{k+1}=\dfrac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}=\dfrac{f^{(k+1)}(a)}{k!}\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{b_k}{k+1}$ $\left(k=\overline{0,n}\right)$.

4. Якщо $f_1(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-a)^k+o\left((x-a)^n\right)$, $f_2(x)=\sum_{k=0}^{n}b_k(x-a)^k+$ $+o\left((x-a)^n\right)$ і $f(x)=\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$, $f_2(a)\neq 0$, то для знаходження коефіцієнтів

$c_k\left(k=\overline{0,n}\right)$ розкладу функції $f(x)$ $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}c_k(x-a)^k+o\left((x-a)^n\right)$ записують рівність $f(x)f_2(x)=f_1(x)$, підставляють замість $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ їх розклади.

Прирівнявши коефіцієнти при $x^k\left(k=\overline{0,n}\right)$ зліва і справа, одержують систему рівнянь для знаходженні $c_k\left(k=\overline{0,n}\right)$. Іншими словами, в цьому випадку застосовують метод невизначених коефіцієнтів.

При розвиненні функції треба мати на увазі, що непарна функція $f(x)$ розвивається за формулою Тейлора за непарними степенями x, а парна функція $\varphi(x)$ – за парними, тобто їх розклади відповідно мають вигляд

$$f(x)=a_1x+a_2x^3+\ldots+a_nx^{2n-1}+o\left(x^{2n}\right),$$
$$\varphi(x)=b_0+b_1x^2+b_2x^4+\ldots+b_nx^{2n}+o\left(x^{2n+1}\right).$$

Розвинути функції за формулою Тейлора до $o\left(x^n\right)$ (2.2.155 – 2.2.158).

Приклад 2.2.155. $y=e^{5x-1}$.

Розв'язання. Подамо функцію у вигляді $y=\frac{1}{e}e^{5x}$. Застосуємо формули (2.2.71) і (2.2.83):

$$y=\frac{1}{e}\left(1+\frac{5x}{1!}+\frac{(5x)^2}{2!}+\ldots+\frac{(5x)^n}{n!}\right)+o\left(x^n\right)=\frac{1}{e}+\frac{5}{e\cdot 1!}x+\frac{5^2}{e\cdot 2!}x^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{5^n}{en!}x^n+o\left(x^n\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{5^k}{ek!}x^k+o\left(x^n\right).$$

Приклад 2.2.156. $y=\frac{1}{\sqrt{1+4x}}$.

Розв'язання. Подамо функцію у вигляді $y=(1+4x)^{-\frac{1}{2}}$. Застосуємо формули (2.2.74) і (2.2.83):

$$y=1+\frac{-\frac{1}{2}}{1!}4x+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}(4x)^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}(4x)^3+\ldots+$$
$$+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(4x)^n+o(x^n)=1-\frac{2}{1!}x+\frac{1\cdot 3\cdot 2^2}{2!}x^2-$$
$$-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 2^3}{3!}x^3+\ldots+(-1)^n\frac{(2n-1)!!\cdot 2^n}{n!}x^n+o\left(x^n\right)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k2^k\frac{(2k-1)!!}{k!}+o\left(x^n\right).$$

Приклад 2.2.157. $y=\ln\left(2+x-x^2\right)$.

Розв'язання. Подамо функцію у вигляді

$$y=\ln\left[(2-x)(1+x)\right]=\ln(2-x)+\ln(1+x)=$$

$$=\ln(1+x)+\ln 2\left(1-\frac{x}{2}\right)=\ln(1+x)+\ln 2+\ln\left(1-\frac{x}{2}\right).$$

Застосуємо формули (2.2.75), (2.2.83), (2.2.82):

$$y=\ln 2+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right)+\left(-\frac{x}{2}\right)-$$

$$-\frac{\left(-\frac{x}{2}\right)^2}{2}+\frac{\left(-\frac{x}{2}\right)^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{\left(-\frac{x}{2}\right)^n}{n}+o\left(x^n\right)=\ln 2+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}-$$

$$-\frac{x}{1\cdot 2}-\frac{x^2}{2\cdot 2^2}-\frac{x^3}{3\cdot 2^3}-\ldots-\frac{x^n}{n\cdot 2^n}+o\left(x^n\right)=\ln 2+\left(1-\frac{1}{1\cdot 2}\right)x+\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 2^2}\right)x^2+$$

$$+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 2^3}\right)x^3+\ldots+\left((-1)^{n-1}\frac{1}{n}-\frac{1}{n\cdot 2^n}\right)x^n+o\left(x^n\right)=\ln 2+\frac{2-1}{2}x+\frac{1}{2}\frac{-2^2-1}{2^2}x^2+$$

$$+\frac{1}{3}\frac{2^3-1}{2^3}x^3+\ldots+\frac{1}{n}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2^n-1}{2^n}x^n+o\left(x^n\right)=\ln 2+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\cdot 2^k-1}{k\cdot 2^k}x^k+o\left(x^n\right).$$

Зауваження. В останньому виразі для y після першого знака "=" є два доданки $o\left(x^n\right)$. Їх не треба додавати в звичайному розумінні, тобто писати $2o\left(x^n\right)$. Треба розуміти: якщо доданки – дві нескінченно малі величини вищого порядку малості відносно x^n, то одержимо нескінченно малу величину вищого порядку малості відносно x^n. Таким чином, результат – $o\left(x^n\right)$.

Приклад 2.2.158. $y=\dfrac{3x^2+5x-5}{x^2+x-2}$.

Розв'язання. Виділимо цілу частину дробу:

$$\begin{array}{r|l} 3x^2+5x-5 & x^2+x-2 \\ \cline{2-2} -\;3x^2+3x-6 & 3 \\ \cline{1-1} 2x+1 & \end{array}\quad , \; y=3+\frac{2x+1}{x^2+x-2}.$$

Дріб $\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$ розкладемо на елементарні дроби:

$$\frac{2x+1}{x^2+x-2}=\frac{2x+1}{(x+2)(x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1},\; 2x+1=A(x-1)+B(x+)2,$$

$$\begin{array}{l|l} x=-2 & -3=-3A,\;\; A=1, \\ x=1 & \;\;3=3B,\;\;\;\; B=1, \end{array}\quad y=3+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-1}=3+\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x}{2}}-\frac{1}{1-x}.$$

Далі застосуємо формули (2.2.79), (2.2.80), (2.2.83) і (2.2.81):

$$y=3+\frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2-\ldots+(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^n\right)+o\left(x^n\right)-1-x-x^2-\ldots-x^n+\left(x^n\right)=$$

$$=\frac{5}{2}+\left(-1-\frac{1}{2^2}\right)x+\left(-1+\frac{1}{2^3}\right)x^2+\ldots+\left(-1+(-1)^n\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n+o\left(x^n\right)=$$

$$=\frac{5}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(-1+\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}\right)x^k+o(x^n)=\frac{5}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left[(-1)^k 2^{-(k+1)}-1\right]x^k+o(x^n).$$

Розвинути функції за формулою Тейлора до $o(x^{2n})$ *(2.2.159, 2.2.160).*

Приклад 2.2.159. $y=\sin^3 x$.

Розв'язання. Використаємо формулу $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$, звідки

$$\sin^3 x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x.$$

Таким чином, $y=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x$.

Застосуємо формули (2.2.72), (2.2.83) і (2.2.81):

$$y=\frac{3}{4}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right)+$$

$$+o(x^{2n})-\frac{1}{4}\left(3x-\frac{(3x)^3}{3!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(3x)^{2n-1}}{(2n-1)!}\right)+o(x^{2n})=$$

$$=\frac{3}{4}\frac{1}{3!}(3^2-1)x^3-\frac{3}{4}\frac{1}{5!}(3^4-1)x^5+\ldots+(-1)^n\frac{3}{4}\frac{1}{(2n-1)\,!}(3^{2n-2}-1)x^{2n-1}+o(x^{2n})=$$

$$=\sum_{k=2}^{n}\frac{3}{4}\frac{(-1)^k(3^{2k-2}-1)}{(2k-1)\,!}x^{2k-1}+o(x^{2n}).$$

Приклад 2.2.160. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

Розв'язання. Знайдемо похідну даної функції і розвинемо її за формулою Тейлора до $o(x^{2n})$:

$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=|\text{див. формули (2.2.74), (2.2.84)}|=1+\frac{-\frac{1}{2}}{1!}x^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}x^4+$$

$$+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}x^6+\ldots+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!}x^{2n}+o(x^{2n+1})=$$

$$=1-\frac{1}{2\cdot 1!}x^2+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^4-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^6+\ldots+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}x^{2n}+o(x^{2n+1}).$$

Знайдемо $y(0)$ і використаємо формулу (2.2.85) зв'язку коефіцієнтів функції і її похідної:

$$y(0)=0,$$

$$y(x)=x-\frac{1}{3\cdot 2\cdot 1!}x^3+\frac{1\cdot 3}{5\cdot 2^2\cdot 2!}x^5-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{7\cdot 2^3\cdot 3!}x^7+$$

$$+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n-1)\cdot 2^{n-1}(n-1)!}x^{2n-1}+o\left(x^{2n}\right)=$$

$$=x+\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{(2k-1)\cdot 2^{k-1}(k-1)!}x^{2k-1}+o\left(x^{2n}\right).$$

Розвинути функції за формулою Тейлора до $o\left(x^{2n+1}\right)$ *(2.2.161, 2.2.162).*

Приклад 2.2.161. $y=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}3x$.

Розв'язання. Подамо функцію у вигляді (див. п. 3 підрозд. 2.1.2):

$$y=\frac{1}{2}\operatorname{ch}2x+\frac{1}{2}\operatorname{ch}4x.$$

Одержимо спочатку формулу Тейлора до $o\left(x^{2n+1}\right)$ для функції $\operatorname{ch}x$:

$$\operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)=\left|\text{див. формулу (2.2.77)}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right)+1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right)\right)=$$

$$=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)\ !}+o\left(x^{2n+1}\right).$$

Таким чином, $\operatorname{ch}x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)\ !}+o\left(x^{2n+1}\right)$.

Продовжимо розвинення:

$$y=\frac{1}{2}\operatorname{ch}2x+\frac{1}{2}\operatorname{ch}4x=\left|\text{див. формулу (2.2.83)}\right|=\frac{1}{2}\left(1+\frac{(2x)^2}{2!}+\right.$$

$$\left.+\ldots+\frac{(2x)^{2n}}{(2n)\ !}+o\left(x^{2n+1}\right)\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{(4x)^2}{2!}+\frac{(4x)^4}{4!}+\ldots+\frac{(4x)^{2n}}{(2n)\ !}+o\left(x^{2n+1}\right)\right)=$$

$$=1+\frac{2\left(2^2+1\right)}{2!}x^2+\frac{2^3\left(2^4+1\right)}{4!}x^4+\ldots+\frac{2^{2n-1}\left(2^{2n}+1\right)}{(2n)\ !}x^{2n}+o\left(x^{2n+1}\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{2k-1}\left(2^{2k}+1\right)}{(2k)\ !}x^{2k}+o\left(x^{2n+1}\right).$$

Приклад 2.2.162. $y=\frac{1}{x^4-8x^2+15}$.

Розв'язання. Перетворимо функцію:

$$y=\frac{1}{\left(x^2-5\right)\left(x^2-3\right)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2-5}-\frac{1}{x^2-3}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\frac{1}{1-\frac{x^2}{5}}+\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x^2}{3}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x^2}{3}}-\frac{1}{5}\frac{1}{1-\frac{x^2}{5}}\right).$$

Застосуємо формули (2.2.80) і (2.2.84):

$$y=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\left(1+\frac{x^2}{3}+\left(\frac{x^2}{3}\right)^2+\ldots\right.\right.$$

$$\left.\left.\ldots+\left(\frac{x^2}{3}\right)^n+o\left(x^{2n+1}\right)\right)-\frac{1}{5}\left(1+\frac{x^2}{5}+\left(\frac{x^2}{5}\right)^2+\ldots+\left(\frac{x^2}{5}\right)^n+o\left(x^{2n+1}\right)\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{3}+\frac{x^2}{3^2}+\frac{x^4}{3^3}+\ldots+\frac{x^{2n}}{3^{n+1}}+o\left(x^{2n+1}\right)\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{x^2}{5^2}+\frac{x^4}{5^3}+\ldots+\frac{x^{2n}}{5^{n+1}}+o\left(x^{2n+1}\right)\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}\right)x^2+\left(\frac{1}{3^3}-\frac{1}{5^3}\right)x^4+\ldots+\left(\frac{1}{3^{n+1}}-\frac{1}{5^{n+1}}\right)x^{2n}+o\left(x^{2n+1}\right)\right]=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{3^{-(k+1)}-5^{-(k+1)}}{2}x^{2k}+o\left(x^{2n+1}\right).$$

Приклад 2.2.163. Знайти $f^{(6)}(0)$, якщо $f(x)=e^{-x^2}$.

Розв'язання. Іноді для знаходження $f^{(k)}(a)$ функції $f(x)$ при великих k її розвивають в ряд Тейлора за степенями $x-a$ до самого степеня $(x-a)^k$. Нехай одержаний коефіцієнт при $(x-a)^k$ буде a_k, тоді справедливе $a_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$, звідки $f^{(k)}(a)=k!a_k$. Якщо степеня $(x-a)^k$ в розкладі немає (а є менші або більші степені), то $f^{(k)}(a)=0$. Маємо (див. формулу (2.2.71)): $e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+o\left(x^7\right)$. Отже, $f^{(6)}(0)=6!\left(-\frac{1}{3!}\right)=-120$.

Приклад 2.2.164. Подати функцію $f(x)=x^3+x^2+x+1$ у вигляді багаточлена за степенями $x+1$.

Розв'язання.

1-й спосіб. Подамо $x=(x+1)-1$, тоді

$$f(x)=((x+1)-1)^3+((x+1)-1)^2+x+1=(x+1)^3-3(x+1)^2+3(x+1)-1+(x+1)^2-$$

$$-2(x+1)+1+x+1=(x+1)^3-2(x+1)^2+2(x+1).$$

Взагалі, щоб розвинути цим способом багаточлен $P_n(x)$ за степенями $x-a$, треба в багаточлен замість x підставити рівну величину $(x-a)+a$, виконати дії, не розкриваючи дужки $(x-a)$, звести подібні.

2-й спосіб. Знайдемо послідовно $f(a)$, $f'(a)$, ..., $f^{(n)}(a)$ та запишемо функцію Тейлора: $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$. В цьому випадку $R_n(x)=0$.

Маємо: $f(x)=x^3+x^2+x+1$, $f(-1)=0$, $f'(x)=3x^2+2x+1$, $f'(-1)=2$, $f''(x)=6x+2$, $f''(-1)=-4$, $f'''(x)=6$, $f'''(-1)=6$. Тепер одержимо

$$f(x)=f(-1)+\frac{f'(-1)}{1!}(x+1)+\frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2+\frac{f'''(-1)}{3!}(x+1)^3=$$
$$=2(x+1)-2(x+1)^2+(x+1)^3.$$

4. Формула Тейлора в наближених обчисленнях.

За допомогою формули Тейлора оцінити абсолютну похибку наближених формул (2.2.165, 2.2.166).

Приклад 2.2.165. $\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}$, $|x|\le\frac{1}{2}$.

Розв'язання. Якщо треба оцінити похибку наближеної формули $f(x)\approx P_n(x)$, де $P_n(x)$ – багаточлен формули Тейлора n-го порядку для функції $f(x)$, то задача зводиться до оцінки залишкового члена формули Тейлора. Таким чином, $\Delta=|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)\ !}x^{n+1}\right|$, де $0<c<x$ $(0>c>x)$. Мається на увазі розклад в околі точки $a=0$ (за степенями x).

За формулою (2.2.73) дану рівність можна записати у вигляді $\cos x\approx P_6(x)$, тому похибка $\Delta=|R_7(x)|=\left|\cos c\frac{x^8}{8!}\right|=\left|\ |\cos c|<1,\ x^8\le\frac{1}{2^8},\text{ якщо } |x|\le\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2^8\cdot 8!}<10^{-7}$.

Приклад 2.2.166. $\ln(1+x)\approx x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}$ (1), $|x|\le 0{,}1$.

Розв'язання. Зауваження див. в прикладі 2.2.165. Із формули (2.2.75) видно, що

$$\Delta=|R_4(x)|=\left|\frac{x^5}{5(1+c)^5}\right|<\frac{10^{-5}}{5\cdot 0{,}9^5}<10^{-5}.$$

Очевидно, що наближена формула в цьому випадку нижчої якості, ніж наближена формула в прикладі 2.2.165.

5. Знаходження границь за допомогою формули Тейлора.

Нехай треба знайти $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, де $f(0)=\varphi(0)=0$. Припустимо, що функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ можна розвинути за формулою Тейлора за степенями x. Обмежимося першими, відмінними від нуля, членами в розкладі цих функцій:

$$f(x)=ax^n+o\left(x^n\right),\ a\ne 0;\ \varphi(x)=bx^m+o\left(x^m\right),\ b=0.$$

Границю запишемо так: $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax^n+o(x^n)}{bx^m+o(x^m)}$. Якщо $n=m$, то $A=\frac{a}{b}$; якщо $n>m$, то $A=0$; якщо $n<m$, то $A=\infty$.

Коли треба знайти границю вигляду $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, де $f(a)=\varphi(a)=0$, то ведуть розвинення функцій $f(x)$ і $\varphi(x)$ за формулою Тейлора в околі точки $x=a$. В цьому випадку можна також за допомогою заміни $y=x-a$ звести границю до вигляду $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f_1(y)}{\varphi_1(y)}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Якщо маємо невизначеності одного із типів $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, то їх треба звести до невизначеності типу $\dfrac{0}{0}$.

Границю вигляду $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$ зводять за допомогою заміни $y=\dfrac{1}{x}$ до границі $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f_1(y)}{\varphi_1(y)}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Формулу Тейлора можна застосувати і до границь вигляду $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{\varphi(x)}=\left(1^{\infty}\right)$.

Знайти границі (2.2.167 – 2.2.169).

Приклад 2.2.167. $A_1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x^3\right)-2\sin x+2x\cos x}{\operatorname{arctg} x^3}$.

Розв'язання. Дана границя – невизначеність типу $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Розвиваючи функцію, яка входить доданком у чисельник шуканої границі, в головних частинах її розкладу за формулою Тейлора треба взяти стільки доданків, щоб сума головних частин не дорівнювала нулю.

Запишемо формули Тейлора для функцій, які входять у чисельник границі, взявши в головних частинах (багаточленах Тейлора) декілька доданків:

$$\ln\left(1+x^3\right)=x^3-\frac{x^6}{2}+\frac{x^9}{3}+o\left(x^9\right),\ -2\sin x=-2x+2\frac{x^3}{3!}-2\frac{x^5}{5!}+o\left(x^6\right),$$

$$2x\cos x=2x-2\frac{x^3}{2!}+2\frac{x^5}{4!}+o\left(x^6\right).$$

Бачимо, що в першій функції достатньо взяти тільки перший доданок, в останніх – по два.

Оскільки функція $\operatorname{arctg} x^3$ знаходиться в знаменнику одна, достатньо взяти один доданок у головній частині: $\operatorname{arctg} x^3=x^3+o\left(x^8\right)$.

Ми користувались формулами (2.2.75), (2.2.72), (2.2.74) і (2.2.76).

Тепер маємо

$$A_1=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+o\left(x^5\right)-2x+2\dfrac{x^3}{3!}+o\left(x^4\right)+2x-2\dfrac{x^3}{2!}+o\left(x^4\right)}{x^3+o\left(x^8\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{3}x^3+o\left(x^4\right)}{x^3+o\left(x^8\right)}=\frac{1}{3}.$$

Приклад 2.2.168. $A_2 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sqrt{1+\sin x} - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) - x^3}{\operatorname{tg}^3 x}$.

Розв'язання. Маємо $A_2 = \left(\frac{0}{0}\right)$. Ведемо розвинення доданків, які входять у чисельник границі (див. приклад 2.2.167):

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^4\right),\ \sqrt{1+z} = 1 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{4}\frac{z^2}{2!} + \frac{3}{8}\frac{z^3}{3!} + o\left(z^3\right);$$

$$x\sqrt{1+\sin x} = x\left(1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3!}\right) - \frac{1}{8}\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^3 + o\left(x^4\right)\right) =$$

$$= x\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + o\left(x^4\right)\right) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{48}x^4 + o\left(x^4\right);$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + o\left(x^5\right).$$

Ураховуючи доданок $\left(-x^3\right)$, бачимо, що в розкладі треба зберегти по два доданки.

Зазначимо також, що $\operatorname{tg}^3 x = \left(x + o\left(x^2\right)\right)^3 = x^3 + o\left(x^3\right)$. Тепер маємо

$$A_2 = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - x^3 + o\left(x^3\right)}{x^3 + o\left(x^3\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{9}{8}x^3 + o\left(x^3\right)}{x^3 + o\left(x^3\right)} = -\frac{9}{8}.$$

Приклад 2.2.169. $A_3 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+3x} - e^{\sin x} + \frac{3}{2}x^2}{\arcsin x - \operatorname{tg} x}$.

Розв'язання. Маємо $A_3 = \left(\frac{0}{0}\right)$. У розкладах будемо зберігати доданки до x^3 включно (якщо головні частини знищаться, то повторимо розвинення, зберігаючи більш високі степені):

$$\sqrt[3]{1+3x} = 1 + \frac{1}{3}(3x) - \frac{2}{9}\frac{(3x)^2}{2!} + \frac{2\cdot 5}{27}\frac{(3x)^3}{3!} + o\left(x^3\right) = 1 + x - x^2 + \frac{5}{3}x^3 + o\left(x^3\right),$$

$$-e^z = -1 - z - \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} - o\left(z^3\right),\ \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^4\right),\ -e^{\sin x} = -1 - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) -$$

$$-\frac{1}{2!}\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^3 + o\left(x^4\right) = -1 - x - \frac{1}{2}x^2 + 0\cdot x^3 + o\left(x^4\right);$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}\frac{x^4}{2!}o\left(x^5\right) \Rightarrow$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{4}\frac{x^5}{5\cdot 2!}o\left(x^6\right), \tag{2.2.86}$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^4\right),\ -\operatorname{tg} x = -x - \frac{1}{3}x^3 + o\left(x^4\right).$$

Тепер будемо мати

$$A_3=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-x^2+\frac{5}{3}x^3-1-x-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x^2+o\left(x^3\right)}{x+\frac{1}{6}x^3-x-\frac{1}{3}x^3+o\left(x^4\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{5}{3}x^3+o\left(x^3\right)}{-\frac{1}{6}x^3+o\left(x^4\right)}=-10.$$

2.2.7. Дослідження функцій за допомогою похідних. Знаходження асимптот функцій

1. Сталість і монотонність функцій.

Теорема 2.2.8 (критерій сталості функції). Для того щоб функція $f(x)$, яка є неперервною на проміжку $<a;b>$ і диференційовною на інтервалі $(a;b)$, була сталою на проміжку $<a;b>$, необхідно і достатньо, щоб $f'(x)=0$ для всіх $x\in(a;b)$.

Про сталість функцій дивись також п. 1 підрозд. 2.2.4.

Теорема 2.2.9 (необхідна умова монотонності диференційовної функції). Якщо функція $f(x)$, яка є неперервною на проміжку $<a;b>$ і диференційовною на інтервалі $(a;b)$, зростає або не спадає (спадає або не зростає) на проміжку $<a;b>$, то $f'(x)\ge 0$ ($f'(x)\le 0$) для всіх $x\in(a;b)$.

Теорема 2.2.10 (необхідна умова монотонності неперервної функції). Якщо функція $f(x)$, яка є неперервною на проміжку $<a;b>$, зростає або не спадає (спадає або не зростає) на проміжку $<a;b>$, то в кожній точці $x\in(a;b)$ $f'(x)\ge 0$ ($f'(x)\le 0$) або не існує.

Коментарі до рис. 2.2.22:
а) $f'(x)>0$; б) $f'(x)\ge 0$; в) $f'(x)\ge 0$ або $f'(x)$ не існує.

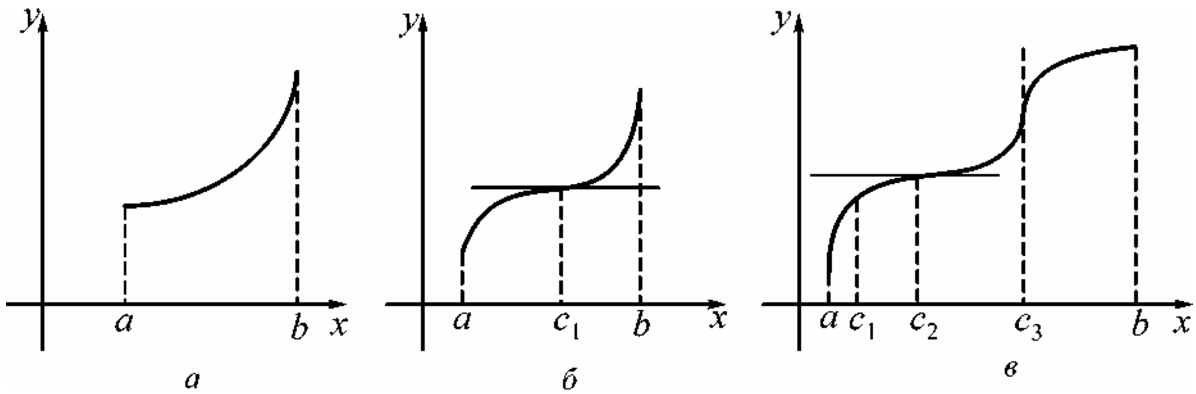


Рис. 2.2.22

Теорема 2.2.11 (достатня умова монотонності функції). Якщо для функції $f(x)$, яка є неперервною на проміжку $<a;b>$ і диференційовною на інтервалі $(a;b)$, похідна $f'(x)\ge 0$ ($f'(x)\le 0$) для всіх $x\in(a;b)$, то $f(x)$ зростає або не спадає (спадає або не зростає) на проміжку $<a;b>$.

Теорема 2.2.12 (достатня умова строгої монотонності функції). Якщо для функції $f(x)$, яка є неперервною на проміжку $<a;b>$ і диференційовною на інтервалі $(a;b)$, похідна $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) для всіх $x\in(a;b)$, то

$f(x)$ зростає (спадає) на проміжку $< a; b >$.

Означення 2.2.6. Якщо функція $f(x)$ неперервна і диференційовна в околі точки x_0, крім, може бути, самої точки x_0, похідна $f'(x)$ в точці x_0 дорівнює нулю або не існує, то x_0 – критична точка (1-го роду) для функції $f(x)$. Якщо в точці x_0 похідна $f(x)$ дорівнює нулю, то x_0 – стаціонарна точка для функції $f(x)$.

План дослідження функцій $f(x)$ на монотонність:

1. Знаходимо область визначення $D(f)$. При цьому автоматично знаходяться точки розриву $f(x)$.

2. Знаходимо критичні точки 1-го роду для функції $f(x)$.

3. Інформацію пп. 1 і 2 наносимо на числову вісь Ox. Область визначення $f(x)$ в результаті буде розбита на інтервали, в кожному із яких похідна $f'(x)$ зберігає свій знак.

Знаходимо знак похідної $f'(x)$ на кожному проміжку розбиття.

4. Робимо відповідні висновки стосовно характеру монотонності функції на кожному проміжку.

Дослідити функції на монотонність (2.2.170 – 2.2.172).

Приклад 2.2.170. $y = \dfrac{x}{\ln x}$.

Розв'язання. Виконаємо детально з поясненнями всі пункти наведеного плану дослідження:

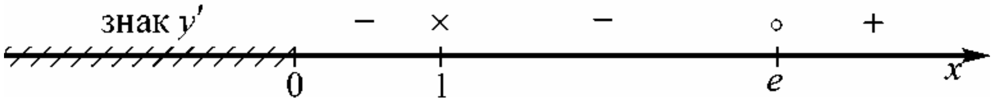
1. Область визначення $D(f)$: $x > 0$, $x \neq 1 \Rightarrow x_1 = 1$ – точка розриву.

2. Знайдемо похідну і критичні точки 1-го роду:

$$y' = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x};\ y' = 0:\ x_1 = e;\ y' \text{ не існує (точки розриву } f'(x)):\ x_2 = 1.$$

Висновок: $x_1 = e$, $x_2 = 1$ – критичні точки 1-го роду.

3. Наносимо інформацію пп. 1 і 2 на числову вісь:



Знаходимо знак похідної на кожному проміжку одержаного розбиття:

$$y'\left(\frac{1}{2}\right) < 0,\ y'(2) < 0,\ y'(3) > 0.$$

4. Робимо висновки стосовно характеру монотонності на кожному проміжку: на проміжках $(0; 1)$ і $(1; e]$ функція спадає, на проміжку $[e; \infty)$ – зростає.

Зауваження. Точка $x = e$ ввійшла в два проміжки: $(1; e]$ і $[e; +\infty)$, і це цілком природно. Якщо в умові пропонується знайти інтервали монотонності, то розвязок буде таким: $(0; 1)$ і $(1; e)$ – інтервали спадання, а $(e; +\infty)$ – інтервал зростання функції.

Приклад 2.2.171. $y=(x-1)^3(2x+3)^2$.

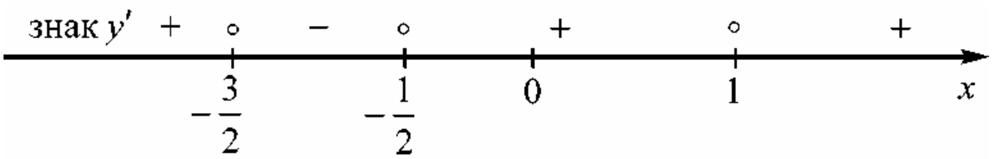
Розв'язання (див. приклад 2.2.170):

1) $D(f)=R$;

2) $y'=3(x-1)^2(2x+3)^2+4(x-1)^3(2x+3)=5(x-1)^2(2x+3)(2x+1)$;

$y'=0$: $x_1=-\dfrac{3}{2}$, $x_2=-\dfrac{1}{2}$, $x_3=1$; y' не існує: $x\in\varnothing$;

3)



$y'(-2)>0$, $y'(1)<0$, $y'(0)>0$, $y'(2)>0$;

4) $\left(-\infty;\ -\dfrac{3}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2};\ 1\right)$, $(1;+\infty)$ – інтервали зростання; $\left(-\dfrac{3}{2};\ \dfrac{1}{2}\right)$ – інтервал спадання.

Зауваження. Оскільки проміжки $\left(-\dfrac{1}{2};\ 1\right]$ і $[1;+\infty)$ сусідні, на кожному із них функція спадає, в межовій точці $x=1$ функція неперервна, то їх можна об'єднати в єдиний проміжок $\left(-\dfrac{1}{2};\ +\infty\right)$.

Приклад 2.2.172. $y=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x+50}$.

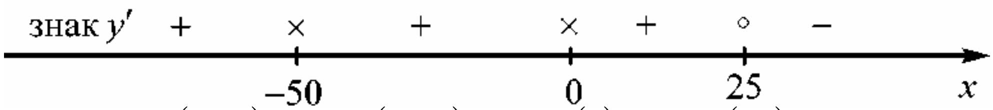
Розв'язання (див. приклад 2.2.170):

1) $D(f)$: $x\neq-50$; $x_1=50$ – точка розриву;

2) $y'=\dfrac{\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}(x+50)-\sqrt[3]{x}}{(x+50)^2}=-\dfrac{2}{3}\dfrac{x-25}{\sqrt[3]{x^2}(x+50)^2}$;

$y'=0$: $x_1=25$; y' не існує (точки розриву $f'(x)$): $x_2=0$, $x_3=-50$;

3)



$y'(-51)>0$, $y'(-25)>0$, $y'(5)>0$, $y'(30)<0$;

4) проміжки $(-50;0]$ і $[0;25)$ об'єднаємо в єдиний проміжок $(-50;25)$ (див. приклад 2.2.171); $(-\infty;-50)$, $(-50;25)$ – проміжки зростання; $(25;+\infty)$– проміжок спадання.

Приклад 2.2.173. Знайти інтервали зростання і спадання для функції $y=f(x)$, заданої неявно рівнянням $x^2y^2+y=1$, $y>0$.

Розв'язання. Знайдемо похідну: $2xy^2+2x^2yy'+y'=0$, $y'=-\dfrac{2xy^2}{2x^2y+1}$.

Як бачимо, похідна всюди існує, а тому всюди існує і функція $y = f(x)$.

Далі маємо: $y' = 0$: $-2xy^2 = 0$, $x_1 = 0$; при $x < 0$ $y' > 0$, а тому функція зростає; при $x > 0$ $y' < 0$, а тому функція спадає.

Приклад 2.2.174. Знайти інтервали зростання і спадання для функції $y = f(x)$, заданої параметрично рівняннями $x = \dfrac{e^{-t}}{1-t}$, $y = \dfrac{e^{t}}{1-t}$, $t > 1$.

Розв'язання. Знайдемо похідні: $x'_t = \dfrac{-e^{-t}(1-t) + e^{-t}}{(1-t)^2} = \dfrac{te^{-t}}{(1-t)^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x'_t > 0 \text{ при } t > 1; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\dfrac{e^t(1-t)+e^t}{(1-t)^2}}{\dfrac{te^{-t}}{(1-t)^2}} = \frac{e^{2t}(2-t)}{t} \Rightarrow \frac{dy}{dx} > 0 \text{ при } 1 < t < 2,$$

$\dfrac{dy}{dx} < 0$ при $t > 2$ і $\dfrac{dy}{dx} = 0$ при $t = 2$.

Оскільки при $t > 1$ $x(t) < 0$, а $y(t)$ існує, то область визначення для функції $y = f(x)$: $x < 0$.

Якщо $t \in (1; 2)$, то $x \in \left(-\infty; -e^{-2}\right)$ і $\dfrac{dy}{dx} > 0$; якщо $t \in (2; +\infty)$, то $x \in \left(-e^{-2}; 0\right)$ і $\dfrac{dy}{dx} < 0$. Тому на інтервалі $\left(-\infty; -e^{-2}\right)$ функція $y = f(x)$ зростає, а на інтервалі $\left(-e^{-2}; 0\right)$ – спадає.

2. Локальний екстремум функції. Точки екстремуму.

Означення локального екстремуму функції і точок екстремуму див. у п. 1 підрозд. 2.2.4. Слово “локальний” будемо випускати.

Означення 2.2.7. Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0. Тоді x_0 називається точкою строгого максимуму (мінімуму), якщо існує таке число $\delta > 0$, що $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$ $\left(f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)\right)$, де $0 \neq |\Delta x| < \delta$.

Точки строгого максимуму і мінімуму називаються точками строгого екстремуму.

Слово “строгий” також будемо випускати.

Для точок екстремуму функції $f(x)$ і тільки для них приріст функції $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ не змінює знака при переході аргументу через точку екстремуму x_0, тобто при зміні знака Δx ($\Delta f < 0$ для точок максимуму і $\Delta f > 0$ для точок мінімуму незалежно від знака Δx).

Теорема 2.2.13 (необхідна ознака екстремуму). Якщо для функції $f(x)$, визначеної в околі точки x_0, x_0 – точка екстремуму, то похідна $f'(x)$ в цій точці або дорівнює нулю, або не існує (рис. 2.2.23).

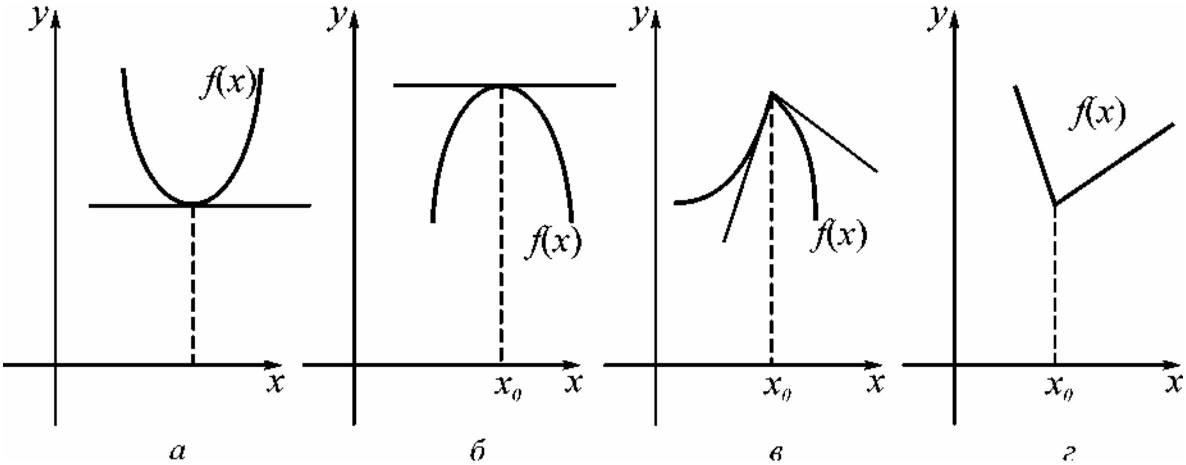


Рис. 2.2.23

Умова $f'(x_0)=0$ або $f'(x)$ не існує не є достатньою для того, щоб точка x_0 була точкою екстремуму. Наведемо приклади функцій, для яких указана умова виконується в зазначених точках x_0, але екстремуму в цих точках немає (рис. 2.2.24).

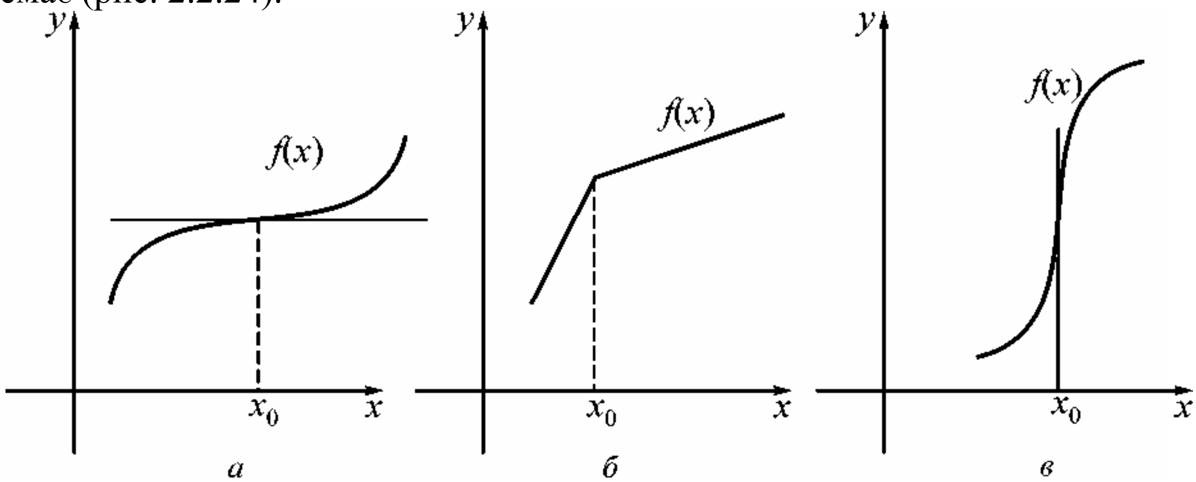


Рис. 2.2.24

Теорема 2.2.14 (перша достатня ознака екстремуму). Якщо для функції $f(x)$, диференційовної в околі точки x_0, крім, може бути, самої точки x_0, однак в цій точці неперервної, її похідна $f'(x)$ змінює знак при переході через точку x_0, то x_0 – точка екстремуму.

Якщо знак змінюється з „плюса" на „мінус", то x_0 – точка максимуму, з „мінуса" на „плюс" – точка мінімуму.

Означення 2.2.8. Для функції $f(x)$, визначеної в околі точки x_0, точка x_0 називається точкою зростання (спадання) функції, якщо існує таке число $\delta > 0$, що функція є зростаючою (спадною) на проміжку $(x_0-\delta; x_0+\delta)$.

Не слід думати, що для неперервної в точці x_0 функції $f(x)$ ця точка може бути тільки одного із типів: точкою екстремуму, точкою зростання, точкою спадання. Наприклад: точка $x=0$ для функції $y=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{2} & \text{при } x\neq 0, \\ 0 & \text{при } x=0 \end{cases}$ не є ні точкою екстремуму, ні точкою зростання, ні точкою спадання.

Теорема 2.2.15 (друга достатня ознака екстремуму). Якщо для функції $f(x)$, яка є диференційовною n раз в точці x_0, $f^{(k)}(x_0)=0$ ($k=\overline{1,n-1}$), а $f^{(n)}(x)\neq 0$, то при n парному x_0 – точка екстремуму (точка максимуму, якщо $f^{(n)}<0$, і точка мінімуму, якщо $f^{(n)}(x_0)>0$), при n непарному в точці x_0 екстремуму немає (ця точка є точкою зростання при $f^{(n)}(x_0)>0$ і спадання при $f^{(n)}(x_0)<0$).

Висновок. Якщо для функції $f(x)$ $f'(x_0)=0$, а $f''(x_0)\neq 0$, то x_0 – точка екстремуму (точка максимуму при $f'(x_0)<0$ і точка мінімуму при $f'(x_0)>0$).

Зауваження:

1. У нашому розумінні (можливий і інший підхід) коли x_0 – точка екстремуму функції $f(x)$, тоді $f(x)$ визначена в околі точки x_0, а тому x_0 не може бути межовою точкою області визначення.

2. План дослідження функції на екстремум аналогічний плану дослідження функції на монотонність, але висновки роблять стосовно точок екстремуму. Тут же знаходять екстремуми самої функції.

Дослідити дані функції на екстремум, тобто знайти точки екстремуму і значення функцій у цих точках (2.2.175 – 2.2.181).

Приклад 2.2.175. $y=\dfrac{x^3+2x^2}{(x-1)^2}$.

Розв'язання. Знаходимо спочатку похідну:

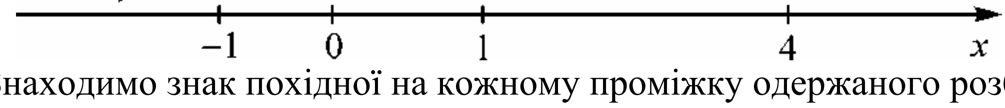
$$y'=\frac{(3x^2+4x)(x-1)^2-2(x-1)(x^3+2x^2)}{(x-1)^4}=\frac{x(x+1)(x-4)}{(x-1)^3}.$$

Далі виконаємо дослідження функції:

1. Область визначення $D(f)$: $x\neq 1\Rightarrow x_1=1$ – точка розриву.

2. Знайдемо критичні точки першого роду: $y'=0$: $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=4$; y' не існує: $x_4=1$; таким чином, критичні точки: $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=4$, $x_4=1$.

3. Наносимо інформацію пп. 1 і 2 на числову вісь:



Знаходимо знак похідної на кожному проміжку одержаного розбиття:

$$y'(-2)>0,\ y'\left(-\frac{1}{2}\right)<0,\ y'\left(\frac{1}{2}\right)>0,\ y'(2)<0,\ y'(5)>0.$$

4. Робимо висновки стосовно точок екстремуму: $x_1=-1$ – точка максимуму, максимум функції запишемо як $y_{\max}=y(-1)=\dfrac{1}{4}$; $x_2=0$ – точка мінімуму, $y_{\min 1}=y(0)=0$; в точці $x_4=1$ екстремуму немає (в цій точці функ-

ція не визначена); $x_3 = 4$ – точка мінімуму, $y_{\min 2} = y(4) = \dfrac{32}{3}$.

Приклад 2.2.176. $y = \dfrac{(2-x)^3}{(x-3)^2}$.

Розв'язання. Знаходимо похідну:

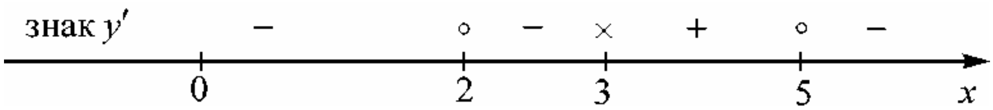
$$y = -\frac{(x-2)^3}{(x-3)^2},\ y' = -\frac{3(x-2)^2(x-3)^2 - 2(x-2)^3(x-3)}{(x-3)^4} = -\frac{(x-2)^2(x-5)}{(x-3)^3}.$$

Далі маємо (див. приклад 2.2.175):

1) $D(f)$: $x \neq 3$;

2) $y' = 0$: $x_1 = 2$, $x_2 = 5$; y' не існує: $x_3 = 3$;

3)



$$y'(0) < 0,\ y'\left(\frac{5}{2}\right) < 0,\ y'(4) > 0,\ y'(6) < 0;$$

4) у точці $x = 2$ екстремуму немає (не змінюється знак похідної); в точці $x = 3$ екстремуму також немає (функція в цій точці не визначена); точка $x = 5$ – точка максимуму, $y_{\max} = y(5) = -\dfrac{27}{4}$.

Приклад 2.2.177. $y = \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$.

Розв'язання.

Зауваження. Для спрощення дослідження на екстремум функції $y = f(x)$ іноді її можна замінити простішою функцією $y = \varphi(x)$, а саме:

1. Якщо початкова функція $f(x)$ має вигляд $\sqrt[2n]{\varphi(x)}$ ($n \in N$), то її можна замінити функцією $\varphi(x)$ в області $\varphi(x) \geq 0$, оскільки $f(x)$ і $\varphi(x)$ мають ті ж самі точки екстремуму.

2. Функцію вигляду $f(x) = \sqrt[2n+1]{\varphi(x)}$ заміняють функцією $\varphi(x)$. Точки екстремуму в них збігаються.

3. Функцію вигляду $f(x) = \dfrac{1}{\varphi(x)}$ при $\varphi(x) > 0$ можна замінити функцією $\varphi(x)$, маючи на увазі, що точкам максимуму функції $\dfrac{1}{\varphi(x)}$ відповідають точки мінімуму функції $\varphi(x)$ і навпаки.

Замінимо дану функцію функцією $\varphi(x) = (1-x)(x-2)^2$. Точки екстремуму даної функції та функції $\varphi(x)$ збігаються, а екстремуми, взагалі кажучи, різні.

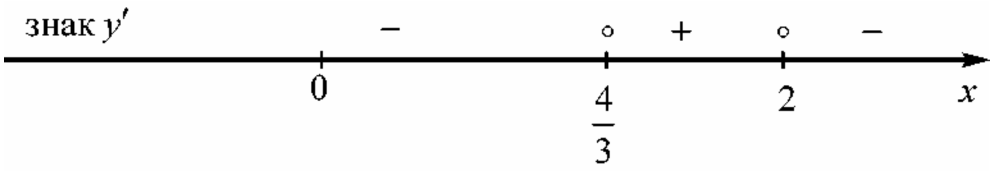
Знаходимо похідну: $\varphi'(x) = -(x-2)^2 + 2(1-x)(x-2) = (x-2)(4-3x)$.

Далі маємо (див. приклад 2.2.175):

1) $D(\varphi)=R$;

2) $\varphi'(x)=0$: $x_1=\frac{4}{3}$, $x_2=2$;

3)



$$\varphi(0)<0,\ \varphi\left(\frac{3}{2}\right)>0,\ \varphi(3)<0;$$

4) для $\varphi(x)$: $x=\frac{4}{3}$ – точка мінімуму, $x=2$ – точка максимуму; для $f(x)$: $x=\frac{4}{3}$ – точка мінімуму, $y_{\min}=y\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{-\sqrt[3]{4}}{3}$; $x=2$ – точка максимуму, $y_{\max}=y(2)=0$.

Приклад 2.2.178. $y=\frac{\sin x}{2+\cos x}$.

Розв'язання. Функція періодична з періодом $T=2\pi$, тому будемо зразу вести дослідження на проміжку $[-\pi;\pi]$, а потім урахуємо період.

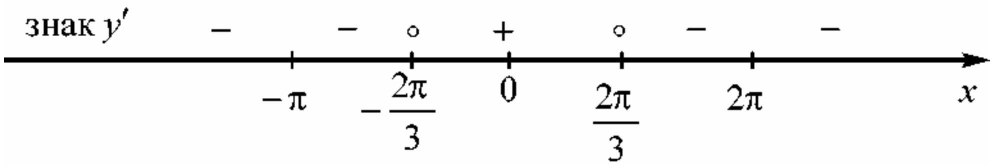
Знаходимо $y'=\frac{\cos x(2+\cos x)+\sin^2 x}{2+\cos x}=\frac{2\cos x+1}{2+\cos x}$.

Далі маємо (див. приклад 2.2.175):

1) $D(y)=R$;

2) $y'=0$: $x_{1,2}=\pm\frac{2\pi}{3}$; y' не існує: $x\in\varnothing$;

3)



$$y'\left(-\pi-\frac{\pi}{6}\right)<0,\ y'\left(-\pi+\frac{\pi}{6}\right)<0,\ y'(0)>0,\ y'\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)<0,\ y'\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)<0;$$

4) ураховуючи період, маємо: $x_{1k}=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k$ – точки мінімуму, $y_{\min}=y\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$; $x_{2k}=\frac{2\pi}{3}+2\pi k$ – точки максимуму, $y_{\max}=y\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $k\in Z$.

Приклад 2.2.179. $y=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$.

Розв'язання. Знаходимо

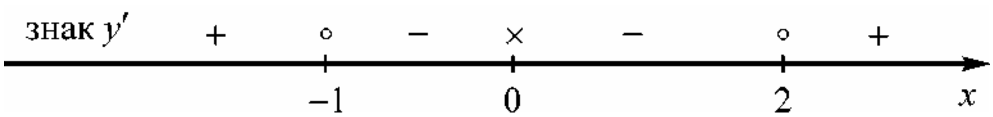
$$y' = e^{\frac{1}{x}} + (x+2)\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x}}\frac{(x+1)(x-2)}{x^2}.$$

Далі одержимо (див. приклад 2.2.175):

1) $D(y)$: $x \neq 0 \Rightarrow x = 0$ – точка розриву;

2) $y' = 0$: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$; y' не існує: $x_3 = 0$;

3)



$$y'(-2) > 0,\ y'\left(-\frac{1}{2}\right) < 0,\ y'(1) < 0,\ y'(3) > 0;$$

4) $x = -1$ – точка максимуму, $y_{\max} = y(-1) = \frac{1}{e}$; в точці $x = 0$ екстремуму немає; $x = 2$ – точка мінімуму, $y_{\min} = y(2) = 4\sqrt{e}$.

Приклад 2.2.180. $y = x^{\frac{1}{x}}$.

Розв'язання. Знаходимо похідну:

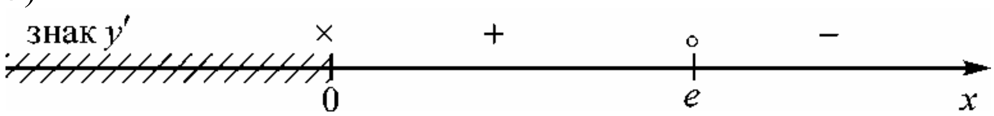
$$\ln y = \frac{1}{x}\ln x,\ \frac{y'}{y} = -\frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2},\ y' = x^{\frac{1}{x}}\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

Далі одержимо (див. приклад 2.2.175):

1) $D(y)$: $x > 0$;

2) $y' = 0$: $x_1 = e$; y' завжди існує при $x > 0$;

3)



$$y'\left(\frac{1}{e}\right) > 0,\ y'\left(e^2\right) < 0;$$

4) $x = e$ – точка максимуму, $y_{\max} = y(e) = e^{\frac{1}{e}}$.

Приклад 2.2.181. $y = |x-1|^3\sqrt{x+2}$.

Розв'язання. Замість даної функції розглянемо функцію $\varphi(x) = |x-1|^3(x+2)$. Точки екстремуму даної функції та функції $\varphi(x)$ збігаються. Можна записати

$$\varphi(x) = \begin{cases} -(x-1)^3(x+2), \text{ якщо } x < 1; \\ (x-1)^3(x+2), \text{ якщо } x \geq 1. \end{cases}$$

Дослідимо диференційовність функції $\varphi(x)$ в точці $x = 1$ (диференційовність її в інших точках очевидна):

$$\varphi'(1-0)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<0}}\frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1}=\left|\varphi(1)=0\right|=$$

$$=\lim_{x\to 1-0}\frac{-(x-1)^3(x+2)}{x-1}=-\lim_{x\to 1-0}\left[(x-1)^2(x+2)\right]=0,$$

$$\varphi'(1+0)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{(x-1)^3(x+2)}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}\left[(x-1)^2(x+2)\right]=0.$$

Таким чином, функція $\varphi(x)$ диференційовна в точці $x=1$ і $\varphi'(1)=0$.

При $x<1$ $\varphi'(x)=-3(x-1)^2(x+2)-(x-1)^3=-(x-1)^2(4x+5)$; при $x>1$ $\varphi'(x)=(x-1)^2(4x+5)$.

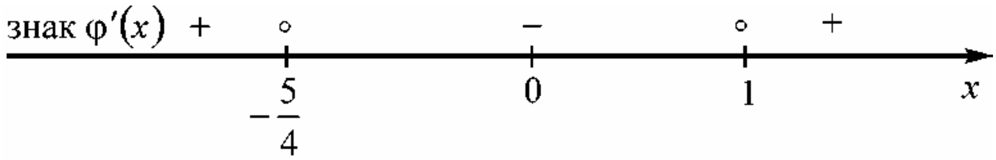
Можна записати $\varphi'(x)=\begin{cases}-(x-1)^2(4x+5), & \text{якщо } x<1;\\ (x-1)^2(4x+5), & \text{якщо } x\ge 1.\end{cases}$

Далі застосуємо традиційний план дослідження (див. приклад 2.2.175):

1) $D(\varphi)=R$;

2) $\varphi'(x)=0$: $x_1=-\dfrac{5}{4}$, $x_2=1$; $\varphi'(x)$ не існує: $x\in\varnothing$;

3)



$$\varphi'(-2)>0,\ \varphi'(0)<0,\ \varphi'(2)>0;$$

4) переходимо до даної функції $y(x)$: $x=-\dfrac{5}{4}$ – точка максимуму, $y_{\max}=y\left(-\dfrac{5}{4}\right)=\dfrac{9\sqrt[3]{6}}{8}$; $x=1$ – точка мінімуму, $y_{\min}=y(1)=0$.

Дослідити дані функції на екстремум, застосовуючи похідні вищих порядків (2.2.182 – 2.2.185).

Приклад 2.2.182. $y=2x^3-15x^2+36x-14$.

Розв'язання. Знаходимо:

1) похідну $y'=6x^2-30x+36$;

2) стаціонарні точки, тобто точки, в яких $y'=0$: $6x^2-30x+36=0$, $x^2-5x+6=0$, $x_1=2$, $x_2=3$;

3) першу по порядку похідну, яка в даній стаціонарній точці не дорівнює нулю: $y''=12x-30$, $y''(2)=-6<0$, $y''(3)=6>0\Rightarrow$ $x=2$ – точка максимуму, $y_{\max}=y(2)=14$; $x=3$ – точка мінімуму, $y_{\min}=y(3)=13$.

Приклад 2.2.183. $y=\operatorname{ch}x+\cos x$.

Розв'язання. Знаходимо (див. приклад 2.2.182):

1) $y'=\operatorname{sh}x-\sin x$;

2) $y'=0$: $x_1=0$;

3) $y''=\operatorname{ch}x-\cos x$, $y''(0)=0$; $y'''=\operatorname{sh}x+\sin x$, $y'''(0)=0$; $y^{(4)}=\operatorname{ch}x+\cos x$, $y^{(4)}(0)=1>0\Rightarrow$ $x_1=0$ – точка мінімуму, $y_{\min}=y(0)=2$.

Приклад 2.2.184. $y=\sqrt[3]{(1+x)(x+2)^2}$.

Розв'язання. Замість даної функції розглянемо функцію $\varphi(x)=(1+x)(x+2)^2$. Точки екстремуму функції $\varphi(x)$ збігаються з точками екстремуму функції $y(x)$ (див. зауваження до прикладу 2.2.177).

Знаходимо:

1) $\varphi'(x)=(x+2)^2+2(1+x)(x+2)=(x+2)(3x+4)$;

2) $\varphi'(x)=0$: $x_1=-\dfrac{4}{3}$, $x_2=-2$;

3) $\varphi''(x)=\left(3x^2+10x+8\right)'=6x+10$, $\varphi''\left(-\dfrac{4}{3}\right)=2>0$,

$\varphi''(-2)=-2<0\Rightarrow x_1=-\dfrac{4}{3}$ – точка мінімуму, $y_{\min}=y\left(-\dfrac{4}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$; $x_2=-2$ – точка максимуму, $y_{\max}=y(-2)=0$.

Приклад 2.2.185. $y=x+\sqrt{1-x}$.

Розв'язання. Знаходимо:

1) $D(y)$: $x\le 1$;

2) $y'=1-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}=\dfrac{2\sqrt{1-x}-1}{2\sqrt{1-x}}$;

3) $y'=0$: $2\sqrt{1-x}=1$, $4(1-x)=1$, $x_1=\dfrac{3}{4}$; y' завжди існує при $x<1$, таким чином, критична точка $x_1=\dfrac{3}{4}$ є стаціонарною;

4) $y''=-\dfrac{1}{4\sqrt{(1-x)^3}}$, $y''\left(\dfrac{3}{4}\right)=-2<0\Rightarrow x_1=\dfrac{3}{4}$ – точка максимуму, $y_{\max}=y\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{5}{4}$.

Приклад 2.2.186. Дослідити на екстремум функцію $y=y(x)$, задану неявно рівнянням $x^3+y^3=3x^2$.

Розв'язання. Знайдемо похідну:

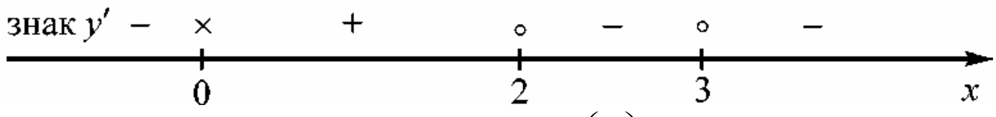
$$3x^2+3y^2y'=6x,\ y'=\frac{x(2-x)}{y^2}.$$

Далі маємо:

1) $y'=0$: $x_1=0$, $x_2=2$; y' не існує: $y=0$, але при $y=0$ одержимо $x_1=0$, $x_3=3$; таким чином, в точці $x_1=0$ похідна не існує (тобто ця точка

не є стаціонарною);

2)



$$y'(-1)<0,\ y'(1)>0,\ y'\left(\frac{5}{2}\right)<0,\ y'(4)<0;$$

3) $x=0$ – точка мінімуму, $y_{\min}=y(0)=0$; $x=2$ – точка максимуму, $y_{\max}=y(2)=\sqrt[3]{4}$.

Приклад 2.2.187. Дослідити на екстремум функцію $y=f(x)$, задану параметрично рівняннями $x=\ln\sin\frac{t}{2}$, $y=\ln\sin t$.

Розв'язання. Знаходимо:

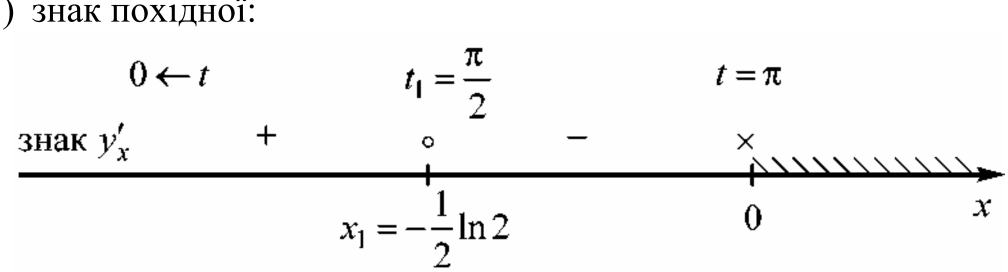
1) період функції відносно параметра t: період функції $x(t)$ – $T_1=4\pi$, період функції $y(t)$ – $T_2=2\pi$, отже, їх загальний період – $T=4\pi$;

2) область визначення: $D(x(t))$: $\sin\frac{t}{2}>0$, $0<\frac{t}{2}<\pi$, $0<t<2\pi$; $D(y(t))$: $\sin t>0$, $0<t<\pi$, отже, область визначення функції $y(x)$ за параметром t $D(y(x))$: $0<t<\pi$; коли $t\in(0;\pi)$, тоді $x\in(-\infty;0)$, отже, область визначення $y(x)$ за змінною x $D(y(x))$: $x<0$;

3) похідну: $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{\operatorname{ctg}t}{\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}}=2\dfrac{\operatorname{ctg}t}{\operatorname{ctg}\frac{t}{2}}$;

4) критичні точки: $y'_x=0$: $\operatorname{ctg}t=0$, $t_1=\frac{\pi}{2}$, йому відповідає $x_1=\ln\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{2}\ln 2$; y'_x не існує (точки розриву y'_x на проміжку $(0;\pi)$): $t\in\varnothing$.

5) знак похідної:



$$y'_x\left(\frac{\pi}{4}\right)>0,\ y'_x\left(\frac{3\pi}{4}\right)<0;$$

6) точки екстремуму і екстремуми функції: $x_1=-\frac{1}{2}\ln 2$ – точка максимуму, $y_{\max}=y(x_1)=y(t)\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=0$.

3. Найбільше і найменше значення функції на відрізку.

За теоремою Вейєрштрасса неперервна на відрізку $[a;b]$ функція $f(x)$ набуває на цьому відрізку своїх найменшого m і найбільшого M значень.

Будемо позначати:

$$m = \min_{[a;\,b]} f(x),\ M = \max_{[a;\,b]} f(x).$$

Значення m і M називаються глобальними екстремумами функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ (m – глобальний мінімум, M – глобальний максимум).

Точки x_1 і x_2, для яких $m = f(x_1)$ і $M = f(x_2)$, називаються точками глобального мінімуму і максимуму відповідно.

Теорема 2.2.16. Неперервна на відрізку $[a;b]$ функція $f(x)$ набуває свого найбільшого (найменшого) значення на відрізку $[a;b]$ або в точках максимуму (мінімуму), або на кінцях відрізка $[a;b]$.

Таким чином, $M = \max(f(s_1), f(s_2), \ldots, f(s_m), f(a), f(b))$, де s_1, s_2, …, s_m – точки максимуму $f(x)$, і $m = \min(f(p_1), f(p_2), \ldots, f(p_n), f(a), f(b))$, де p_1, p_2, …, p_n – точки мінімуму $f(x)$.

Якщо потрібно знайти і m, і M, то необхідно знайти значення $f(x)$ в точках екстремуму, на кінцях відрізка $[a;b]$ і вибрати з них найбільше і найменше значення відповідно.

Зауважимо таке: якщо функція $f(x)$ опукла (вгнута) на відрізку $[a;b]$, то її глобальний максимум (мінімум) збігається з локальним максимумом (мінімумом).

Знайти найбільше і найменше значення функції (2.2.188 – 2.2.190).

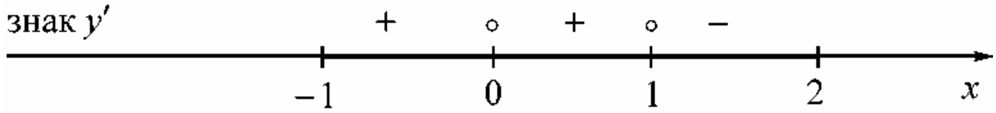
Приклад 2.2.188. $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$, $x \in [-1;2]$.

Розв'язання. Знаходимо:

1) область визначення $D(y)$: $x \in [-1;\,2]$; функція неперервна;

2) критичні точки: $y' = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2(x^2 - 4x + 3)$; $y' = 0$: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3 \notin [-1;\,2]$; y' не існує: $x \in \varnothing$;

3) знаки похідної на кожному проміжку:



$$y'\left(-\frac{1}{2}\right) > 0,\ y'\left(\frac{1}{2}\right) > 0,\ y'\left(\frac{3}{2}\right) < 0;$$

4) точки екстремуму, локальні екстремуми, значення функції на кінцях даного відрізка: $x = 1$ – точка максимуму, $y_{\max} = y(1) = 2$; $y(-1) = -10$, $y(2) = -7$;

5) глобальні екстремуми: $M = \max\limits_{[-1;\,2]} f(x) = \max(2, -10, -7) = 2$,

$m = \min\limits_{[a;b]} f(x) = \min(2, -10, -7) = -10$.

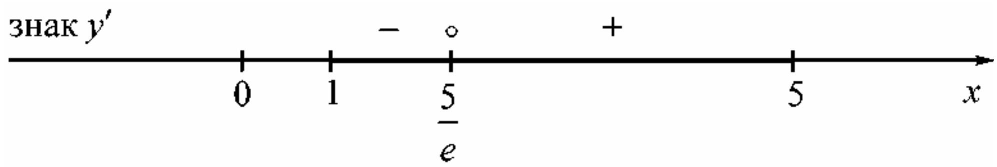
Приклад 2.2.189. $y = x\ln\frac{x}{5}$, $x \in [1; 5]$.

Розв'язання. Для даної функції маємо (див. приклад 2.2.188):

1) на відрізку $[1; 5]$ функція визначена і неперервна;

2) $y' = \ln\frac{x}{5} + 1$; $y' = 0$: $\frac{x}{5} = \frac{1}{e}$, $x_1 = \frac{5}{e}$; y' не існує: $x \in \varnothing$;

3)



$$y'\left(\frac{5}{e^{3/2}}\right) < 0, \; y'(e) > 0;$$

4) $x = \frac{5}{e}$ – точка мінімуму, $y\left(\frac{5}{e}\right) = -\frac{5}{e}$; $y(1) = -\ln 5$, $y(5) = 0$;

5) $M = \max\limits_{[1;5]} y(x) = y(5) = 0$; $m = \min\limits_{[1;5]} y(x) = y\left(\frac{5}{e}\right) = -\frac{5}{e}$.

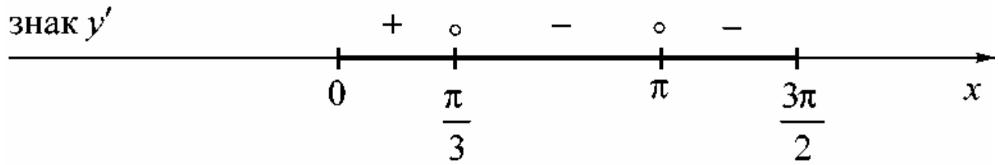
Приклад 2.2.190. $y = 2\sin x + \sin 2x$, $x \in \left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Розв'язання. Одержимо (див. приклад 2.2.188):

1) функція визначена і неперервна на проміжку $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$;

2) $y' = 2\cos x + 2\cos 2x$; $y' = 0$: $\cos x + \cos 2x = 0$, $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ ($\cos x = -1$, $x_1 = \pi$; $\cos x = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{3}$); y' не існує (точки розриву y'): $x \in \varnothing$;

3)



$$y'\left(\frac{\pi}{6}\right) > 0, \; y'\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0, \; y'\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) < 0;$$

4) $x = \frac{\pi}{3}$ – точка максимуму, $y_{\max} = y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$; $y(0) = 0$, $y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2$;

5) $M = \max\limits_{\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]} y(x) = y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $m = \min\limits_{\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]} y(x) = y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2$.

Знайти найбільше і найменше значення функції на незамкненому проміжку (2.2.191 – 2.2.194).

Приклад 2.2.191. $y = 2x^3 + 3x^2 - 120x + 100$, $x \in (-4;\, 5]$.

Розв'язання.

Зауваження. Припустимо, що треба знайти найбільше і найменше значення функції $f(x)$ на незамкненому проміжку, наприклад $(a;\, b]$. Нехай функція неперервна на $(a;\, b]$. Ведемо дослідження так, як і для замкненого проміжку $[a;\, b]$, тільки виключаємо з розкладу точку a (тим більше, що вона не належить проміжку $(a;\, b]$). Нехай результат дослідження такий: $\widetilde{m}$ – найменше, $\widetilde{M}$ – найбільше значення, а $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A$ (де A – скінченна або нескінченна величина).

Розглянемо випадки:

1) $\widetilde{m} \le A \le \widetilde{M}$, тоді $m = \widetilde{m}$, $M = \widetilde{M}$ – шукані найменше і найбільше значення відповідно;

2) $A < \widetilde{m}$, тоді $M = \widetilde{M}$, а найменшого значення не існує;

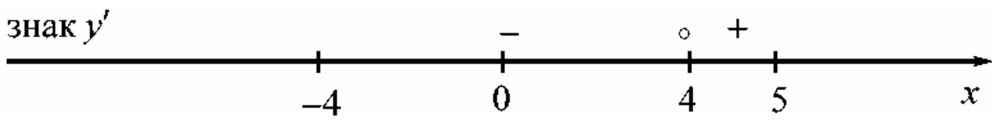
3) $A > \widetilde{M}$, тоді $m = \widetilde{m}$, а найбільшого значення не існує.

Для даної функції маємо:

1) на проміжку $(-4;\, 5]$ функція визначена і неперервна;

2) похідна і критичні точки: $y' = 6x^2 + 6x - 120 = 6(x+5)(x-4)$; $y' = 0$: $x_1 = -5 \notin (-4;\, 5]$, $x_2 = 4$;

3) критичні точки і знаки похідної на проміжку $(-4;\, 5]$:



$$y'(0) < 0,\ y'\left(\frac{9}{2}\right) > 0;$$

4) точки екстремуму, локальні екстремуми, значення функції на правому кінці проміжку $(-4;\, 5]$ і граничні значення при $x \to -4$: $x = 4$ – точка мінімуму, $y_{\min} = y(4) = -204$; $y(5) = -175$, $\lim\limits_{x \to -4} = 500$;

5) найбільше і найменше значення: найбільшого значення не існує; $m = \min\limits_{(-4;\, 5]} y(x) = -204$.

Приклад 2.2.192. $y = \dfrac{9}{x} + \dfrac{25}{1-x}$, $x \in (0;1)$.

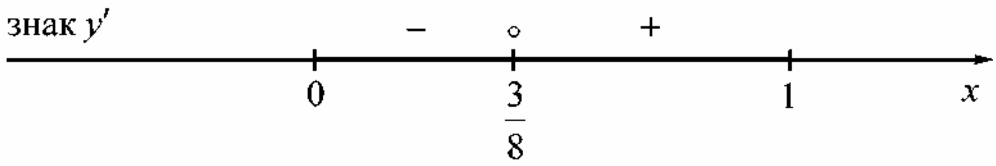
Розв'язання. Для даної функції маємо (детально див. у прикладі 2.2.191):

1) функція визначена і неперервна на $(0;1)$;

2) $y' = -\dfrac{9}{x^2} + \dfrac{25}{(1-x)^2} = \dfrac{16x^2 + 18x - 9}{x^2(1-x)^2}$; $y' = 0$: $x_1 = -\dfrac{3}{2} \notin (0;\, 1)$, $x_2 = \dfrac{3}{8}$;

y' не існує: $x \in \varnothing$;

3)



$$y'\left(\frac{1}{4}\right)<0,\ y'\left(\frac{1}{2}\right)>0;$$

4) $x=\frac{3}{8}$ – точка мінімуму, $y_{\min}=y\left(\frac{3}{8}\right)=64$; $\lim\limits_{x\to+0}y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to1-0}y=+\infty$;

5) $m=\min\limits_{(0;1)}y(x)=64$, M не існує.

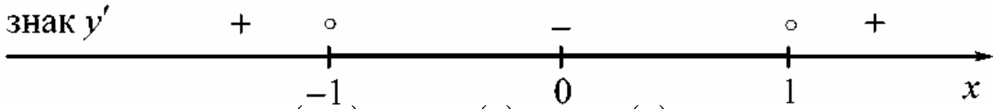
Приклад 2.2.193. $y=\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$, $x\in R$.

Розв'язання. Для даної функції маємо (див. приклад 2.2.191):

1) функція визначена і неперервна на всій осі Ox;

2) $y'=\dfrac{2x\left(x^2+x+1\right)-(2x+1)\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\dfrac{x^2-1}{\left(x^2+x+1\right)^2}$; $y'=0$: $x_1=-1$, $x_2=1$; y' не існує: $x\in\varnothing$;

3)



$$y'(-2)>0,\ y'(0)<0,\ y'(2)>0;$$

4) $x=-1$ – точка максимуму, $y_{\max}=y(-1)=2$; $x=1$ – точка мінімуму, $y_{\min}=y(1)=\frac{2}{3}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}y=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}y=1$;

5) $m=\min\limits_{x\in R}y(x)=y(1)=\frac{2}{3}$, $M=\max\limits_{x\in R}y(x)=y(-1)=2$.

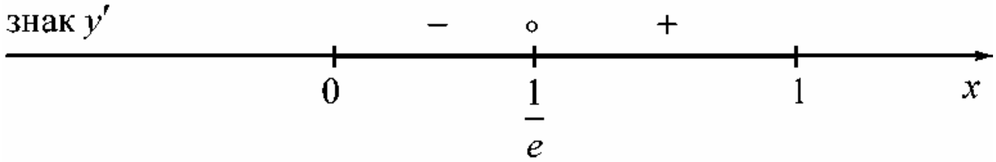
Приклад 2.2.194. $y=x^x$, $x\in(0;1]$.

Розв'язання. Для даної функції маємо (див. приклад 2.2.191):

1) функція визначена і неперервна на $(0;1]$;

2) $\ln y=x\ln x$, $\frac{y'}{y}=\ln x+1$, $y'=x^x(\ln x+1)$; $y'=0$: $x=\frac{1}{e}$; y' не існує: $x\in\varnothing$;

3)



$$y'\left(\frac{1}{e^2}\right)<0,\ y'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)>0;$$

4) $x=\frac{1}{e}$ – точка мінімуму, $y_{\min}=y\left(\frac{1}{e}\right)=e^{-\frac{1}{e}}$; $y(1)=1$,

$$\lim_{x\to+0} y=\lim_{x\to+0} x^x=e^{\lim\limits_{x\to+0}(x\ln x)}=e^{\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right)\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}=$$

$$=\left|\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to+0}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+0}x=0\right|=e^0=1;$$

5) $m=\min\limits_{(0;\,1]}y(x)=y\left(\frac{1}{e}\right)=e^{-\frac{1}{e}}$, $M=\max\limits_{(0;\,1]}y(x)=y(1)=1$.

Знайти $\inf f$ і $\sup f$ *(2.2.195 – 2.2.197).*

Приклад 2.2.195. $y=f(x)=\frac{1}{x}+x^2$, $x\in(0;1]$.

Розв'язання.

Зауваження. Якщо функція $f(x)$ – визначена і неперервна на замкненому проміжку $[a;b]$, то задача знаходження $\inf f(x)$ і $\sup f(x)$ цілком збігається з задачею знаходження m і M:

$$\inf_{[a;\,b]} f(x)=m=\min_{[a;\,b]} f(x),\ \sup_{[a;\,b]} f(x)=M=\max_{[a;\,b]} f(x).$$

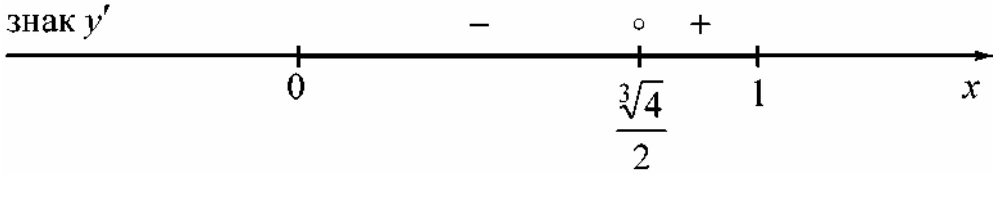
Якщо проміжок $<a;b>$ незамкнений, наприклад в нього не входить точка a, то в послідовність локальних екстремумів $f(x)$, значення функції в точці b додається число $A=\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ (A може бути як скінченним, так і нескінченним). Найменшим з цих чисел є $\inf\limits_{(a;\,b]} f(x)$, найбільшим – $\sup\limits_{(a;\,b]} f(x)$.

Маємо:

1) функція визначена і неперервна на проміжку $(0;1]$;

2) похідна $f'(x)$ функції $f(x)$: $y'=\frac{2x^3-1}{x^2}$; критичні точки $f(x)$: $y=0$: $x_1=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$; y' не існує: $x\in\varnothing$;

3) знаки похідної на інтервалах розбиття проміжку $(0;1]$ критичною точкою $x_1=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$:



$$y'\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)<0,\ y'\left(\frac{\sqrt[3]{5}}{2}\right)>0;$$

4) локальні екстремуми, значення функції на кінцях проміжку: $x=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$ – точка мінімуму, $y_{\min}=y\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)=\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$; $y(1)=2$, $\lim\limits_{x\to+0}y=+\infty$;

5) $\inf\limits_{(0;1]}f(x)=y_{\min}=y\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)=\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$, $\sup\limits_{(0;1]}f(x)=\lim\limits_{x\to+0}y=+\infty$.

Приклад 2.2.196. $y=f(x)=\left(x^2+4\right)e^{-x}$, $x\in(0;+\infty)$.

Розв'язання. Для даної функції маємо (див. приклад 2.2.195):

1) функція визначена і неперервна на інтервалі $(0;+\infty)$;

2) $y'=2xe^{-x}-\left(x^2+4\right)e^{-x}=-\left(x^2-2x+4\right)e^{-x}$; $y'=0$: $x\in\varnothing$; y' не існує: $x\in\varnothing$, отже, критичних точок немає;

3) $\lim\limits_{x\to+0}y=4$, $\lim\limits_{x\to+\infty}y=0$, тільки ці два числа визначатимуть $\sup f$ і $\inf f$;

4) $\inf\limits_{(0;+\infty)}f(x)=0$, $\sup\limits_{(0;+\infty)}f(x)=4$.

Приклад 2.2.197. $y=f(x)=x+\left(\frac{2}{x-2}\right)^2$, $x\in\left(\frac{3}{2};5\right)$.

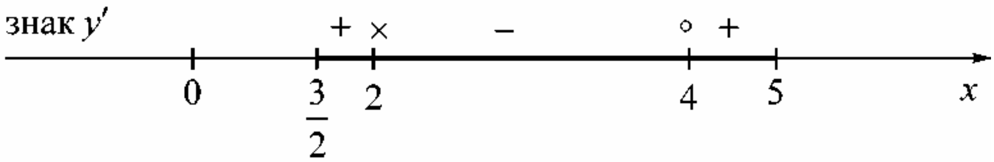
Розв'язання.

Для даної функції маємо (див. приклад 2.2.195):

1) функція визначена і неперервна на інтервалах $\left(\frac{3}{2};2\right)$ і $(2;5)$;

2) $y'=1-\frac{8}{(x-2)^3}=\frac{(x-2)^3-8}{(x-2)^3}$; $y'=0$: $x_1=4$; y' не існує: $x_2=2$;

3)



$$y'\left(\frac{4}{3}\right)>0,\ y'(3)<0,\ y'\left(\frac{9}{2}\right)>0;$$

4) $x=4$ – точка мінімуму, $y_{\min}=y(4)=5$; $\lim\limits_{x\to2}y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}+0}y=\frac{35}{2}$, $\lim\limits_{x\to5-0}=\frac{49}{9}$;

5) $\inf\limits_{\left(\frac{3}{2};5\right)}f(x)=y_{\min}=y(4)=5$, $\sup\limits_{\left(\frac{3}{2};5\right)}f(x)=\lim\limits_{x\to2}y=+\infty$.

4. Опуклість, угнутість функції. Точки перегину.

Означення 2.2.9. Функція $y = f(x)$ називається опуклою (вгнутою) в точці x_0, якщо існує таке $\delta > 0$, що $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$: $f(x) < f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ $\left(f(x) > f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)\right)$.

Геометрична суть. Якщо функція $y = f(x)$ опукла (вгнута) в точці x_0, то існує окіл точки x_0, такий, що для всіх x з цього околу (крім x_0) графік кривої $y = f(x)$ лежить нижче (вище) дотичної, проведеної до кривої в точці $(x_0; f(x_0))$.

Означення 2.2.10. Функція $y = f(x)$ називається опуклою (вгнутою) на інтервалі $(a; b)$, якщо вона опукла (вгнута) в кожній точці цього інтервалу.

Можна дати ще такі означення:

Означення 2.2.11. Функція $y = f(x)$ називається опуклою (вгнутою) на інтервалі $(a; b)$, якщо для будь-яких точок x_1 і x_2 ($x_1 \neq x_2$) цього інтервалу і будь-яких чисел $\alpha_1 > 0$ і $\alpha_2 > 0$, таких, що $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, справедлива нерівність:

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) > \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) \; \left(f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) < \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)\right).$$

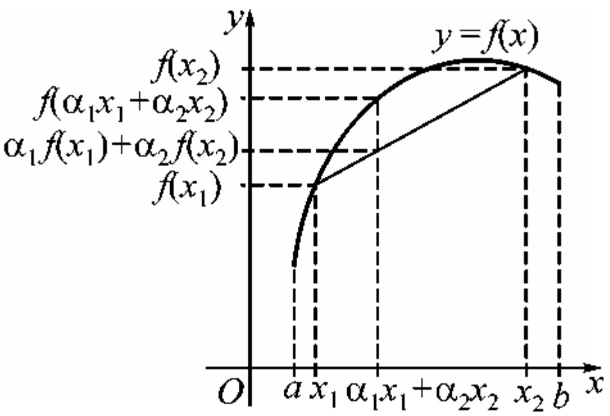


Рис. 2.2.25

Геометрична суть. Якщо функція $y = f(x)$ опукла (вгнута) на інтервалі $(a; b)$, то точки будь-якої дуги графіка (крім крайніх) розташовані вище (нижче) хорди, яка стягує цю дугу (рис. 2.2.25).

Означення 2.2.12. Функція $y = f(x)$ називається опуклою (вгнутою) на інтервалі $(a; b)$, якщо для будь-яких точок x_1 і x_2 ($x_1 \neq x_2$) цього інтервалу і будь-якого числа $0 < \lambda < 1$ справедлива нерівність

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) > \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2)$$

$$\left(f(\lambda x_1 + \lambda x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2)\right).$$

Якщо функція опукла (вгнута), то ще кажуть, що вона повернута опуклістю вверх (вниз).

Означення 2.2.13. Точка x_0 називається точкою перегину функції $f(x)$, якщо в цій точці змінюється характер опуклості, при цьому припускається, що в точці x_0 функція $f(x)$ має похідну (скінченну або нескінченну).

Остання умова означає, що можна провести дотичну до графіка функції в точці $(x_0; f(x_0))$.

На рис. 2.2.26 маємо:

– у точці x_1 функція опукла;

– у точці x_3 функція вгнута;

– точка x_2 – точка перегину (опуклість змінюється на вгнутість);

– точка x_4 – точка перегину (вгнутість змінюється на опуклість, похідна в цій точці нескінченна, але дотичну в точці $(x_4; f(x_4))$провести можна);

– точка x_5 не є точкою перегину (хоча в цій точці і змінюється характер опуклості, провести дотичну в точці $(x_5; f(x_5))$не можна);

– $(a; x_2)$, $(x_4; x_5)$ – інтервали опуклості;

– $(x_2; x_4)$, $(x_5; b)$ – інтервали вгнутості.

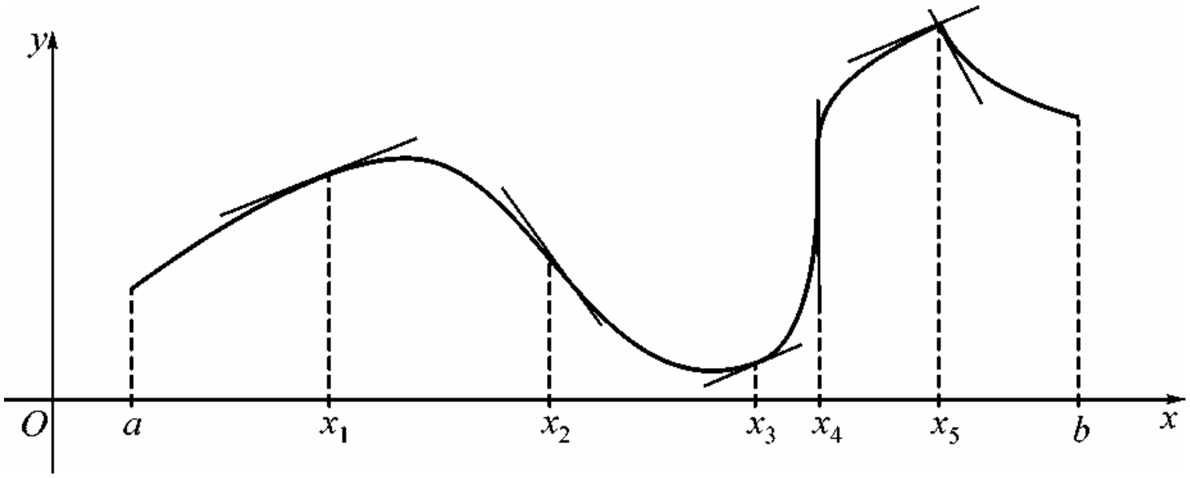


Рис. 2.2.26

Теорема 2.2.17 (необхідна ознака опуклості (вгнутості) функції). Якщо двічі диференційовна на інтервалі $(a; b)$ функція $f(x)$ опукла (вгнута) на цьому інтервалі, то $f''(x) \le 0$ ($f''(x) \ge 0$) $\forall x \in (a; b)$.

Теорема 2.2.18 (достатня ознака опуклості (вгнутості) функції). Якщо для двічі диференційовної на інтервалі $(a; b)$ функції $f(x)$ $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) $\forall x \in (a; b)$, то функція $f(x)$ – опукла (вгнута) на інтервалі $(a; b)$.

Теорема 2.2.19 (необхідна ознака точки перегину). Якщо для функції $f(x)$, двічі диференційовної в околі точки x_0, крім, може бути, самої точки x_0, x_0 – точка перегину, то друга похідна $f''(x)$ в цій точці або дорівнює нулю, або не існує.

Теорема 2.2.20 (перша достатня ознака точки перегину). Якщо для функції $f(x)$, яка має в точці x_0 першу похідну (скінченну або нескінченну) і є двічі диференційовною в околі точки x_0, крім, може бути, самої точки x_0, її друга похідна, проходячи через точку x_0, змінює свій знак, то x_0 – точка перегину.

Теорема 2.2.21 (друга достатня ознака точки перегину). Якщо для функції $f(x)$, яка є диференційовною n ($n > 2$) раз в околі точки x_0, $f^{(k)}(x_0) = 0$ ($k = \overline{1, n-1}$), а $f^{(n)}(x_0) \ne 0$, то при n непарному x_0 – точка перегину функції, а при n парному x_0 не є точкою перегину.

План дослідження функції $f(x)$ на опуклість, угнутість, перегин:

1) знаходимо область визначення $D(f)$, при цьому автоматично знаходяться точки розриву $f(x)$;

2) знаходимо критичні точки 2-го роду функції $f(x)$, тобто точки, в яких друга похідна $f''(x)$ або дорівнює нулю, або не існує;

3) інформацію пп. 1 і 2 наносимо на числову вісь Ox, в результаті область визначення $f(x)$ буде розбита на інтервали, в кожному із яких похідна $f''(x)$ зберігає свій знак;

4) робимо відповідні висновки стосовно характеру опуклості функції і існування точок перегину.

Дослідити дану функцію на опуклість, угнутість і перегин (2.2.198 – 2.2.201).

Приклад 2.2.198. $y = x^4 - 6x^2 - 6x + 1$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку похідні:

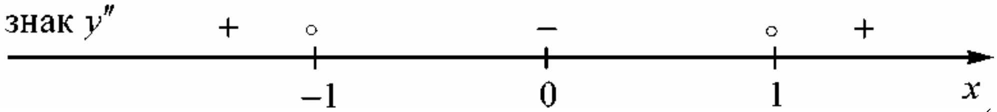
$$y' = 4x^3 - 12x - 6\,;\; y'' = 12x^2 - 12 = 12\left(x^2 - 1\right).$$

Далі виконаємо дослідження даної функції:

1) область визначення $D(y) = R$;

2) критичні точки другого роду: $y'' = 0$: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$; y'' не існує (мається на увазі, що ми повинні вказати точки розриву другої похідної): $x \in \varnothing$;

3) інформацію пп. 1 і 2 наносимо на числову вісь



і знаходимо знаки $f''(x)$ на інтервалах одержаного розбиття: $y''(-2) > 0$, $y''(0) < 0$, $y''(2) > 0$;

4) робимо відповідні висновки стосовно опуклості, вгнутості функції і її точок перегину: $(-\infty; -1)$ і $(1; +\infty)$ – інтервали вгнутості; $(-1; 1)$ – інтервал опуклості; $x = -1$ і $x = 1$ – точки перегину.

Зауваження. Якщо x_0 – точка перегину функції $f(x)$, то точка $((x_0; f(x_0))$ називається точкою перегину графіка функції $f(x)$.

Тому $(-1; 2)$ і $(1; -10)$ – точки перегину графіка функції $f(x)$.

Приклад 2.2.199. $y = \dfrac{x^2}{(x-1)^3}$.

Розв'язання. Знайдемо похідні:

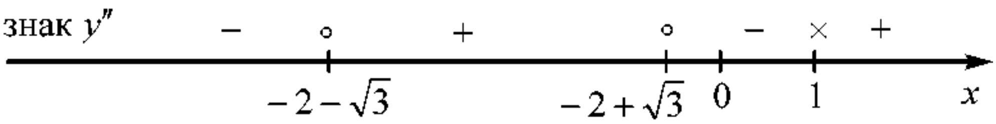
$$y' = -\frac{x(x+2)}{(x-1)^4}\,,\; y'' = 2\frac{x^2 + 4x + 1}{(x-1)^5}\,.$$

Далі знаходимо (докладно див. у прикладі 2.2.198):

1) $D(y)$: $x \neq 1$;

2) $y'' = 0$: $x^2 + 4x + 1 = 0$, $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}$; y'' не існує: $x_3 = 1$;

3)



$$y''(-5)<0,\ y''(-2)>0,\ y''(0)<0,\ y''(2)>0;$$

4) $\left(-\infty;-2\sqrt{3}\right)$ і $\left(-2+\sqrt{3};\ 1\right)$ – інтервали опуклості; $\left(-2-\sqrt{3};-2+\sqrt{3}\right)$ і $(1;+\infty)$ – інтервали вгнутості; $-2-\sqrt{3},\ -2+\sqrt{3}$ – точки перегину; в точці $x=1$ перегину немає, оскільки в цій точці сама функція не визначена.

Приклад 2.2.200. $y=\dfrac{|x-1|}{x\sqrt{x}}$.

Розв'язання. Перепишемо дану функцію:

$$y=\begin{cases}-\dfrac{x-1}{x\sqrt{x}}, & \text{якщо } 0<x<1;\\ \dfrac{x-1}{x\sqrt{x}}, & \text{якщо } 1\le x<\infty.\end{cases}$$

Знайдемо похідні: $y'=\begin{cases}\dfrac{x-3}{2x^2\sqrt{x}}, \text{якщо } 0<x<1;\\ -\dfrac{x-3}{2x^2\sqrt{x}}, \text{якщо } x>1\end{cases}$ (в точці $x=1$ y' не існує),

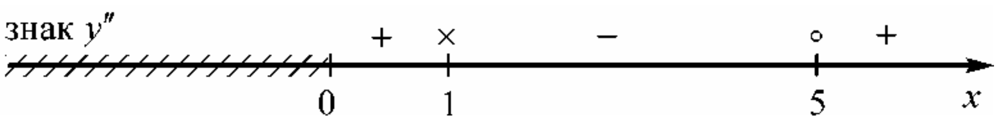
$$y''=\begin{cases}-\dfrac{3}{4}\dfrac{x-5}{x^3\sqrt{x}}, & \text{якщо } 0<x<1;\\ \dfrac{3}{4}\dfrac{x-5}{x^3\sqrt{x}}, & \text{якщо } x>1.\end{cases}$$

Далі знаходимо (див. приклад 2.2.198):

1) $D(y)$: $x>0$;

2) $y''=0$: $x_1=5$; y'' не існує: $x_2=1$;

3)



$$y''\left(\frac{1}{2}\right)>0,\ y''(2)<0,\ y''(6)>0;$$

4) в точці $x=1$ перегину немає (там не існує y', немає ні скінченної, ні нескінченної першої похідної); точка $x=5$ – точка перегину; $(0;1)$ і $(5;+\infty)$ – інтервали вгнутості; $(1;5)$ – інтервал опуклості.

Приклад 2.2.201. $y=e^{\sqrt[3]{x}}$.

Розв'язання. Знайдемо похідні:

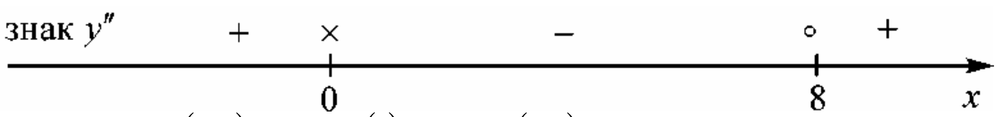
$$y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}e^{\sqrt[3]{x}},\quad y''=\frac{1}{9}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x^5}}e^{\sqrt[3]{x}}.$$

Далі знаходимо (див. приклад 2.2.198):

1) $D(y) = R$;

2) $y'' = 0$: $x_1 = 8$; y'' не існує: $x_2 = 0$;

3)



$$y''(-1) > 0,\ y''(1) < 0,\ y''(27) > 0,\ \lim_{x\to 0} y' = +\infty;$$

4) $x = 0$ – точка перегину (друга похідна, проходячи через цю точку, змінює свій знак, у точці є нескінченна перша похідна); $x = 8$ – точка перегину ;$(-\infty; 0)$ і $(8; +\infty)$ – інтервали вгнутості; $(0; 8)$ – інтервал опуклості.

Приклад 2.2.202. Застосовуючи похідні вищих порядків (більше другого), визначити, чи є точка $x = 0$ точкою перегину функції

$$y = \frac{x^3}{2} - \operatorname{tg} x + \sin x.$$

Розв'язання. Знаходимо похідні і їх значення в точці $x = 0$:

$$y' = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{\cos^2 x} + \cos x,\ y'(0) = 0;$$

$$y'' = 3x - 2\frac{\sin x}{\cos^3 x} - \sin x,\ y''(0) = 0;$$

$$y''' = 3 - 2\frac{1 + 2\sin^2 x}{\cos^4 x} - \cos x,\ y'''(0) = 0;$$

$$y^{(4)} = -8\frac{2\sin x + \sin^3 x}{\cos^5 x} + \sin x,\ y^4(0) = 0;$$

$$y^{(5)} = -8\frac{2\cos^2 x + 3\sin^2 x\cos^2 x + 10\sin x + 5\sin^3 x}{\cos^6 x} + \cos x,\ y^5(0) = -15 \neq 0.$$

Оскільки перша з похідних, які не дорівнюють нулю, п'ятого порядку, то $x = 0$ – точка перегину.

Приклад 2.2.203. Знайти точки перегину графіка функції $y = f(x)$, заданої параметричними рівняннями $x = 1 + \operatorname{ctg} t$, $y = \dfrac{\cos 2t}{\sin t}$, $0 < t < \pi$.

Розв'язання. Знайдемо похідні:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \left(\frac{-2\sin 2t\sin t - \cos 2t\cos t}{\sin^2 t}\right) : \left(-\frac{1}{\sin^2 t}\right) = \frac{1}{2}(3\cos t - \cos 3t),$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \left(-\frac{3}{2}(\sin t - \sin 3t)\right) : \left(-\frac{1}{\sin^2 t}\right) = -3\sin^3 t\cos 2t.$$

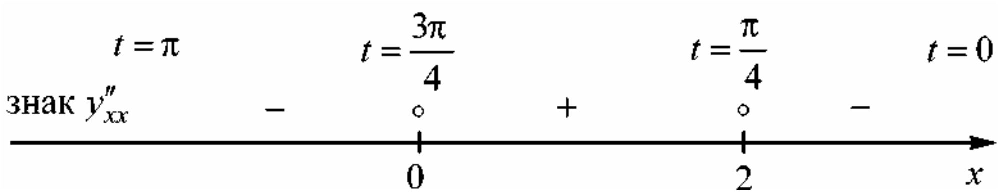
Таким чином, $y'_x = \dfrac{1}{2}(3\cos t - \cos 3t)$, $y''_{xx} = -3\sin^3 t\cos 2t$.

Далі знаходимо:

1) область визначення: коли $t \in (0; \pi)$, тоді $x \in (-\infty; +\infty)$, а y існуватиме, отже, $D(y)$: $x \in R$;

2) критичні точки 2-го роду: $y''_{xx} = 0$: $t_1 = \dfrac{\pi}{4}$, йому відповідає $x_1 = 2$; $t_2 = \dfrac{3\pi}{4}$, йому відповідає $x_2 = 0$; y''_{xx} не існує: $t \in \varnothing$;

3) знаки другої похідної на проміжках розбиття, визначених інформацією пп. 1 і 2:



$$y''\left(\frac{5\pi}{6}\right) < 0,\ y''\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0,\ y''\left(\frac{\pi}{8}\right) < 0.$$

Проходячи через точки $x = 0$ і $x = 2$ (їм відповідають значення параметра $t = \dfrac{3\pi}{4}$ і $t = \dfrac{\pi}{4}$), друга похідна змінює свій знак, отже, ці точки є точками перегину для функції $y = f(x)$.

4) точки перегину графіка цієї функції: при $t = \dfrac{3\pi}{4}$ $x = 0$ і $y = 0$, при $t = \dfrac{\pi}{4}$ $x = 2$ і $y = 0$.

Таким чином, графік має дві точки перегину $(0;0)$ і $(2;0)$.

5. Знаходження асимптот графіків функцій.

Зупинимося тільки на геометричному тлумаченні асимптот і обмежимося асимптотами, які є прямими.

Означення 2.2.14. Пряма l називається асимптотою графіка функції $y = f(x)$, якщо відстань від точки M графіка до цієї прямої прямує до нуля, коли точка M нескінченно віддаляється від початку координат.

Асимптоти бувають вертикальні та похилі. Останні, зокрема, можуть бути горизонтальними.

Функція може мати необмежену кількість вертикальних асимптот і не більше двох похилих асимптот – правої і лівої, причому права і ліва асимптоти можуть збігатися. Періодична функція може мати тільки вертикальні асимптоти.

Знаходження вертикальних асимптот.

Якщо маємо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то $x = a$ – вертикальна асимптота (замість a може стояти $a-0$, $a+0$) (рис. 2.2.27).

Знаходження похилих асимптот.

Якщо існують дві скінченні границі $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ і $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right] = b$, то $y = kx + b$ – похила асимптота (одночасно і права, і ліва). При $x \to +\infty$ знаходять одну праву асимптоту, а при $x \to -\infty$ – одну ліву (рис. 2.2.28).

Якщо $k=0$, то одержують горизонтальну асимптоту $y=b$. Горизонтальні асимптоти можуть бути одержані і окремо: якщо $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$, то $y=b$ – горизонтальна асимптота (при $x\to-\infty$ знаходять ліву асимптоту, а при $x\to+\infty$ – праву).

Якщо $k=0$ і $b=0$, то асимптотою є вісь Ox.

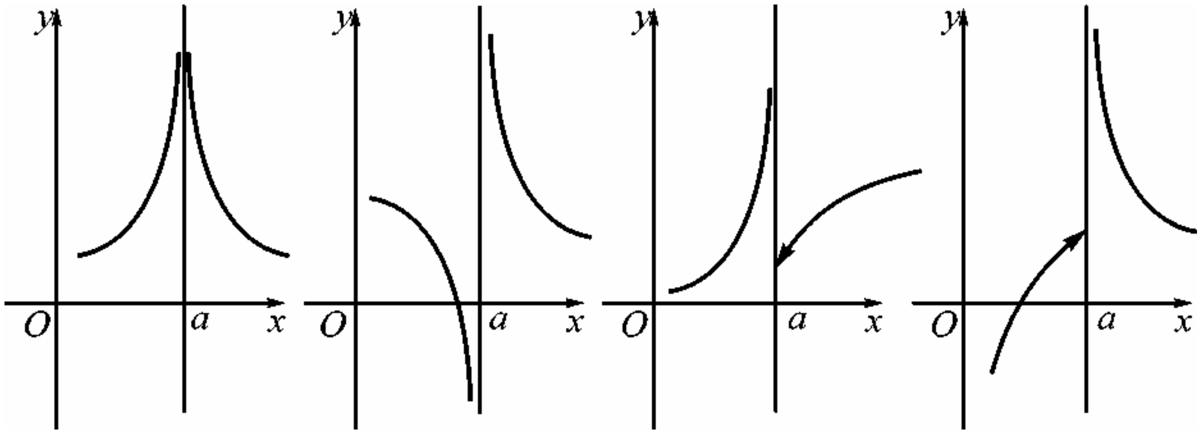


Рис. 2.2.27

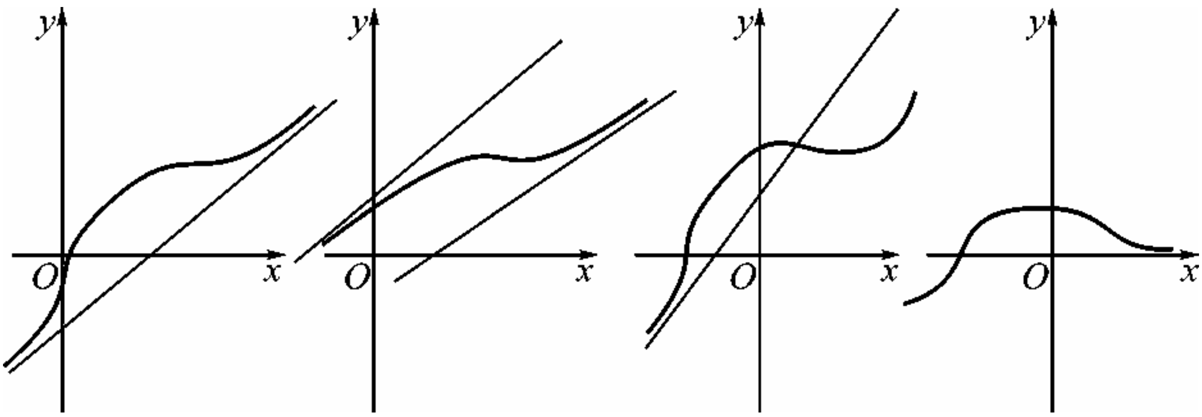


Рис. 2.2.28

Знайти асимптоти графіка функції $y=y(x)$ *(2.2.204 – 2.2.211).*

Приклад 2.2.204. $y=\dfrac{x^2}{x+1}$.

Розв'язання. Оскільки $\lim\limits_{x\to-1} y=\infty$, то $x=-1$ – вертикальна асимптота (права і ліва).

Далі знаходимо: $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x(x+1)}=1$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-kx)=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x}{x+1}=-1\Rightarrow y=kx+b=x-1$ – похила асимптота (права і ліва). Ескіз графіка зображено на рис. 2.2.29.

Приклад 2.2.205. $y=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+1}$.

Розв'язання.

Зауваження. Вертикальні асимптоти можуть існувати, якщо функція має точки розриву або є нескінченною в крайніх точках області визначення.

У даному прикладі функція не має точок розриву, не має вона також крайніх точок області визначення, а тому й вертикальних асимптот.

Видно, що $\lim\limits_{x\to\infty} y = 1$, тобто $y = 1$ – горизонтальна асимптота (і права, і ліва), других асимптот бути не може.

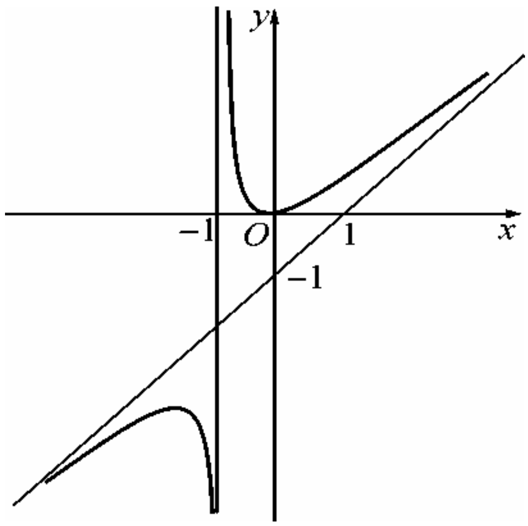


Рис. 2.2.29

Приклад 2.2.206. $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$.

Розв'язання. Область визначення $D(y)$: $x \le 0 \cup x > 2$.

Оскільки $\lim\limits_{x\to 2+0} y = \infty$, то $x = 2$ – ліва вертикальна асимптота.

Далі знаходимо: $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{|x|}{x}\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}\right) \Rightarrow$ при $x \to -\infty$ $k = -1$, при $x \to +\infty$ $k = 1$; нехай $x \to -\infty$, тоді $b = \lim\limits_{x\to-\infty}(y - kx) =$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{\frac{x}{x-2}} + x\right) = -\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(\sqrt{\frac{x}{x-2}} - 1\right)\right](\infty\cdot 0) = -\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(\dfrac{x}{x-2} - 1\right)}{\sqrt{\dfrac{x}{x-2}} + 1} =$$

$$= -\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{(x-2)\left(\sqrt{\dfrac{x}{x-2}} + 1\right)} = -2\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x\left(1 - \dfrac{2}{x}\right)\left(\sqrt{\dfrac{1}{1-\dfrac{2}{x}}} + 1\right)} = -1,$$ аналогічно

при $x \to +\infty$ $b = 1$.

Отже, маємо дві похилі асимптоти: ліву $y = -x - 1$ і праву $y = x + 1$.

Ескіз графіка зображено на рис. 2.2.30.

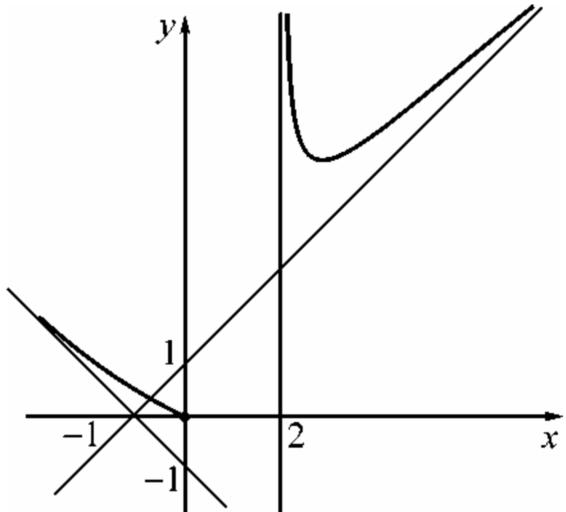


Рис. 2.2.30

Приклад 2.2.207. $y = e^{-\frac{1}{x}}$.

Розв'язання. Область визначення $D(y)$: $x \ne 0 \Rightarrow x = 0$ – точка розриву.

Дослідимо поведінку функції при $x \to 0$. Звичайно, $\lim\limits_{x\to 0} y$ не існує, але $\lim\limits_{x\to -0} y = +\infty$, а $\lim\limits_{x\to +0} y = 0$, тобто графік має праву вертикальну асимптоту $x = 0$. Оскільки $\lim\limits_{x\to\infty} y = 1$, то графік має горизонтальну асимптоту $y = 1$ (вона є і правою, і лівою). Інших асимптот графік не може мати.

Ескіз графіка зображено на рис. 2.2.31.

Приклад 2.2.208. $y = xe^{\frac{2}{x}} + 1$.

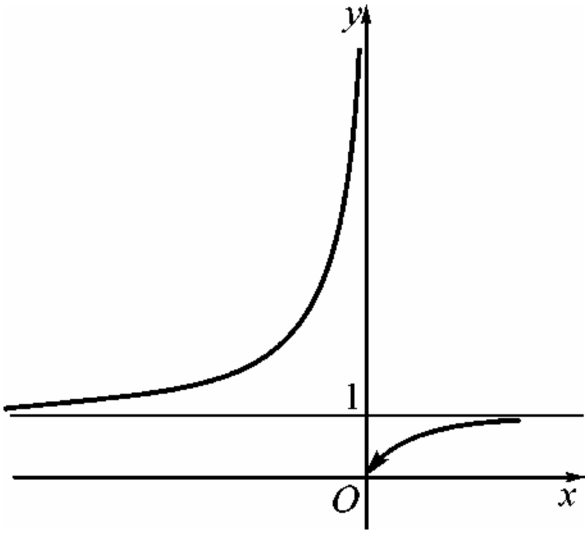


Рис. 2.2.31

Розв'язання.
Знаходимо:
1) $D(y)$: $x \neq 0$;
2) вертикальні асимптоти:

$$\lim_{x\to -0} y = 1,$$

$$\lim_{x\to +0} y = 1 + \lim_{x\to +0}\left(xe^{\frac{2}{x}}\right)(0\cdot\infty) =$$

$$= 1 + \lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{2}{x}}}{\frac{1}{x}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to +0}\frac{e^{\frac{2}{x}}\left(-\frac{2}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} + 1 =$$

$= 2\lim\limits_{x\to +0} e^{\frac{2}{x}} + 1 = \infty \Rightarrow$ $x = 0$ – ліва вертикальна асимптота;

3) похилі асимптоти: $k = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x} + e^{\frac{2}{x}}\right) = 1$, $b = \lim\limits_{x\to\infty}(y - kx) =$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1 + xe^{\frac{2}{x}} - x\right) = 1 + \lim_{x\to\infty}\left(x\left(e^{\frac{2}{x}} - 1\right)\right) = 1 + \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{2}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = 1 + \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{2}{x}}\left(-\frac{2}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$= 1 + 2\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{2}{x}} = 3 \Rightarrow$ $y = kx + b = x + 3$ – похила асимптота (і права, і ліва).

Приклад 2.2.209. $y = x + \frac{\ln x}{x}$.

Розв'язання. Знаходимо:

1) $D(y)$: $x > 0$;

2) $\lim\limits_{x\to +0} y = \lim\limits_{x\to +0}\left(x + \frac{\ln x}{x}\right) = \infty \Rightarrow$ $x = 0$ – ліва вертикальна асимптота;

3) $k = \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(1 + \frac{\ln x}{x^2}\right) = 1 + \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^2}\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = 1 + \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x} = 1 + \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{2x^2} = 1$;

4) $b = \lim\limits_{x\to +\infty}(y - kx) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(x + \frac{\ln x}{x} - x\right) = 0 \Rightarrow y = x$ – права похила асимптота.

Приклад 2.2.210. $y = 2x - \operatorname{arctg}\frac{x}{2}$.

Розв'язання. Знаходимо:

1) $D(y)$: $x \in R$, отже, вертикальних асимптот не існує;

2) $k = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim\left(2 - \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{x}\right) = 2$, $b_1 = \lim\limits_{x\to-\infty}(y - kx) =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x - \operatorname{arctg}\frac{x}{2} - 2x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$; $b_2 = \lim\limits_{x\to+\infty}(y - kx) =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$; $y = 2x + \frac{\pi}{2}$ – ліва, $y = 2x - \frac{\pi}{2}$ – права асимптоти.

Приклад 2.2.211. $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

Розв'язання. Знаходимо:

1) $D(y): 1 + \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow x < -1 \cup x > 0$;

2) вертикальні асимптоти, для чого досліджуємо поведінку функції в крайніх точках області визначення:

$\lim\limits_{x\to-1-0} y = \lim\limits_{x\to-1-0}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left((+0)^{-1}\right) = +\infty \Rightarrow x = -1$ – права вертикальна асимптота; $\lim\limits_{x\to+0} y = \lim\limits_{x\to+0}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left(\infty^0\right) = e^{\lim\limits_{x\to+0}\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)} =$

$$= \left|\lim_{x\to+0}\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to+0}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+0}\frac{-\frac{1}{x^2}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)} =\right.$$

$$\left. = \lim_{x\to+0}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 0\right| = e^0 = 1 \Rightarrow x = 0$$ не є лівою вертикальною асимптотою;

3) похилі асимптоти: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \Rightarrow y = e$ – горизонтальна асимптота.

Ескіз графіка зображено на рис. 2.2.32.

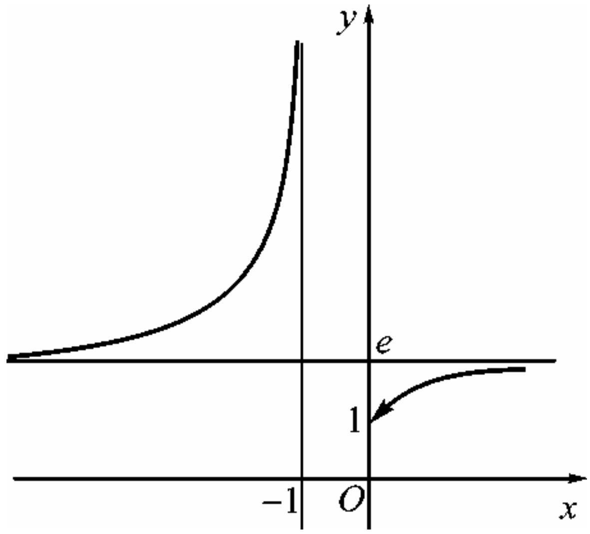


Рис. 2.2.32

6. Розв'язання нерівностей за допомогою похідних.

Нехай є проміжок одного із виглядів: $[a;\ b]$, $[a;\ b)$, $[a;\ +\infty)$.

Із властивостей неперервних і диференційовних функцій випливає: якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку G, її похідна $f'(x)$ існує і $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) на G, крім, може бути, зліченної множини точок, то $f(x)>f(a)$ ($f(x)<f(a)$) $\forall x\in G$ і $x\neq a$.

Припустимо, що треба довести нерівність $f_1(x)>f_2(x)$ $\forall x\in G$, $x\neq a$.

Складемо функцію: $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$.

Нехай $f(a)=0$ і $f'(x)>0$ $\forall x\in G$, $x\neq a$, тоді $f(x)>f(a)=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(x)>0\Leftrightarrow f_1(x)-f_2(x)>0\Leftrightarrow f_1(x)>f_2(x)$, що й треба було довести.

Довести нерівності (2.2.212 – 2.2.216).

Приклад 2.2.212. $\sin x<x,\ x>0$.

Розв'язання. Складемо функцію: $f(x)=\sin x-x$, $f(x)$ – неперервна і диференційовна при $x\geq 0$, $f(0)=0$.

Знайдемо похідну $f'(x)=\cos x-1$.

Очевидно, що при $x>0$ $f'(x)<0$, крім зліченної множини точок $x_k=2\pi k$, $k\in Z$, тому $f(x)<0\Leftrightarrow \sin x-x<0\Leftrightarrow \sin x<x$ для $x>0$, що й треба було довести.

Приклад 2.2.213. $x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x,\ x>0$.

Розв'язання.

1) Доведемо, що $\ln(1+x)<x$, $x>0$.

Складемо функцію: $f(x)=\ln(1+x)-x$.

Далі маємо: $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1=-\dfrac{x}{1+x}\Rightarrow f'(x)<0\ \forall x>0\Rightarrow f(x)<f(0)=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \ln(1+x)-x<0\Leftrightarrow \ln(1+x)<x\ \forall x>0$.

2) Доведемо, що $\ln(1+x)>x-\dfrac{x^2}{2}$, $x>0$.

Складемо функцію: $\varphi(x)=\ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}$.

Далі маємо: $\varphi'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1+x=\dfrac{1+x^2-1}{1+x}=\dfrac{x^2}{1+x}$; $\varphi'(x)>0\quad\forall\quad x>0\Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi(x)>\varphi(0)=0\Leftrightarrow \ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}>0\Leftrightarrow \ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}\quad\forall\quad x>0.$$

Із кроків 1 і 2 випливає, що $x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)x$, $x>0$.

Приклад 2.2.214. $\operatorname{arctg} x\leq x$, $x\geq 0$.

Розв'язання. Для $x=0$ маємо $\operatorname{arctg} x=x$.

Доведемо, що $\operatorname{arctg} x<x$ для $x>0$.

Складемо функцію: $f(x) = \operatorname{arctg} x - x$.

Маємо $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - 1 = -\dfrac{x^2}{1+x^2}$, $f'(x) < 0 \ \forall x > 0 \Rightarrow f(x) < f(0) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \operatorname{arctg} x < x \ \forall x > 0$.

Тому для $x \ge 0$ справедливе $\operatorname{arctg} x \le x$.

Приклад 2.2.215. $\cos x \ge 1 - \dfrac{x^2}{2}$, $x \in R$.

Розв'язання. Для $x = 0$ маємо $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

Доведемо, що $\cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2}$ для $x > 0$.

Складемо функцію: $f(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$.

Маємо $f'(x) = \sin x + x$. Тепер, в свою чергу, доведемо, що $\sin x + x > 0$ для $x > 0$.

Позначимо $\varphi(x) = \sin x + x$. Знайдемо $\varphi' = \cos x + 1$, $\varphi'(x) > 0$, крім зліченної множини точок $x_k = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$, тому $\varphi(x) = \sin x + x > \varphi(0) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \sin x + x > 0 \ \forall x > 0$, але тоді і $f(x) > f(0) = 0 \Rightarrow \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2} > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2} \ \forall x > 0$.

Оскільки в обох частинах вихідної нерівності стоять парні функції, то нерівність $\cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2}$ справедлива для $x < 0$. Для всієї області $x \in R$ справедливе $\cos x \ge 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

Приклад 2.2.216. $e^{\frac{x+y}{2}} < \dfrac{e^x + e^y}{2}$, $x, y \in R$, $x \ne y$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = e^x$. Оскільки $f''(x) = e^x > 0$, то $f(x)$ – угнута для $x \in R$. За означенням угнутої функції маємо $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) < \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$, де $x_1, x_2 \in R$, $x_1 \ne x_2$, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Для $f(x) = e^x$ нерівність матиме вигляд $e^{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2} < \alpha_1 e^{x_1} + \alpha_2 e^{x_2}$.

Прийнявши $x_1 = x$, $x_2 = y$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dfrac{1}{2}$, одержимо $e^{\frac{x+y}{2}} < \dfrac{e^x + e^y}{2}$.

2.2.8. Побудова графіків функцій

1. Графіки явно заданих функцій в декартовій системі координат.
Задача полягає в побудові графіків функцій вигляду $y = f(x)$.

План дослідження.

Для функцій $y = f(x)$ треба знайти (виявити):

1) парність, непарність, періодичність;
2) область визначення $D(f)$, точки розриву;
3) нулі функції;
4) інтервали знакосталості;
5) асимптоти;
6) критичні точки 1-го роду;
7) інтервали монотонності;
8) точки екстремуму і екстремуми;
9) критичні точки 2-го роду;
10) інтервали опуклості і вгнутості;
11) точки перегину функції та графіка функції;
12) декілька допоміжних точок графіка (за необхідності).

Після цього за одержаною інформацією треба побудувати графік функції.

Побудувати графіки заданих функцій (2.2.217 – 2.2.221).

Приклад 2.2.217. $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$.

Розв'язання. Спочатку знаходимо похідні: $y' = \dfrac{6x}{\left(x^2 - 1\right)^2}$, $y'' = -6\dfrac{3x^2 + 1}{\left(x^2 - 1\right)^3}$.

Відповідно до плану дослідження маємо (рис. 2.2.33):

1. Функція парна, і тому графік можна спочатку будувати для $x \geq 0$, а потім одержати другу половину, симетричну відносно осі Oy, для $x < 0$. Отже, функція – неперіодична.

2. $D(y)$: $x \neq \pm 1$, $x = \pm 1$ – точки розриву.

3. Нулі функції: $x = \pm 2$.

4. Інтервали знакосталості.

У результаті нанесення інформації, одержаної в пп. 1 і 2, на числову вісь остання розбилась на проміжки знакосталості. Для визначення знака функції на будь-якому інтервалі достатньо знайти знак функції у внутрішній точці цього інтервалу: $y\left(\dfrac{1}{2}\right) > 0$, $y\left(\dfrac{3}{2}\right) < 0$, $y(3) > 0$.

Знаки функції на відповідних інтервалах зразу наносимо на площину.

5. Асимптоти.

Оскільки $\lim\limits_{x \to \pm 1} y = \infty$, то $x = \pm 1$ – вертикальні асимптоти.

Оскільки $\lim\limits_{x \to \infty} y = 1$, то похила асимптота $y = 1$ (вона є і правою, і лівою) – горизонтальна.

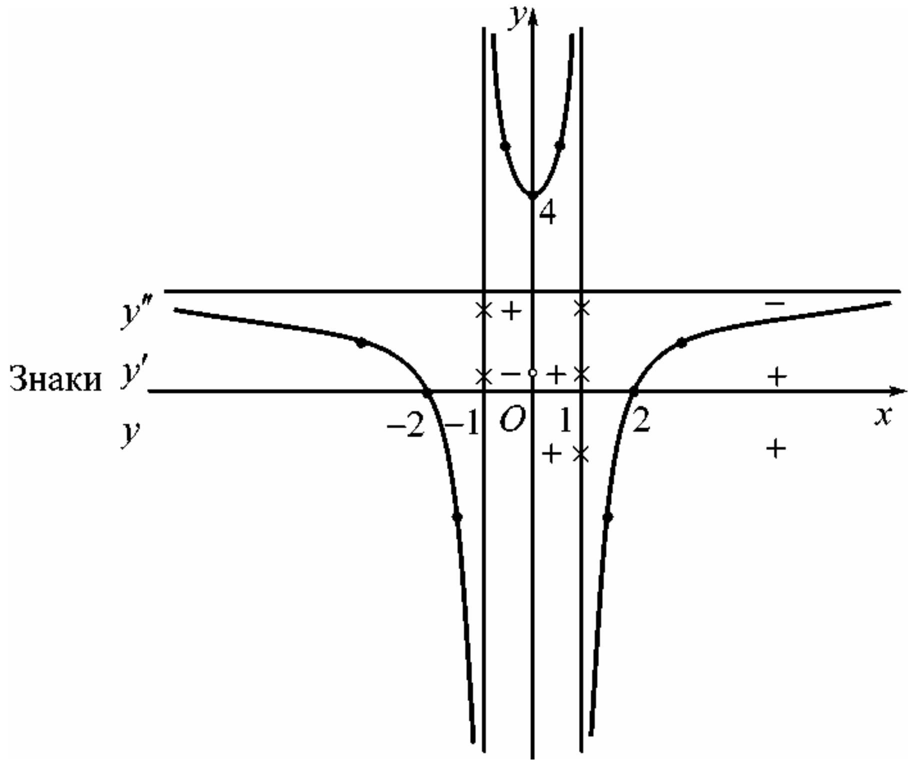


Рис. 2.2.33

6. Критичні точки 1-го роду: $y' = 0$: $x_1 = 0$; y' не існує (точки розриву y'): $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

7. Інтервали монотонності.

Область визначення похідної y' розбито на проміжки знакосталості для y' (а тому і на проміжки монотонності для y). Знаходимо знак похідної на кожному інтервалі: $y'\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$, $y'\left(\frac{1}{2}\right) > 0$, $y'(3) > 0 \Rightarrow (-1;\,0)$ – інтервал спадання; $(0;\ 1)$, $(1;\,+\infty)$ – інтервали зростання.

8. Точки екстремуму. Локальні екстремуми функції.

Із пп. 6, 7 випливає: $x = 0$ – точка мінімуму, $y_{\min} = y(0) = 4$; в точці $x = 1$ екстремуму немає (ця точка не належить області визначення, в цій точці похідна також не змінює свого знака).

9. Критичні точки 2-го роду: $y'' = 0$: $x \in \varnothing$; y'' не існує (точки розриву y''): $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

10. Інтервали опуклості і угнутості.

Область визначення похідної y'' розбито на проміжки знакосталості для y'' (а тому і на проміжки опуклості і угнутості для y). Знаходимо знак похідної другого порядку на кожному інтервалі (нагадаємо, що основна увага – на область $x \geq 0$): $y''(0) > 0$, $y''(3) < 0 \Rightarrow (-1;\,1)$ – інтервал угнутості; $(1;\,+\infty)$ – інтервал опуклості.

11. Точки перегину функції та графіка функції.

Із пп. 9, 10 випливає, що точок перегину функція і її графік не мають (критична точка $x = 1$ не належить області визначення).

12. Для уточнення графіка знайдемо декілька його точок:

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	3
y	5	$-1{,}4$	$0{,}625$

За одержаною в результаті дослідження інформацією, а вона вся нанесена на площину, будуємо графік даної функції.

Таким чином, $x=\pm 1$ – точки розриву; $x=\pm 2$ – нулі; $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$ – інтервали спадання; $(0;1)$, $(1;\infty)$ – інтервали зростання; $(-\infty;-1)$, $(1;+\infty)$ – інтервали опуклості; $(1;1)$ – інтервал угнутості.

Приклад 2.2.218. $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$.

Розв'язання. Знаходимо похідні: $y'=\dfrac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$, $y''=\dfrac{3x}{(x+1)^4}$.

Проводимо дослідження (докладно див. у прикладі 2.2.217) (рис. 2.2.34):

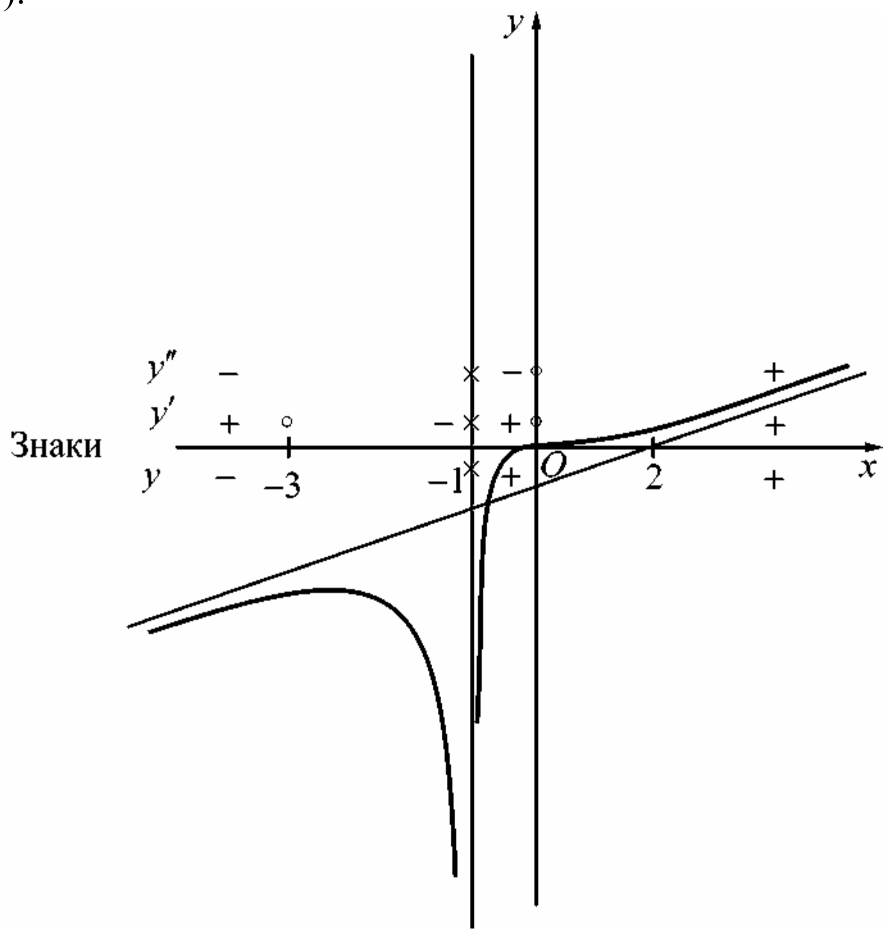


Рис. 2.2.34

1) функція ні парна, ні непарна, неперіодична;
2) $D(y)$: $x\neq -1$, $x=-1$ – точка розриву;
3) $y=0$: $x_1=0$;
4) $y(-2)<0$, $y\left(-\frac{1}{2}\right)<0$, $y(1)>0$;
5) $\lim\limits_{x\to -1} y=\infty \Rightarrow$ $x=-1$ – вертикальна асимптота; $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{2}$;

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2(x+1)^2}-\frac{1}{2}x\right)=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3-2x^2-x}{(x+1)^2}=-1\Rightarrow$$

$\Rightarrow y=\dfrac{1}{2}x-1$ – похила асимптота;

6) $y'=0$: $x_1=0$, $x_2=-3$; y' не існує: $x_3=-1$;

7) $y'(-4)>0$, $y'(-2)<0$, $y'\left(-\dfrac{1}{2}\right)>0$, $y'(1)>0$;

8) $x=-3$ – точка максимуму, $y_{\max}=y(-3)=-\dfrac{27}{8}$; в точках $x=0$ і $x=-1$ екстремуму немає;

9) $y''=0$: $x_1=0$; y'' не існує: $x_2=-1$;

10) $y''(-2)<0$, $y''\left(-\dfrac{1}{2}\right)<0$, $y''(3)>0$;

11) $x=0$ – точка перегину функції, $y(0)=0\Rightarrow$ $(0;\,0)$ – точка перегину графіка функції;

12)

x	-2	$-\frac{1}{2}$	1
y	-4	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

.

Будуємо графік.

Остаточно маємо: $x=-1$ – точка розриву; $(-\infty;-3)$, $(-1;\infty)$ – інтервали зростання; $(-3;-1)$ – інтервал спадання; $x_{\max}=-3$, $y_{\max}=-\dfrac{27}{8}$; на інтервалах $(-\infty;-1)$, $(1;\,0)$ функція опукла, на $(0;+\infty)$ – угнута; $(0;0)$ – точка перегину; $x=-1$, $y=\dfrac{1}{2}x-1$ – асимптоти.

Приклад 2.2.219. $y=\sqrt[3]{x^3-6x^2}$.

Розв'язання. Перетворимо функцію: $y=\sqrt[3]{x^2(x-6)}$.

Знаходимо похідні:

$$y'=\frac{x-4}{\sqrt[3]{x(x-6)^2}},$$

$$y''=-\frac{8}{\sqrt[3]{x^4(x-6)^5}}.$$

Досліджуємо функцію (див. приклад 2.2.217) (рис. 2.2.35):

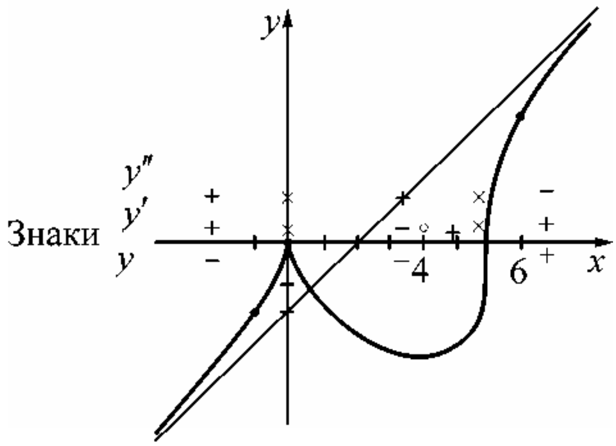


Рис. 2.2.35

1) функція ні парна, ні непарна, неперіодична;

2) $D(y)=R$;

3) $y=0$: $x_1=0$, $x_2=6$;

4) $y(-1)<0$, $y(1)<0$, $y(7)>0$;

5) вертикальних асимптот немає; $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{y}{x} = 1$, $b =$

$$= \lim_{x\to\infty}(y - kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3 - 6x^2} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 6x^2 - x^3}{\sqrt[3]{\left(x^3 - 6x^2\right)^2} + x\sqrt[3]{x^3 - 6x^2} + x^2} = -2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = kx + b = \, = x - 2$ – похила асимптота (і права, і ліва);

6) $y' = 0$: $x_1 = 4$; y' не існує: $x_2 = 0$, $x_3 = 6$;

7) $y'(-1) > 0$, $y'(3) < 0$, $y'(5) > 0$, $y'(7) > 0$;

8) $x = 0$ – точка максимуму, $y_{\max} = y(0) = 0$; $x = 4$ – точка мінімуму, $y_{\min} = y(4) = -\sqrt[3]{4}$; в точці $x = 6$ екстремуму немає;

9) $y'' = 0$: $x \in \varnothing$; y'' не існує: $x_1 = 0$, $x_2 = 6$;

10) $y''(-1) > 0$, $y''(3) > 0$, $y''(7) < 0$;

11) точка $x = 0$ не може бути точкою перегину (y'' в цій точці не змінює свого знака), тому поведінка y' в цій точці нас не цікавить; в точці $x = 6$ друга похідна змінює свій знак, тому треба знайти поведінку похідної y' в цій точці; знайдемо $\lim\limits_{x\to 6} y' = +\infty$, отже, $x = 6$ – точка перегину (зауважимо: оскільки $\lim\limits_{x\to -0} y' = +\infty$, а $\lim\limits_{x\to +0} y' = -\infty$, то похідна в точці $x = 0$ не існує), в точці $x = 6$ існує нескінченна похідна y';

12)

x	-1	7
y	$-\sqrt[3]{7}$	$\sqrt[3]{49}$

.

Будуємо графік функції.

Таким чином, маємо: $(-\infty; 0)$ і $(4; +\infty)$ – інтервали зростання; $(0; 4)$ – інтервал спадання; $x_{\max} = 0$, $y_{\max} = 0$; $x_{\min} = 4$, $y_{\min} = -2\sqrt[3]{4}$; $(-\infty; 0)$ і $(0; 6)$ – інтервали вгнутості; $(6; +\infty)$ – інтервал опуклості; $(6; 0)$ – перегин; $y = x - 2$ – асимптота.

Приклад 2.2.220. $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

Розв'язання. Знаходимо похідні: $y' = (2x - 1)e^{\frac{1}{x}}$, $y'' = \dfrac{2x^2 - 2x + 1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$.

Ведемо дослідження функції (див. приклад 2.2.217) (рис. 2.2.36):

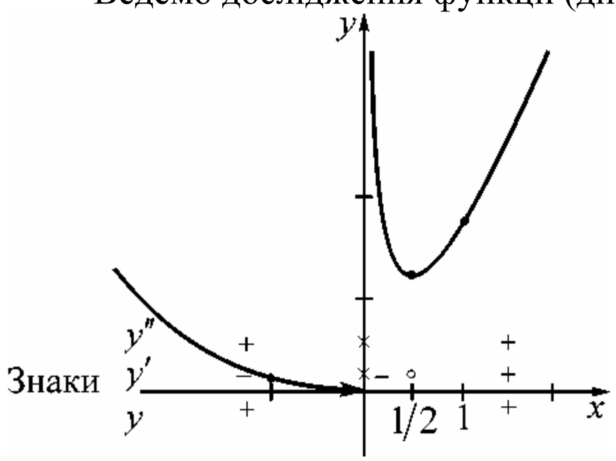


Рис. 2.2.36

1) функція ні парна, ні непарна, неперіодична;

2) $D(y)$: $x \neq 0$, $x = 0$ – точка розриву;

3) $y = 0$: $x \in \varnothing$;

4) $y(-1) > 0$, $y(1) > 0$;

5) $\lim\limits_{x\to -0} y = \lim\limits_{x\to -0}\left(x^2 e^{\frac{1}{x}}\right) = 0$,

$$\lim_{x\to+0} y = \lim_{x\to+0}\left(x^2 e^{\frac{1}{x}}\right) = (0\cdot\infty) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{x} = y, \quad x = \dfrac{1}{y}, \\ \text{при } x \to +0 \ y \to +\infty \end{array} \right| = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^y}{y^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^y}{2y} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^y}{2} = +\infty \Rightarrow x = 0$ – ліва вертикальна асимптота; $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(x e^{\frac{1}{x}}\right) =$

$= \infty \Rightarrow$ похилих асимптот немає;

6) $y' = 0$: $x_1 = \dfrac{1}{2}$; y' не існує: $x_2 = 0$;

7) $y'(-1) < 0$, $y'\left(\dfrac{1}{4}\right) < 0$, $y'(2) > 0$;

8) $x = \dfrac{1}{2}$ – точка мінімуму, $y_{\min} = y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}e^2$;

9) $y'' = 0$: $x \in \varnothing$; y'' не існує: $x_1 = 0$;

10) $y'' > 0$, якщо $x \neq 0$;

11) точок перегину немає;

12)

x	-1	1
y	e^{-1}	e

.

Будуємо графік функції.

Отже, маємо: $x = 0$ – точка розриву; $(-\infty; 0)$ і $\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$ – інтервали спадання; $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$ – інтервали зростання; $x_{\min} = \dfrac{1}{2}$, $y_{\min} = \dfrac{1}{4}e^2$; $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ – інтервали вгнутості; $x = 0$ – асимптота.

Приклад 2.2.221. $y = \dfrac{\cos 2x}{\sin x}$.

Розв'язання. Знаходимо похідні:

$$y' = -\frac{\cos x\left(1 + 2\sin^2 x\right)}{\sin^2 x}, \quad y'' = \frac{1 + \cos^2 x + 2\sin^4 x}{\sin^3 x}.$$

Досліджуємо функцію (див. приклад 2.2.217) (рис. 2.2.37):

1) функція періодична з періодом $T = 2\pi$, тому її можна розглядати на будь-якому проміжку величиною 2π, зупинимося на проміжку $[-\pi; \pi]$; крім того, функція непарна, тому проміжок можна скоротити до $[0; \pi]$, побудуємо першу частину графіка на проміжку $[0; \pi]$, добудуємо другу частину, симетричну першій відносно початку координат, на проміжку $[-\pi; 0]$, а потім одержаний в результаті цих двох кроків графік періодично продовжимо на всю числову вісь;

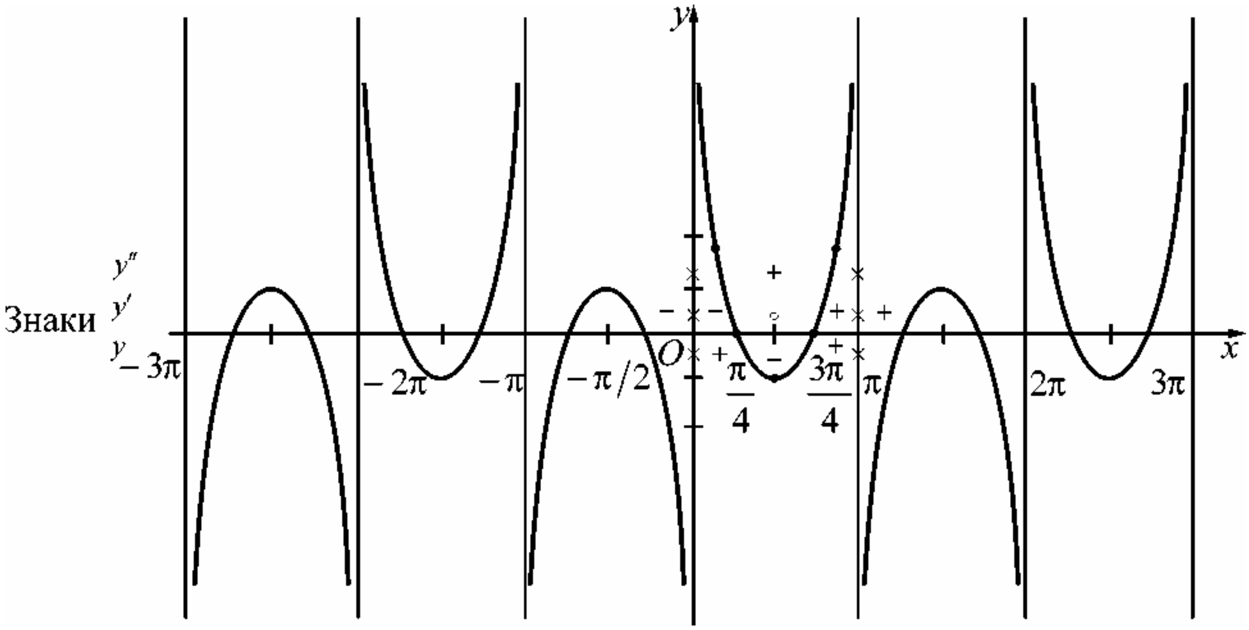


Рис. 2.2.37

2) $D(y): x \neq 0$, $x \neq \pi$; $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$ – точки розриву;

3) $y = 0$: $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{3\pi}{4}$;

4) $y\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$, $y\left(\pi - \frac{\pi}{8} > 0\right)$;

5) вертикальні асимптоти: оскільки $\lim\limits_{x \to 0} y = \infty$ і $\lim\limits_{x \to \pi} y = \infty$, то $x = 0$ і $x = \pi$ – вертикальні асимптоти; похилих асимптот немає (періодична функція не може мати похилих асимптот);

6) $y' = 0$: $x_1 = \frac{\pi}{2}$; y' не існує: $x_2 = 0$, $x_3 = \pi$;

7) $y'\left(-\frac{\pi}{8}\right) < 0$, $y'\left(\frac{\pi}{8}\right) < 0$, $y'\left(\frac{3\pi}{4}\right) > 0$, $y'\left(\pi + \frac{\pi}{8}\right) > 0$;

8) $x_1 = \frac{\pi}{2}$ – точка мінімуму, $y_{\min} = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$;

9) $y'' = 0$: $x \in \varnothing$; y'' не існує: $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$;

10) $y'' > 0$ в області визначення;

11) точок перегину ні функція, ні графік функції не мають;

12)

x	$\frac{\pi}{8}$	$7\frac{\pi}{8}$
y	$\approx 1{,}8$	$\approx 1{,}8$

.

За одержаними даними будуємо графік.

Для даної функції маємо: $x = \pi k$ – точки розриву; $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ 2\pi k\right)$ і $\left(2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$ – інтервали спадання; $\left(-\pi + 2\pi k;\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$ і $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \pi + 2\pi k\right)$ – інтервали зростання; $x_{\max} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $y_{\max} = 1$;

$x_{\min} = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $y_{\min} = -1$; $(-\pi + 2\pi k; 2\pi k)$ – інтервал опуклості; $(2\pi k; \pi + 2\pi k)$ – інтервал угнутості, $k \in Z$.

2. Графіки параметрично заданих функцій в декартовій системі координат.

Задача полягає в побудові графіків функцій $y = f(x)$, заданих параметрично рівняннями $x = x(t)$ і $y = y(t)$.

План дослідження:

1. Виявляємо, чи має крива період (відносно параметра t), симетрію.
2. Знаходимо множину G – спільну частину областей визначення функцій $x(t)$ і $y(t)$.
3. Знаходимо нулі та точки розриву функцій $x(t)$, $y(t)$, $x'(t)$, $y'(t)$, $y''(t)$.
4. Будуємо таблицю, перший рядок якої має вигляд $t \,|\, -\infty, \ldots, t_k, (t_k; t_{k+1}), t_{k+1}, \ldots, +\infty$ (t_k одержані в п. 3), а до наступних рядків заносимо відповідні значення $x(t)$, $y(t)$, $y'(t)$, $y''(t)$. Робимо висновки стосовно проміжків зростання, спадання, опуклості, вгнутості, точок екстремуму, екстремумів, точок перегину графіка.
5. Знаходимо асимптоти функції $y(x)$.
6. Знаходимо декілька допоміжних точок графіка (за необхідності).

За одержаною інформацією будуємо графік функції.

Зауваження:

1. Стосовно симетрії графіка:

а) якщо $\forall t \in G$: $x(-t) = x(t)$, $y(-t) = -y(t)$, то графік симетричний відносно осі Ox;

б) якщо $\forall t \in G$: $x(-t) = -x(t)$, $y(-t) = y(t)$, то графік симетричний відносно осі Oy;

в) якщо $\forall t \in G$: $x(-t) = -x(t)$, $y(-t) = -y(t)$, то графік симетричний відносно початку координат;

г) якщо $\forall t \in G$: $x(-t) = x(t)$, $y(-t) = y(t)$, то графіки, одержані окремо при $t \le 0$ і $t \ge 0$, накладаються.

У кожному випадку достатньо побудувати графік для $t \ge 0$, а потім скористатися симетрією графіка для побудови його при $t < 0$.

2. Стосовно знаходження асимптот:

а) якщо при $t \to t_0$ $x \to x_0$, а $y \to \infty$, то $x = x_0$ – вертикальна асимптота;

б) якщо при $t \to t_0$ $x \to \infty$, а $y \to y_0$, то $y = y_0$ – горизонтальна асимптота;

в) якщо при $t \to t_0$ $x \to \infty$ і $y \to \infty$, то можлива похила асимптота, яку треба шукати розглянутим методом (t_0 – скінченне число, ∞, $-\infty$, $+\infty$).

Побудувати графіки функцій (2.2.222 – 2.2.225).

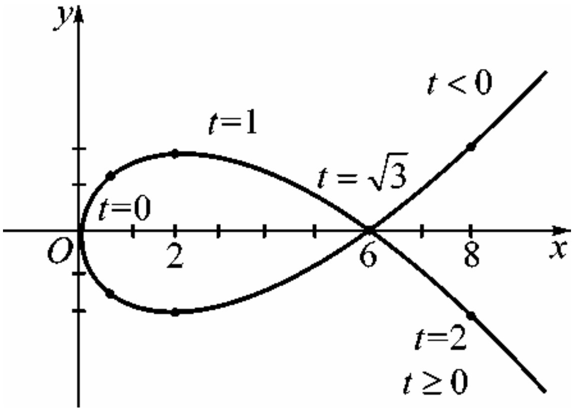


Рис. 2.2.38

Приклад 2.2.222. $x = 2t^2$, $y = 3t - t^3$.

Розв'язання. Знаходимо похідні:

$x'_t = 4t$, $y'_t = 3\left(1 - t^2\right)$, $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{3}{4}\dfrac{1-t^2}{t}$,

$$y''_{xx} = \frac{\left(y'_t\right)'_t}{x'_t} = -\frac{3}{4}\frac{1+2t^2}{t^2}.$$

Далі відповідно до плану дослідження маємо (рис. 2.2.38):

1) функція не періодична відносно параметра t, а оскільки $x(-t) = x(t)$, $y(-t) = -y(t)$, то графік симетричний відносно осі Ox;

2) G: $t \in R$; враховуючи симетрію графіка, побудуємо його спочатку при $t \ge 0$, а потім скористаємося симетричністю;

3) $x(t) = 0$: $t_1 = 0$; $x(t)$ не існує: $t \in \varnothing$;

$y(t) = 0$: $t_1 = 0$, $t_{2,\,3} = \pm\sqrt{3}$; $y(t)$ не існує: $t \in \varnothing$;

$x'(t) = 0$: $t_1 = 0$; $x'(t)$ не існує: $t \in \varnothing$;

$y'(t) = 0$: $t_{1,\,2} = \pm 1$; $y'(t)$ не існує: $t \in \varnothing$;

$y''(x) = 0$: $t \in \varnothing$; $y''(x)$ не існує: $t_1 = 0$;

4) складаємо таблицю

t	0	$(0;\ 1)$	1	$\left(1;\ \sqrt{3}\right)$	$\sqrt{3}$	$\left(\sqrt{3};\ +\infty\right)$	$+\infty$
$x(t)$	0		2		6		$+\infty$
$y(t)$	0		2		0		$-\infty$
$y'_x(t)$	×	+	0	–	–	–	
$y''_{xx}(t)$	×	–	–	–	–	–	

(заповнені ті клітини таблиці, які нас цікавлять; × – означає “не існує”) і бачимо, що при $t \ge 0$ функція зростає на проміжку $(0;\ 2)$ і спадає на проміжку $(2;\ +\infty)$; $x_{\max} = 2$, $y_{\max} = 2$; графік всюди опуклий;

5) знаходимо асимптоти:

– при скінченних t ні $x(t)$, ні $y(t)$ не прямують до нескінченності, тому ні вертикальних, ні горизонтальних асимптот графік не має;

– при $t \to \infty$ $x \to \infty$ і $y \to \infty$, тому можуть бути похилі асимптоти, знаходимо їх:

$k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{y(x)}{x} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{3t - t^3}{2t^2} = \infty \Rightarrow$ похилих асимптот не може бути;

6) знаходимо допоміжні точки графіка:

t	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2
$x(t)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$	8
$y(t)$	$\frac{11}{8}$	$\frac{9}{8}$	-2 .

За одержаною інформацією будуємо графік при $t \geq 0$ і, користуючись симетричністю, добудовуємо його при $t < 0$.

Отже, графік симетричний відносно осі Ox; при $t \geq 0$: $(0; 2)$ – інтервал зростання, $(2;+\infty)$ – інтервал спадання; $x_{\max} = 2$, $y_{\max} = 2$; графік всюди опуклий.

Приклад 2.2.223. $x = \dfrac{t^2}{4(1-t)}$, $y = \dfrac{t^3}{8(t-1)}$.

Розв'язання. Знаходимо похідні: $x_t' = \dfrac{t(2-t)}{4(1-t^2)}$, $y_t' = \dfrac{t^2(2t-3)}{8(t-1)^2}$,

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'} = -\frac{1}{2}\frac{t(2t-3)}{t-2},\ y_{xx}'' = \frac{\left(y_x'\right)_t'}{x_t'} = \frac{4(t-1)^3(t-3)}{t(t-2)^3}.$$

Проводимо дослідження (див. приклад 2.2.222) (рис. 2.2.39):

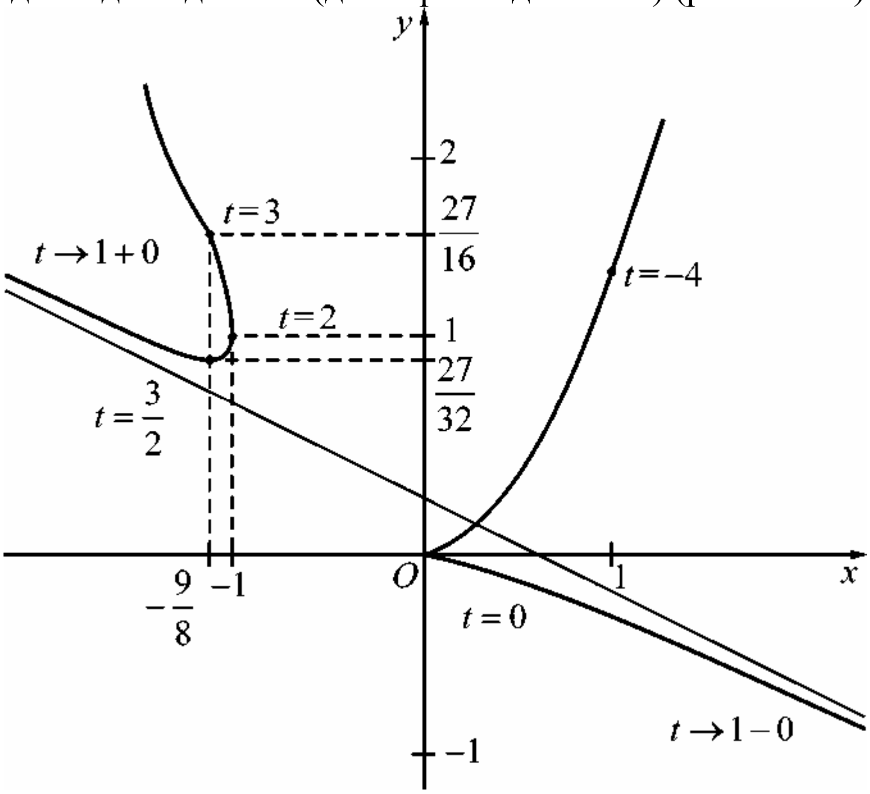


Рис. 2.2.39

1) функція не періодична відносно параметра t, графік не має симетрії;

2) область визначення за параметром t G: $t \neq 1$;

3) $x(t) = 0$: $t_1 = 0$; $x(t)$ не існує: $t_2 = 1$;
$y(t) = 0$: $t_1 = 0$; $y(t)$ не існує: $t_2 = 1$;
$x'(t) = 0$: $t_1 = 0$, $t_2 = 2$, $x'(t)$ не існує: $t_3 = 1$;

$y'(t)=0$: $t_1=0$, $t_2=\frac{3}{2}$; $y'(t)$ не існує: $t_3=1$;

$y''(x)=0$: $t_1=3$; $y''(x)$ не існує: $t_2=0$, $t_3=2$, $t_4=1$ ($y''(x)$ не існує в точці $t=1$, оскільки $t=1\notin G$);

4) складаємо таблицю

t	$-\infty$	$(-\infty\ ;\ 0)$	0	$(0;\ 1)$	1	$\left(1;\ \frac{3}{2}\right)$	$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{2};\ 2\right)$	2	$(2;\ 3)$	3	$(3;\ +\infty)$	$+\infty$
$x(t)$	$+\infty$		0	$0\div+\infty$	∞	$-\infty\div-\frac{9}{8}$	$-\frac{9}{8}$		-1		$-\frac{9}{8}$		$-\infty$
$y(t)$	$+\infty$		0	$0\div-\infty$	∞	$+\infty\div\frac{27}{32}$	$\frac{27}{32}$		1		$\frac{27}{16}$		$+\infty$
$y'_x(t)$		$+$	$\times$	$-$	$\times$	$-$	0	$+$	$\times$	$-$	$-$	$-$	
$y''_{xx}(t)$		$+$	$\times$	$-$	$\times$	$+$	$+$	$+$	$\times$	$-$	0	$+$	

і бачимо, що при $t<0$ функція зростає і угнута, при $0<t<1$ – спадає і опукла, при $1<t<\frac{3}{2}$ – спадає і угнута, при $\frac{3}{2}<t<2$ – зростає і угнута, при $2<t<3$ – спадає і опукла, при $t>3$ – спадає і угнута, при $t=\frac{3}{2}$ $x_{\min}=-\frac{9}{8}$, $y_{\min}=\frac{27}{32}$, $\left(-\frac{9}{8};\frac{27}{16}\right)$ – точка перегину;

5) знаходимо асимптоти:

– при $t\to1$ $x\to\infty$ і $y\to\infty$, тому при $t\to1$ можлива похила асимптота: $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{t\to1}\frac{y(t)}{x(t)}=\lim\limits_{t\to1}\frac{t^3 4(1-t)}{8(t-1)t^2}=-\frac{1}{2}$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-kx)=\lim\limits_{t\to1}[y(t)-kx(t)]=$

$$=\lim_{t\to1}\left[\frac{t^3}{8(t-1)}-\frac{1}{2}\frac{t^2}{4(t-1)}\right]=\frac{1}{8}\lim_{t\to1}\frac{t^2(t-1)}{t-1}=\frac{1}{8}\Rightarrow\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}$$ – похила асимптота;

– оскільки при $t\to1-0$ $x\to+\infty$ і $y\to-\infty$, а при $t\to1+0$ $x\to-\infty$ і $y\to+\infty$, то одержана асимптота є одночасно і лівою, і правою; інших похилих асимптот функція не може мати, тому немає необхідності шукати асимптоту при $t\to\infty$;

6) визначаємо допоміжну точку: при $t=-4$ $x=\frac{4}{5}$ і $y=\frac{8}{5}$.

За одержаною інформацією будуємо графік функції.

Зауваження. Рівняння в умові задають не одну, а дві функції. Ведучи дослідження, ми не розділяли ці функції, а це не зовсім точно.

Остаточно маємо: функція визначена при $t\neq1$; при $t<0$ – зростає і угнута; при $0<t<1$ – спадає і опукла; при $1<t<\frac{3}{2}$ – спадає і угнута; при $\frac{3}{2}<t<2$ – зростає і угнута; при $t=\frac{3}{2}$ одержимо $x_{\min}=-\frac{9}{8}$, $y_{\min}=\frac{27}{32}$; при

$2 < t < 3$ – спадає і опукла; $\left(-\frac{9}{8}; \frac{27}{16}\right)$ – точка перегину, що відповідає $t = 3$; при $t > 3$ – спадає і угнута.

Приклад 2.2.224. $x^3 + y^3 = 3xy$ (декартів лист).

Розв'язання. Дана крива параметризується у вигляді: $x = \frac{3t}{t^3 + 1}$,

$y = \frac{3t^2}{t^3 + 1}$.

Знаходимо похідні:

$$x'_t = \frac{3\left(1 - 2t^3\right)}{\left(t^3 + 1\right)^2},\ y'_t = \frac{3t\left(2 - t^3\right)}{\left(t^3 + 1\right)^2},\ y'_x = \frac{t\left(t^3 - 2\right)}{2t^3 - 1},\ y''_{xx} = \frac{2\left(1 + t^3\right)^4}{3\left(1 - 2t^3\right)^3}.$$

Проводимо дослідження (див. приклад 2.2.222) (рис. 2.2.40):

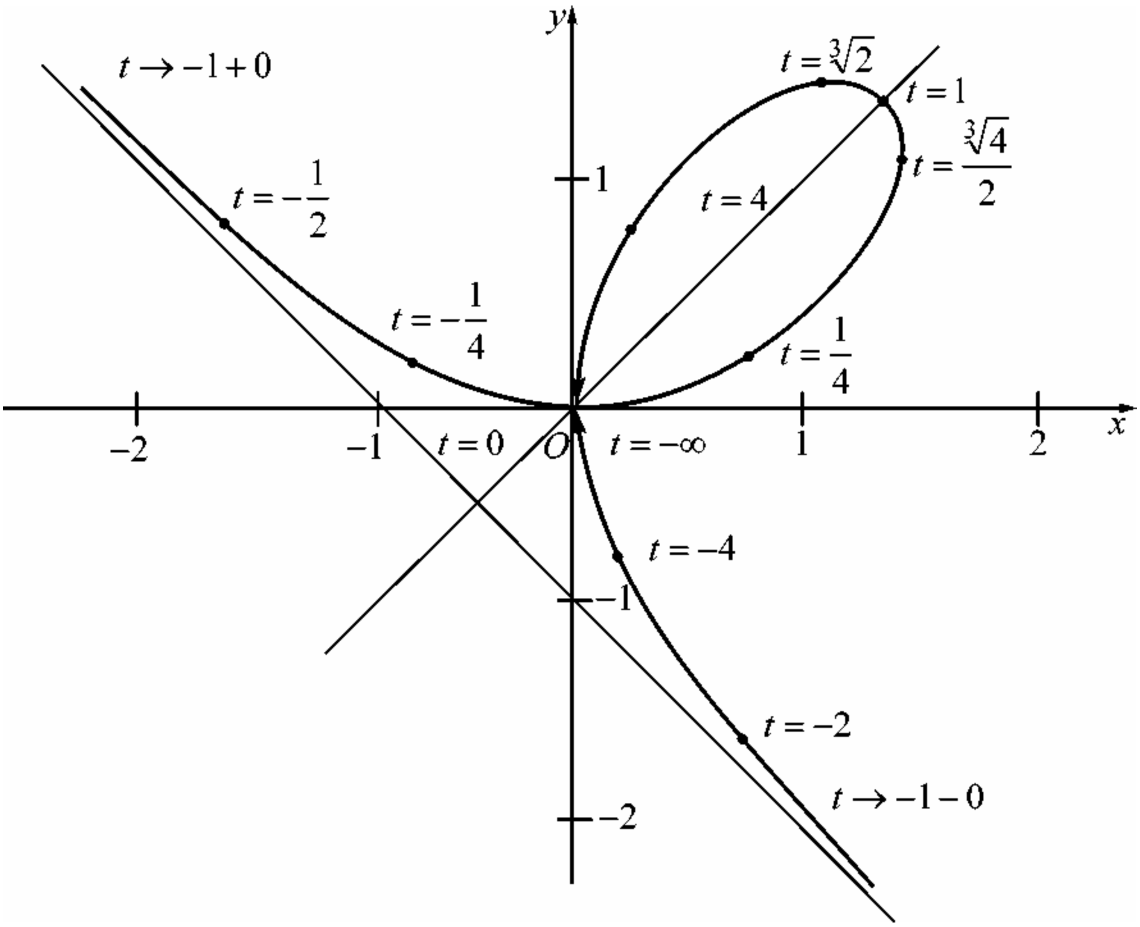


Рис. 2.2.40

1) функція не періодична відносно параметра t; графік не має симетрії відносно осей чи початку координат (із вихідного рівняння видно, що графік симетричний відносно прямої $y = x$, але тут цей факт неможливо використати, залишимо його для контролю правильності побудови);

2) область визначення за параметром t G: $t \neq -1$;

3) $x(t) = 0$: $t_1 = 0$; $x(t)$ не існує: $t_2 = -1$;

$y(t) = 0$: $t_1 = 0$; $y(t)$ не існує: $t_2 = -1$;

$x'(t)=0$: $t_1=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$; $x'(t)$ не існує: $t_2=-1$;

$y'(t)=0$: $t_1=0$, $t_2=\sqrt[3]{2}$; $y'(t)$ не існує: $t_3=-1$;

$y''(x)=0$: $t\in\varnothing$; $y''(x)$ не існує: $t_2=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$, $t_3=-1$;

4) складаємо таблицю

t	$-\infty$	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$\left(0;\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$	$\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2};\sqrt[3]{2}\right)$	$\sqrt[3]{2}$	$(\sqrt[3]{2};+\infty)$	$+\infty$
$x(t)$	0	$0\div+\infty$	∞	$-\infty\div0$	0		$\sqrt[3]{4}$		$\sqrt[3]{2}$		0
$y(t)$	0	$0\div-\infty$	∞	$+\infty\div0$	0		$\sqrt[3]{2}$		$\sqrt[3]{4}$		0
$y'_x(t)$		$-$	$\times$	$-$	0	$+$	$\times$	$-$	0	$+$	
$y''_{xx}(t)$		$+$	$\times$	$+$	$+$	$+$	$\times$	$-$	$-$	$-$	

і бачимо, що при $t<-1$ функція спадає і угнута, при $t\to-\infty$ $x\to0$ і $y\to0$, при $-1<t<0$ функція спадає і угнута, при $t=0$ $x_{\min}=0$, $y_{\min}=0$, при $0<t<\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$ функція зростає і угнута, при $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}<t<\sqrt[3]{2}$ функція спадає і опукла; при $t=\sqrt[3]{2}$ $x_{\max}=\sqrt[3]{2}$, $y_{\max}=\sqrt[3]{4}$, при $\sqrt[3]{2}<t<+\infty$ функція зростає і опукла, при $t\to+\infty$ $x\to0$ і $y\to0$, точка $(\sqrt[3]{4};\sqrt[3]{2})$ – точка перегину графіка, що відповідає $t=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$;

5) знаходимо асимптоти: при $t\to-1$ $x\to\infty$ і $y\to\infty$, тому при $t\to-1$ можлива похила асимптота: $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{t\to-1}\dfrac{y(t)}{x(t)}=\lim\limits_{t\to-1}\dfrac{3t^2(t^3+1)}{(t^3+1)3t}=-1$; $b=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}(y-kx)=\lim\limits_{t\to-1}\left(\dfrac{3t^2}{t^3+1}+\dfrac{3t}{t^3+1}\right)=\lim\limits_{t\to-1}\dfrac{3t(t+1)}{t^3+1}=\lim\limits_{t\to-1}\dfrac{3t}{t^2-t+1}=-1\Rightarrow$ $y=$ $=-x-1$ – похила асимптота (вона є і правою, і лівою); інших похилих асимптот функція не має (див. зауваження до прикладу 2.2.223);

6) визначаємо допоміжні точки:

t	-4	-2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	4
$x(t)$	$\frac{4}{21}$	$\frac{6}{7}$	$-\frac{12}{7}$	$-\frac{16}{21}$	$\frac{48}{65}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{12}{65}$
$y(t)$	$-\frac{16}{21}$	$-\frac{12}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{12}{65}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{48}{65}$

За одержаною інформацією будуємо графік функції.

Таким чином, область визначення $t\ne-1$; $\left(0;\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)$ і $(\sqrt[3]{2};+\infty)$ – інтервали зростання; $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$, $\left(\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2};\sqrt[3]{2}\right)$ – інтервали спадання; $(-\infty;-1)$,

$\left(-1; \frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)$ – інтервали вгнутості; $\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}; +\infty\right)$ – інтервал опуклості; при $t=0$ точка мінімуму $x_{\min}=0$, $y_{\min}=0$; при $t=\sqrt[3]{2}$ точка максимуму $x_{\max}=\sqrt[3]{2}$, $y_{\max}=\sqrt[3]{4}$; при $t=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$ точка перегину графіка $\left(\sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{2}\right)$; $y=-x-1$ – похила асимптота.

Приклад 2.2.225. $x=\sin 2t$, $y=\sin 3t$.

Розв'язання. Знаходимо похідні: $x'_t=2\cos 2t$, $y'_t=3\cos 3t$, $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=$

$=\frac{3}{2}\frac{\cos 3t}{\cos 2t}$, $y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=-\frac{3}{4}\sin t\frac{\cos^2 2t+\cos 2t+2}{\cos^3 2t}$.

Проводимо дослідження (див. приклад 2.2.222) (рис. 2.2.41):

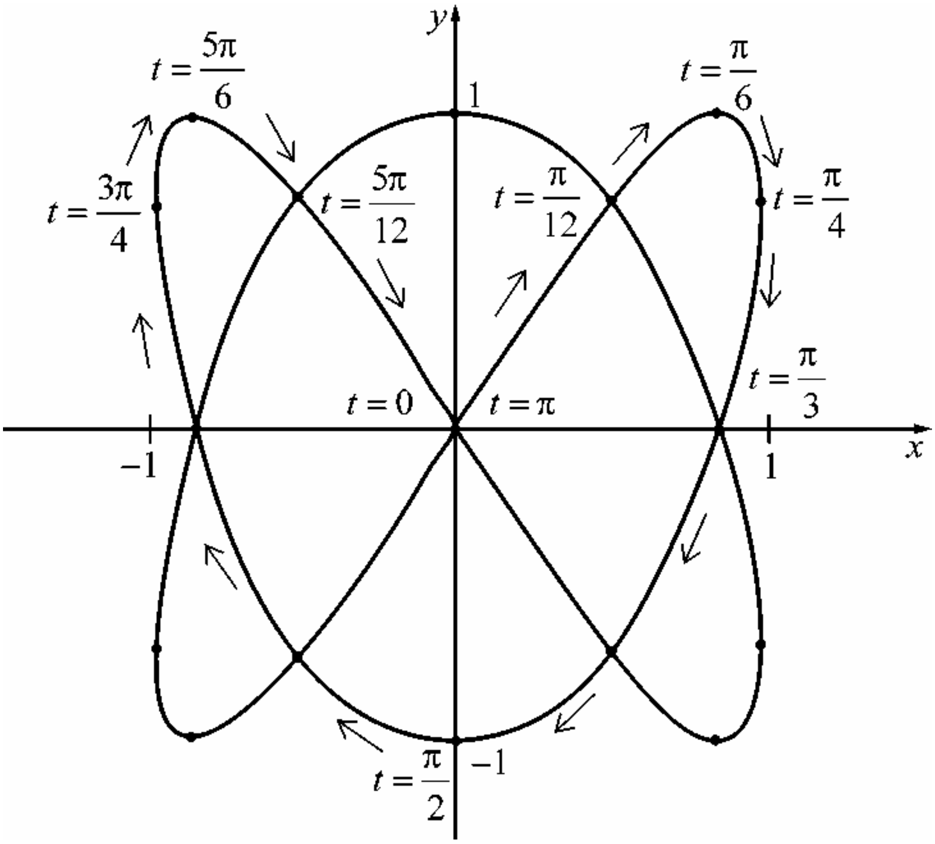


Рис. 2.2.41

1) графік періодичний за змінною t з періодом $T=2\pi$, симетричний відносно початку координат, тому його достатньо побудувати на проміжку $[0; \pi]$;

2) область визначення за параметром t: $G=R$;

3) $x(t)=0$: $t_1=0$, $t_2=\frac{\pi}{2}$, $t_3=\pi$;

$y(t)=0$: $t_1=0$, $t_2=\frac{\pi}{3}$, $t_3=\frac{2\pi}{3}$, $t_4=\pi$;

$x'(t)=0$: $t_1=\dfrac{\pi}{4}$, $t_2=\dfrac{3\pi}{4}$;

$y'(t)=0$: $t_1=\dfrac{\pi}{6}$, $t_2=\dfrac{\pi}{2}$, $t_3=\dfrac{5\pi}{6}$;

$y''(x)=0$: $t_1=0$, $t_2=\pi$; $y''(x)$ не існує: $t_1=\dfrac{\pi}{4}$, $t_2=\dfrac{3\pi}{4}$;

4) складаємо таблицю

t	0	$\left(0;\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{\pi}{6}$	$\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\pi}{4}$	$\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\pi}{3}$	$\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right)$
$x(t)$	0		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		1		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		0	
$y(t)$	0		1		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		-1	
$y'_x(t)$	$+$	$+$	0	$-$	$\times$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$y''_{xx}(t)$	0	$-$	$-$	$-$	$\times$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

t	$\frac{2\pi}{3}$	$\left(\frac{2\pi}{3};\frac{3\pi}{4}\right)$	$\frac{3\pi}{4}$	$\left(\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{6}\right)$	$\frac{5\pi}{6}$	$\left(\frac{5\pi}{6};\pi\right)$	π
$x(t)$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$		-1		$-\frac{\sqrt{3}}{2}$		0
$y(t)$	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1		0
$y'_x(t)$	$-$	$-$	$\times$	$+$	0	$-$	$-$
$y''_{xx}(t)$	$+$	$+$	$\times$	$-$	$-$	$-$	0

і бачимо, що для $0\le t\le\pi$ на проміжках $\left(0;\dfrac{\pi}{6}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$ і $\left(\dfrac{3\pi}{4};\dfrac{5\pi}{6}\right)$ функція зростає, а на проміжках $\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{4}\right)$ і $\left(\dfrac{5\pi}{6};\pi\right)$ – спадає, параметру $t=\dfrac{\pi}{6}$ відповідає точка максимуму $x_{\max 1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $y_{\max 1}=1$, параметру $t=\dfrac{5\pi}{6}$ – точка максимуму $x_{\max 2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $y_{\max 2}=1$, параметру $t=\dfrac{\pi}{2}$ – точка мінімуму $x_{\min}=0$, $y_{\min}=-1$, на проміжках $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$ і $\left(\dfrac{3\pi}{4};\pi\right)$ функція опукла, на проміжку $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}\right)$ – угнута, параметру $t=\dfrac{\pi}{4}$ відповідає точка перегину $\left(1;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, параметру $t=\dfrac{3\pi}{4}$ – точка перегину $\left(-1;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $t=0$ і $t=\pi$ відповідають точці перегину $(0;0)$;

5) асимптот графік не має;

) допоміжні точки: при $t=\frac{\pi}{12}$ одержимо точку $\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, при $t=\frac{5\pi}{12}$ – точку $\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

За одержаною інформацією будуємо графік на проміжку $[0;\pi]$. Оскільки графік виявився симетричним відносно осі Oy, то для побудови графіка на проміжку $[-\pi;0]$ достатньо добудувати частину графіка, симетричну відносно осі Ox (це простіше, ніж будувати симетричне відображення відносно початку координат).

Зауваження. Розглядаючи криву $x=x(t)$, $y=y(t)$ (1), ми вели її дослідження відносно параметра t. Можна було поставити питання про дослідження функції $y=f(x)$, заданої рівняннями (1), відносно аргументу x. Але рівняннями (1) може визначатися декілька функцій і виникне проблема виділення саме нашої функції. Можливо, треба буде досліджувати всі функції. В прикладі 2.2.225 може йти мова про дослідження чотирьох функцій $y=f_i(x)$ $\left(i=\overline{1,4}\right)$.

3. Графіки функцій в полярній системі координат.

Задача полягає в побудові графіків функцій $\rho=\rho(\varphi)$, заданих в полярній системі координат.

План дослідження:

1. Виявляємо, чи має крива період, симетрію.
2. Знаходимо область визначення Φ із умови $\rho\geq 0$.
3. Знаходимо нулі і точки розриву функцій $\rho(\varphi)$, $\rho'(\varphi)$.
4. Будуємо таблицю, перший рядок якої має вигляд

$$\varphi|\alpha-0,\ \alpha,\ \ldots,\ \varphi_k,\ (\varphi_k;\varphi_{k+1}),\ \varphi_{k+1},\ \ldots,\ \beta,\ \beta+0,$$

де $[\alpha;\beta]$ – проміжок, одержаний у пп. 1 і 2, φ_k знайдено в п. 3; в наступні рядки занесено відповідні значення $\rho(\varphi)$, $\rho'(\varphi)$.

Робимо висновки стосовно проміжків зростання, спадання, точок екстремуму, екстремумів функції.

5. Для деяких точок знаходимо кути, які утворюють радіуси-вектори цих точок та дотичні до кривої в цих точках.

Знаходимо точки перегину (за необхідності).

6. Знаходимо асимптоти.
7. Знаходимо декілька допоміжних точок.

За одержаною інформацією будуємо графік функції.

Зауваження:

1. Як правило, полярні та декартові системи координат будемо суміщати.
2. Якщо функція $\rho=\rho(\varphi)$ парна, то її графік симетричний відносно осі ρ. Можна обмежитися побудовою графіка при $\varphi\geq 0$, а потім скориста-

тися його симетричністю для побудови при $\varphi < 0$.

3. Кут Θ, утворений дотичною до кривої в точці M та радіусом-вектором цієї точки, знаходимо за формулою $\operatorname{tg}\Theta = \dfrac{\rho}{\rho'}$.

4. Точки перегину можна знайти з рівняння $\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = 0$ ($\rho^2 + \rho'^2 \neq 0$).

5. Якщо $\lim\limits_{\varphi\to\varphi_0} \rho(\varphi) = +\infty$ і $\lim\limits_{\varphi\to\varphi_0} [\rho(\varphi)\sin(\varphi - \varphi_0)] = d$ ($d \neq 0$), то $\rho = \dfrac{d}{\sin(\varphi - \varphi_0)}$ – асимптота кривої $\rho = \rho(\varphi)$.

Ця пряма віддалена від центра на відстань $|d|$; перпендикуляр, опущений із центра на пряму, утворює з полярною віссю кут $\varphi_0 + \dfrac{\pi}{2} \mathit{sign}\ d$.

Якщо $\lim\limits_{\varphi\to\varphi_0} \rho(\varphi) = +\infty$ і $\lim\limits_{\varphi\to\varphi_0} [\rho(\varphi)\sin(\varphi - \varphi_0)] = 0$, то асимптотою графіка функції $\rho = \rho(\varphi)$ є пряма, що містить промінь $\varphi = \varphi_0$.

Приклад 2.2.226. Дослідити функцію (без знаходження точок перегину) $\rho = \dfrac{2}{\cos\varphi} - 1$ і побудувати її графік.

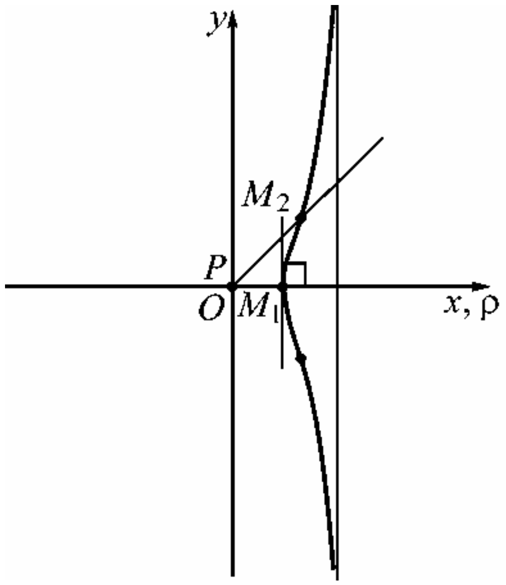


Рис. 2.2.42

Розв'язання. Перетворимо дану функцію: $\rho = \dfrac{2 - \cos\varphi}{\cos\varphi}$.

Знайдемо похідну $\rho' = \dfrac{2\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$.

Проведемо дослідження функції (рис. 2.2.42):

1) функція періодична з періодом $T = 2\pi$, парна, її графік симетричний відносно полярної осі, тому його достатньо побудувати на проміжку $[0; \pi]$;

2) для проміжку $[0; \pi]$ область визначення $\Phi: 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$;

3) $\rho(\varphi) = 0$: $\varphi \in \varnothing$; $\rho(\varphi)$ не існує: $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{2}$; $\rho'(\varphi) = 0$: $\varphi_1 = 0$; $\rho'(\varphi)$ не існує: $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{2}$;

4) складемо таблицю

φ	-0	0	$\left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$	$\dfrac{\pi}{2}$
$\rho(\varphi)$		1		∞
$\rho'(\varphi)$	$-$	0	$+$	

, з якої видно, що

на проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ функція зростає, $\varphi_1 = 0$ – точка мінімуму, $\rho_{\min} = \rho(0) = 1$;

5) знайдемо кут між радіусом-вектором точки $M_1(0; 1)$ і дотичною до кривої в цій точці: $\operatorname{tg}\Theta = \left.\frac{\rho}{\rho'}\right|_{\varphi=0} = \frac{(2-\cos\varphi)\cos 2\varphi}{\cos\varphi 2\sin\varphi} = \infty \Rightarrow \Theta = \frac{\pi}{2}$;

6) знайдемо асимптоти: $\lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{2}} \rho(\varphi) = \infty$, $\lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{2}} \left[\rho(\varphi)\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right] =$

$= \lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{2}} \left[\frac{2-\cos\varphi}{\cos\varphi}(-\cos\varphi)\right] = -2 \Rightarrow \rho = -\frac{2}{\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)}$ – асимптота; відстань від початку координат до цієї асимптоти – $|d| = |-2| = 2$; перпендикуляр, опущений із полюса на асимптоту, утворює з полярною віссю кут $\varphi_0 + \frac{\pi}{2} sign\ d = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}(-1) = 0$;

) знайдемо допоміжну точку графіка: при $\varphi = \frac{\pi}{4}$ $\rho = \left.\left(\frac{2}{\cos\ \varphi} - 1\right)\right|_{t=\pi/4} =$

$= \frac{4}{\sqrt{2}} - 1 = 2\sqrt{2} - 1 \Rightarrow M_2\left(\frac{\pi}{4};\ 2\sqrt{2}-1\right)$ – точка графіка.

Будуємо графік функції.

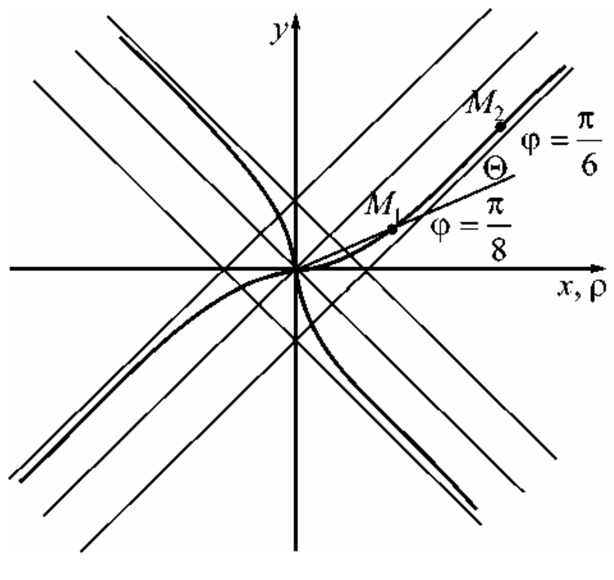


Рис. 2.2.43

Приклад 2.2.227. Дослідити функцію $\rho = tg\ 2\varphi$ і побудувати її графік.

Розв'язання. Знайдемо похідні: $\rho' = \frac{2}{\cos^2 2\varphi}$, $\rho'' = 8\frac{\sin 2\varphi}{\cos^3 2\varphi}$.

Проводимо дослідження (докладно див. у прикладі 2.2.226) (рис. 2.2.43):

1) період $T = \frac{\pi}{2}$; функція не є парною; будемо розглядати функцію на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;

2) для проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ область визначення $\Phi: 0 \le \varphi < \frac{\pi}{4}$;

3) $\rho(\varphi) = 0$: $\varphi_1 = 0$; $\rho(\varphi)$ не існує: $\varphi_2 = \frac{\pi}{4}$; $\rho'(\varphi) = 0$: $\varphi \in \varnothing$; $\rho'(\varphi)$ не існує: $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$;

4) складемо таблицю

φ	0	$\left(0;\ \frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\pi}{4}$
$\rho(\varphi)$	0		∞
$\rho'(\varphi)$	$+$	$+$	$\times$

, з якої видно, що функція на проміжку $\left(0;\ \frac{\pi}{4}\right)$ зростає;

5) візьмемо проміжну точку $M_1\left(\frac{\pi}{8};\ 1\right)$ і знайдемо кут між радіусом-вектором точки M_1 і дотичною до кривої в точці M_1: $\operatorname{tg}\Theta = \left.\frac{\rho}{\rho'}\right|_{\varphi=\pi/8} =$ $= \frac{\operatorname{tg} 2\varphi \cos^2 2\varphi}{2} = \frac{1}{4}$; $\Theta = \operatorname{arctg}\frac{1}{4} \approx 15{,}6^\circ$; знайдемо точку перегину функції з рівняння $\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = 0$: $\operatorname{tg}^2 2\varphi + 2\frac{4}{\cos^4 2\varphi} - \operatorname{tg} 2\varphi \frac{8\sin 2\varphi}{\cos^3 2\varphi} = 0$,
$\sin^2 2\varphi \cos^2 2\varphi + 8 - 8\sin^2 2\varphi = 0$, $\sin^2 2\varphi\left(1 - \sin^2 2\varphi\right) + 8 - 8\sin^2 2\varphi = 0$,
$\sin^4 2\varphi + 7\sin^2 2\varphi - 8 = 0$, в області $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$ останнє рівняння розв′язків не має, отже, точок перегину функція $\rho = \rho(\varphi)$ не має;

6) знайдемо асимптоти: оскільки $\lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{4}} \rho(\varphi) = \infty$, а

$$\lim_{\varphi\to\frac{\pi}{4}}\left[\rho(\varphi)\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= \lim_{\varphi\to\frac{\pi}{4}}\left[\operatorname{tg} 2\varphi \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right] = \lim_{\varphi\to\frac{\pi}{4}}\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi\right)\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= -\lim_{\varphi\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\cos\ 2\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)}{\sin\ 2\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)\right] = -\frac{1}{2}\lim_{\varphi\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)} = -\frac{1}{2},$$

то $\rho = -\frac{1}{2\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)}$ – асимптота; віддаль від асимптоти до початку координат – $|d| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$; перпендикуляр, опущений із полюса на асимптоту, утворює з полярною віссю кут, що дорівнює $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} sign\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$;

7) знайдемо ще одну допоміжну точку графіка: при $\varphi = \frac{\pi}{6}$ $\rho = \sqrt{3}$, отже, $M_2\left(\frac{\pi}{6};\ \sqrt{3}\right)$ – точка графіка.

Будуємо графік функції.

Зауваження. В результаті досліджень був зроблений висновок, що функція $\rho = \rho(\varphi)$ не має точок перегину. Інша справа – графік цієї функції. Якщо об′єднати гілку графіка функції в першій чверті з гілкою в третій чверті, то для одержаного графіка точка $(0;\ 0)$ буде точкою перегину. Це ж саме стосується графіка, одержаного з гілок, розміщених в другій і четвертій чвертях.

Отже, точка $(0;\ 0)$ є точкою перегину і точкою самоперетину графіка функції.

Приклад 2.2.228. Виконати дослідження і побудувати графік функції $\rho = \dfrac{1}{\varphi}$ (гіперболічна спіраль).

Розв′язання. Знайдемо похідні: $\rho' = -\dfrac{1}{\varphi^2}$, $\rho'' = \dfrac{2}{\varphi^3}$.

Проводимо дослідження функції (рис. 2.2.44):

1) функція не періодична, не є парною;

2) область визначення Φ: $\varphi > 0$; ρ, ρ', ρ'' ніде не дорівнюють нулю і всюди існують при $\varphi > 0$;

3) складемо таблицю значень функції:

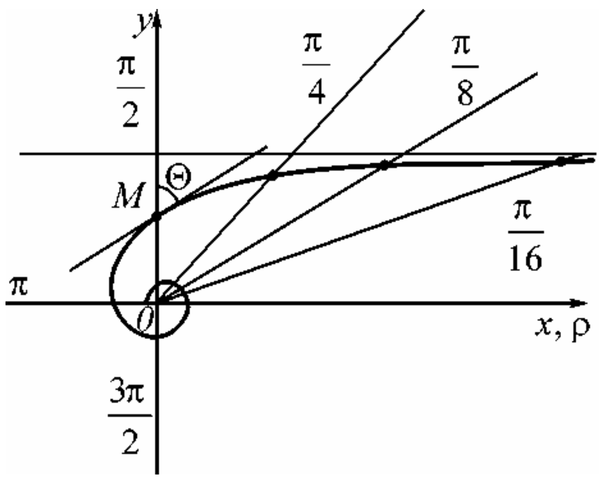


Рис. 2.2.44

φ	$+0$	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	4π	$+\infty$
$\rho(\varphi)$	$+\infty$	$\frac{16}{\pi}$	$\frac{8}{\pi}$	$\frac{4}{\pi}$	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{2}{3\pi}$	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{1}{4\pi}$	$+0$

4) знайдемо кут між радіусом-вектором точки $M\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{2}{\pi}\right)$ і дотичною до кривої в цій точці:

$$\operatorname{tg}\Theta = \left.\frac{\rho}{\rho'}\right|_{\varphi=\pi/2} = \left.\frac{-\varphi^2}{\varphi}\right|_{\varphi=\pi/2} = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \Theta = -\operatorname{arctg}\frac{\pi}{2} \approx -64^\circ;$$

дослідимо функцію на існування точки перегину:

$$\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = 0,\ \frac{1}{\varphi^2} + 2\frac{1}{\varphi^4} - \frac{1}{\varphi}\frac{2}{\varphi^3} = 0,\ \frac{1}{\varphi^2} = 0,$$

отже, точок перегину функція не має;

5) знайдемо асимптоту:

$$\lim_{\varphi\to 0}\rho(\varphi) = \infty,$$

$\lim\limits_{\varphi\to 0}(\rho\sin\varphi) = \lim\limits_{\varphi\to 0}\dfrac{\sin\varphi}{\varphi} = 1 \Rightarrow \quad \rho = \dfrac{1}{\sin\varphi}$ – асимптота, вона віддалена від полюса на одиницю; перпендикуляр, опущений із полюса на цю асимптоту, утворює з полярною віссю кут $\frac{\pi}{2}$.

Побудуємо графік функції.

Таким чином, область визначення $\varphi > 0$; функція всюди спадає; при $\varphi \to +\infty$ $\rho \to +0$; $\rho = \frac{1}{\sin\varphi}$ – асимптота.

Приклад 2.2.229. Виконати дослідження і побудувати графік функції $\rho = 1 + 2\cos\varphi$.

Розв'язання. Знайдемо похідні:

$\rho' = -2\sin\varphi$, $\rho'' = -2\cos\varphi$.

Досліджуємо функцію (рис. 2.2.45):

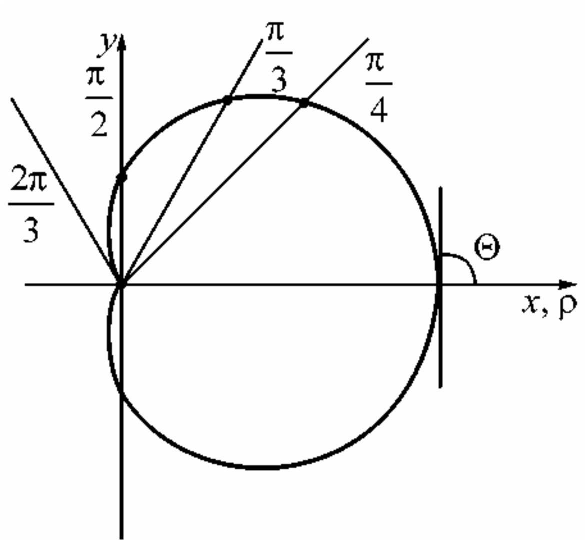


Рис. 2.2.45

1) період $T = 2\pi$; функція парна, її графік симетричний відносно осі ρ; графік достатньо розглянути на проміжку $[0; \pi]$;

2) область визначення для проміжку $[0; \pi]$: $1 + 2\cos\varphi \geq 0$, $\cos\varphi \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow \Phi: 0 \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{3}$;

3) $\rho = 0$: $\varphi_1 = \frac{2\pi}{3}$; ρ не існує: $\varphi \in \varnothing$; $\rho' = 0$: $\varphi_1 = 0$; ρ' не існує: $\varphi \in \varnothing$;

4) складаємо таблицю

φ	-0	0	$\left(0; \frac{2\pi}{3}\right)$	$\frac{2\pi}{3}$
$\rho(\varphi)$		3		0
$\rho'(\varphi)$	+	0	–	

і робимо висновок: на проміжку $\left(0; \frac{2\pi}{3}\right)$ функція спадає; $\varphi = 0$ – точка максимуму, $\rho_{\max} = 3$;

5) кут між радіусом-вектором точки $M(0; 3)$ і дотичною до кривої в цій точці дорівнює $\frac{\pi}{2}$: $\operatorname{tg}\Theta = \left.\frac{\rho}{\rho'}\right|_{\varphi=0} = \left.\frac{1 + 2\cos\varphi}{-2\sin\varphi}\right|_{\varphi=0} = \infty \Rightarrow \Theta = \frac{\pi}{2}$; досліджуємо функцію на існування точок перегину: $\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = 0$, $(1 + 2\cos\varphi)^2 + 2(-2\sin\varphi)^2 - (1 + 2\cos\varphi)(-2\cos\varphi) = 0$; $1 + 4\cos\varphi + 4\cos^2\varphi + {}$ $+ 8\sin^2\varphi + 2\cos\varphi + 4\cos^2\varphi = 0$; $6\cos\varphi + 9 = 0$, $\varphi \in \varnothing \Rightarrow$ функція точки перегину не має;

6) шукаємо асимптоти: не існує такого φ_0, що $\lim\limits_{\varphi \to \varphi_0} \rho = \infty$, тому аси-

мптот немає;

7) включаємо до таблиці значень функції розглянуті точки:

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
$\rho(\varphi)$	3	$\sqrt{2}+1$	2	1	0

Будуємо графік функції.

Зауваження. Часто для спрощення рівнянь функції (особливо коли вони задані неявно, містять парні степені x і y, групи x^2+y^2, x^4+y^4) переходять до полярної системи координат. Потім залежно від постановки задачі роблять висновки про поведінку ρ відносно φ або y відносно x.

Приклад 2.2.230. Перейшовши до полярних координат, побудувати криву $\left(x^2+y^2\right)x=y$.

Розв'язання. Перейдемо до полярної системи координат: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $\left(\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi\right)\rho\cos\varphi=\rho\sin\varphi$, $\rho^3\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)\cos\varphi=$ $=\rho\sin\varphi$, $\rho^3\cos\varphi=\rho\sin\varphi\Rightarrow$ $\rho=0$ і $\rho^2=\operatorname{tg}\varphi$; $\rho=0$ дає одну точку $(0;0)$, $\rho^2=\operatorname{tg}\varphi\Leftrightarrow$ $\rho=\sqrt{\operatorname{tg}\varphi}$.

Саме останнє рівняння будемо досліджувати.

Знайдемо похідні:

$$\rho'=\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg}\varphi}}\frac{1}{\cos^2\varphi}=\frac{1+\operatorname{tg}^2\varphi}{2\sqrt{\operatorname{tg}\varphi}}=\frac{1+\rho^4}{2\rho}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}+\rho^3\right),$$

$$\rho''=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}+\rho^3\right)\right]'_{\rho}\rho'=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\rho^2}+3\rho^2\right)\rho'=\frac{3\rho^4-1}{2\rho^2}\cdot\frac{1+\rho^4}{2\rho}=\frac{\left(3\rho^4-1\right)\left(\rho^4+1\right)}{4\rho^3}.$$

Далі маємо (рис. 2.2.46):

1) із вихідного рівняння маємо:

– x і y можуть бути тільки одного знака (не вважаючи того, що вони можуть дорівнювати нулю), тому крива може знаходитися тільки в першій і третій чвертях;

– рівняння не змінюється від заміни x на $-x$ і y на $-y$, тому крива симетрична відносно початку координат; отже, криву достатньо побудувати в першій чверті, для змінної φ це область $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$; далі ведемо дослідження тільки для цього проміжку;

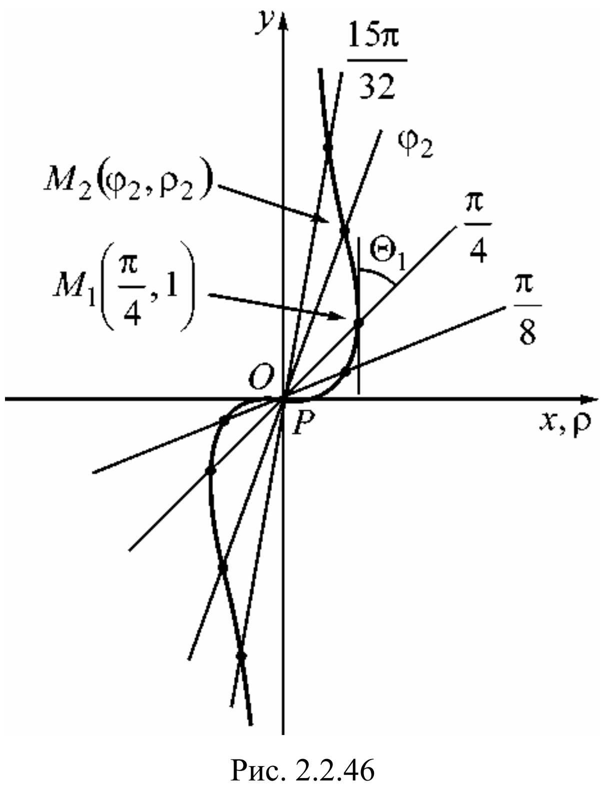


Рис. 2.2.46

2) для проміжку $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ область визначення $\Phi:\ \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right)$;

3) $\rho(\varphi)=0:\ \varphi_1=0$; $\rho(\varphi)$ не існує: $\varphi_2=\frac{\pi}{2}$; $\rho'(\varphi)=0:\ \varphi\in\varnothing$; $\rho'(\varphi)$ не існує: $\varphi_1=\frac{\pi}{2}$;

4) складемо таблицю

φ	0	$\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{2}-0$
$\rho(\varphi)$	0		$+\infty$
$\rho(\varphi)$	$\times$	$+$	$\times$

, з якої видно, що на проміжку $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ функція змінюється від 0 до $+\infty$ і всюди зростає;

5) знайдемо кут між радіусом-вектором точки $M_1\left(\frac{\pi}{4};1\right)$ (дано полярні координати) і дотичною до кривої в цій точці: $\operatorname{tg}\Theta_1=\left.\frac{\rho}{\rho'}\right|_{\varphi=\pi/4}=$ $=\left.\frac{\rho 2\rho}{\left(1+\rho^4\right)}\right|_{\rho=1}=1\Rightarrow\Theta_1=\frac{\pi}{4}$, а також точки перегину: $\rho^2+\rho'^2-\rho\rho''=0$,

$\rho^2+2\frac{\left(1+\rho^4\right)^2}{4\rho^2}-\rho\frac{\left(3\rho^4-1\right)\left(\rho^4+1\right)}{4\rho^3}=0$, нехай $\rho^4=z$, тоді одержимо:

$$4z+2(1+z)^2-(3z-1)(z+1)=0,\ 4z+2+4z+2z^2-3z^2-2z+1=0,$$

$$z^2-6z-3=0,\ z_{1,2}=3\pm\sqrt{12}=3\pm2\sqrt{3},\ \rho^4=3+2\sqrt{3},\ \rho^2=\sqrt{3+2\sqrt{3}},$$

$$\rho=\sqrt[4]{3+2\sqrt{3}},\ \operatorname{tg}\ \varphi=\sqrt{3+2\sqrt{3}}\Rightarrow\ \varphi_2=\operatorname{arctg}\sqrt{3+2\sqrt{3}}\approx76^\circ;$$

$$\rho_2=\sqrt[4]{3+2\sqrt{3}}\approx1{,}6,\ M_2(\varphi_2;\rho_2)$$ – точка перегину графіка;

6) знайдемо асимптоти: $\lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{2}}\rho=\infty$, $\lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{2}}\left[\rho\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)\right]=$

$=\lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{2}}\left[\sqrt{\operatorname{tg}\varphi}\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)\right]=-\lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sqrt{\sin\varphi}}{\sqrt{\cos\varphi}}\cos\varphi\right)=-\lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos\varphi}=0$, отже, асимптот немає;

7) до таблиці значень функції включимо вже розглянуті точки:

φ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	φ_2	$\frac{15\pi}{32}$
$\rho(\varphi)$	0	$\approx0{,}64$	1	$\approx1{,}6$	$\approx3{,}2$

Будуємо графік функції.

Графік ще має точку перегину $M_0(0;0)$.

Тепер зробимо висновки про поведінку функції в декартових координатах. Бачимо, що краще розглядати вихідне рівняння як таке, що задає неявно функцію $x = x(y)$.

Для $y \geq 0$:

– при $\varphi = \varphi_1 = \dfrac{\pi}{4}$ і $\rho = \rho_1 = 1$ $x_1 = \rho_1 \cos\varphi_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ і $y_1 = \rho_1 \sin\varphi_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $M_1\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (указано декартові координати точки M_1);

– при $\varphi = \varphi_2 = \operatorname{arctg}\sqrt{3 + 2\sqrt{3}}$ і $\rho = \rho_2 = \sqrt[4]{3 + 2\sqrt{3}}$ $x_2 = \rho_2 \cos\varphi_2 = \dfrac{\sqrt[4]{8\sqrt{3} - 12}}{2} \approx 0{,}6$ і $y_2 = \rho_2 \sin\varphi_2 = \sqrt[4]{24\sqrt{3} + 36} \approx 1{,}5$; $M_2(x_2; y_2)$; $x_{\max} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ при $y_{\max} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $M_1\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ – відповідна точка графіка; $M_0(0;0)$ і $M_2(x_2; y_2)$ – точки перегину;

– на інтервалі $\left(0; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ функція $x = x(y)$ зростає, на $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$ – спадає;

– на інтервалі $(0; y_2)$ функція опукла, на $(y_2; +\infty)$ – угнута.

Приклад 2.2.231. Перейшовши до полярних координат, побудувати криву $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$ (обмежитись висновком про поведінку кривої в полярній системі координат).

Розв'язання. Перейдемо до полярної системи координат: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $\rho^4\left(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi\right) = \rho^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) \Leftrightarrow \rho = 0 \cup \rho =$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}} = \frac{2}{\sqrt{3 + \cos 4\varphi}}.$$

Досліджуємо останнє рівняння.

Знайдемо похідні: $\rho' = \dfrac{4\sin 4\varphi}{\sqrt{(3 + \cos 4\varphi)^3}} = \dfrac{1}{2}\rho^3 \sin 4\varphi$,

$$\rho'' = 8\frac{3 + 6\cos 4\varphi - \cos^2 4\varphi}{\sqrt{(3 + \cos 4\varphi)^5}} = \frac{1}{4}\rho^5\left(3 + 6\cos 4\varphi - \cos^2 4\varphi\right).$$

Далі маємо (рис. 2.2.47):

1) із вихідного рівняння видно, що крива симетрична відносно координатних осей і прямої $y = x$, тому можна обмежитись дослідженням кривої на проміжку $\left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$;

2) функція $\rho = \rho(\varphi)$ визначена на проміжку $\left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$;

3) $\rho(\varphi) \neq 0$, якщо $\varphi \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$; $\rho'(\varphi) = 0$: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{4}$; $\rho'(\varphi)$ не іс-

нує: $\varphi \in \varnothing$;

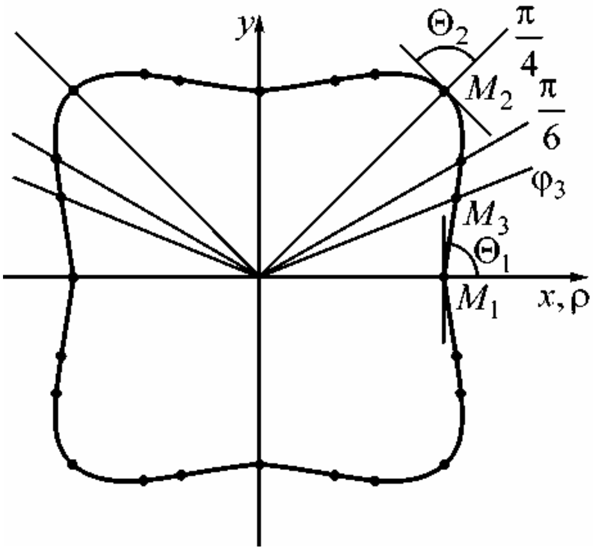


Рис. 2.2.47

4) складемо таблицю

φ	-0	0	$\left(0;\ \frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}+0$
$\rho(\varphi)$		1		$\sqrt{2}$	
$\rho(\varphi)$	$-$	0	$+$	0	$-$

,

з якої видно, що функція $\rho(\varphi)$ на проміжку $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ зростає; $\varphi_{\min}=0$, $\rho_{\min}=1$; $\varphi_{\max}=\frac{\pi}{4}$, $\rho_{\max}=\sqrt{2}$;

5) знайдемо кути між радіусами-векторами точок $M_1(0;\,1)$, $M_2\left(\frac{\pi}{4};\sqrt{2}\right)$ і дотичними до кривої в цих точках:

$$\operatorname{tg}\Theta_1=\left.\frac{\rho}{\rho'}\right|_{\varphi=0,\ \rho=1}=\left.\frac{2\rho}{\rho^3\sin 4\varphi}\right|_{\varphi=0,\ \rho=1}=\infty\Rightarrow\Theta_1=\frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{tg}\Theta_2=\left.\frac{\rho}{\rho'}\right|_{\varphi=\pi/4}=\left.\frac{2\rho}{\rho^3\sin 4\varphi}\right|_{\varphi=\pi/4,\ \rho=\sqrt{2}}=\infty\Rightarrow\Theta_2=\frac{\pi}{2},$$

і точки перегину:

$$\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''=0,$$

$$\rho^2+\frac{1}{2}\rho^6\sin^2 4\varphi-\frac{1}{4}\rho^6\left(3+6\cos 4\varphi-\cos^2 4\varphi\right)=0,$$

$$1+\frac{1}{2}\rho^4\sin^2 4\varphi-\frac{1}{4}\rho^4\left(3+6\cos 4\varphi-\cos^2 4\varphi\right)=0,$$

$$(3+\cos 4\varphi)^2+8\sin^2 4\varphi-4\left(3+6\cos 4\varphi-\cos^2 4\varphi\right)=0,$$

$$3\cos^2 4\varphi+18\cos 4\varphi-5=0,$$

$$\cos\ 4\varphi=\frac{-9+\sqrt{96}}{3},\ \varphi_3=\frac{1}{4}\arccos\frac{-9+\sqrt{96}}{3}\approx 18{,}6^\circ,\ \rho_3=\frac{2}{\sqrt{3+\cos\varphi_3}}\approx 1{,}11;$$

6) знайдемо асимптоти: оскільки не існує такого φ_0, що $\lim\limits_{\varphi\to\varphi_0}\rho(\varphi)=\infty$, то асимптот також не існує;

7) до таблиці значень функції включимо вже розглянуті точки:

φ	0	φ_3	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
$\rho(\varphi)$	1	ρ_3	$\frac{2\sqrt{10}}{5}$	$\sqrt{2}$

Побудуємо графік функції.

Таким чином, маємо: графік симетричний відносно осей Ox і Oy і прямої $y = x$; графік достатньо побудувати на проміжку $\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$; функція визначена на всьому цьому проміжку; для проміжку $\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$: функція $\rho = \rho(\varphi)$ зростає на інтервалі $\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$; $\varphi_{\min} = 0$, $\rho_{\min} = 1$; $\varphi_{\max} = \frac{\pi}{4}$, $\rho_{\max} = \sqrt{2}$; на інтервалі $(0; \varphi_3)$ функція вгнута, на $\left(\varphi_3; \frac{\pi}{4}\right)$ – опукла; $(\varphi_3; \rho(\varphi_3))$ – точка перегину; $\varphi_3 = \frac{1}{4}\arccos\frac{-9+\sqrt{96}}{3} \approx 18,6^\circ$.

Зауваження. Часто треба знати тільки загальний вигляд графіка, без зайвих деталей, тоді його будують за спрощеною схемою:

1) виявляють, чи має крива симетрію, період;
2) знаходять область визначення;
3) складають таблицю значень.

Побудувати за спрощеною схемою ескізи графіків (2.2.232 – 2.2.234):

Приклад 2.2.232. $\rho = a\cos 3\varphi$, $a > 0$ (трипелюсткова роза).

Розв'язання. Дослідження:

1) функція парна, $T = \frac{2\pi}{3}$, отже, графік достатньо розглянути на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$;

2) область визначення для проміжку $\left[0;\ \frac{\pi}{3}\right]$: $\cos 3\varphi \geq 0$, $0 \leq 3\varphi \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Phi:\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$;

3) таблиця значень для проміжку Φ:

φ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$
$\rho(\varphi)$	a	$a\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Ескіз графіка: будуємо графік за таблицею на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$; користуючись парністю, добудовуємо його на проміжку $\left[-\frac{\pi}{6}; 0\right)$, а потім ураховуємо його періодичність (рис. 2.2.48).

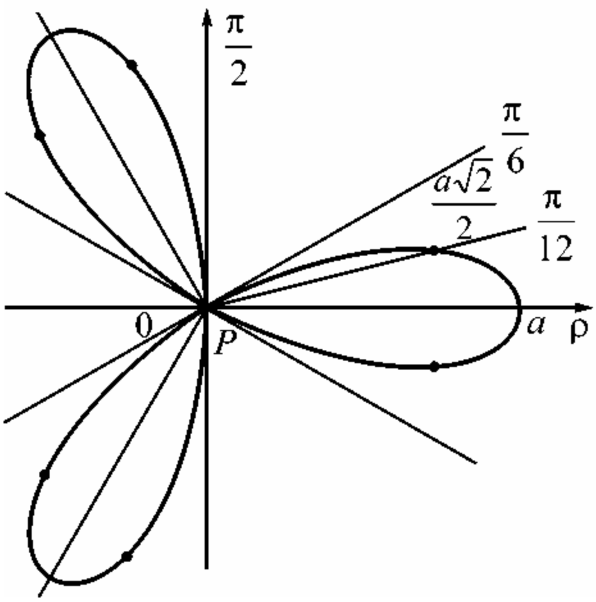


Рис. 2.2.48

Приклад 2.2.233. $\rho = a\cos\frac{\varphi}{3}$, $a > 0$.

Розв'язання. Дослідження:

1) функція парна, періодична з періодом $T = 6\pi$, отже, графік достатньо побудувати на проміжку $[0; 3\pi]$;

2) область визначення (для проміжку $[0;\ 3\pi]$): $\cos\frac{\varphi}{3} \ge 0$, $0 \le \frac{\varphi}{3} \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \ \Phi:\ 0 \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}$;

3) таблиця значень для проміжку Φ:

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$
$\rho(\varphi)$	a	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$\frac{a}{2}$	$\approx 0{,}26a$	0

Будуємо ескіз графіка (рис. 2.2.49).

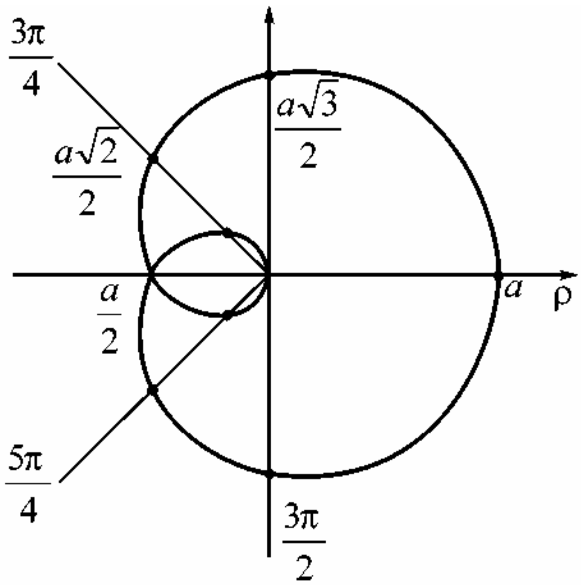


Рис. 2.2.49

Зауваження. Графік побудовано на проміжку $\left[-\frac{3\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$; на проміжку $\left(\frac{3\pi}{2};\ \frac{9\pi}{2}\right)$ функція не визначена, тобто графіка немає; на проміжку $\left[\frac{9\pi}{2};\ \frac{15\pi}{2}\right]$ графік збігається з побудованим і т. д.

Приклад 2.2.234.

$\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right),\ a > 0.$

Розв'язання. Перейшовши до полярної системи координат, одержимо графік $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Досліджуємо останню функцію:

1) функція парна, періодична з періодом $T = \pi$, тому графік достатньо розглянути на проміжку $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$;

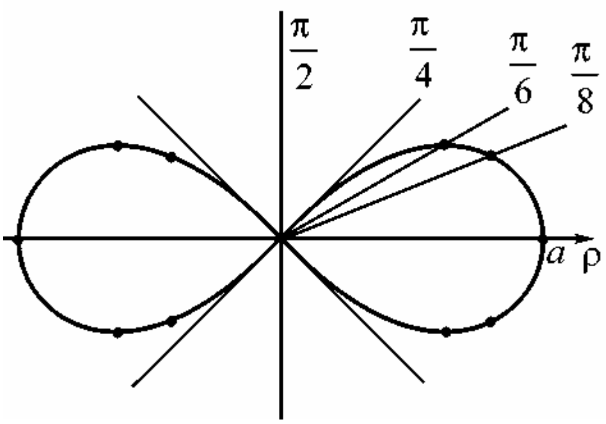


Рис. 2.2.50

2) область визначення (для проміжку $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$): $\cos 2\varphi \ge 0$, $0 \le 2\varphi \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Phi:\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$.

3) таблиця значень для проміжку Φ:

φ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
$\rho(\varphi)$	a	$a\frac{\sqrt[4]{8}}{2}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	0

Будуємо ескіз графіка (рис. 2.2.50).

2.2.9. Задачі на екстремум геометричного та фізичного змісту

При розв'язанні прикладних задач на екстремум необхідно:

1) вибрати незалежну змінну і установити її область зміни;
2) виразити шукану величину через вибраний аргумент;
3) дослідити одержану функцію на глобальний екстремум.

Щоб спростити задачу пошуку глобального екстремуму, треба мати на увазі таке: якщо неперервна функція має на проміжку $<a;b>$ єдину точку локального екстремуму, і вона є точкою максимуму (мінімуму), то саме в цій точці функція набуває свого найбільшого (найменшого) значення на проміжку $<a;b>$.

Приклад 2.2.235. В дану кулю вписати циліндр з найбільшою бічною поверхнею.

Розв'язання. Нехай радіус кулі – R, радіус основи циліндра – r (рис. 2.2.51). Тоді висоту циліндра h можна знайти за формулою $h=2\sqrt{R^2-r^2}$, а бічну поверхню S – за формулою $S=2\pi rh=$ $=4\pi r\sqrt{R^2-r^2}$, при цьому $0\le r\le R$.

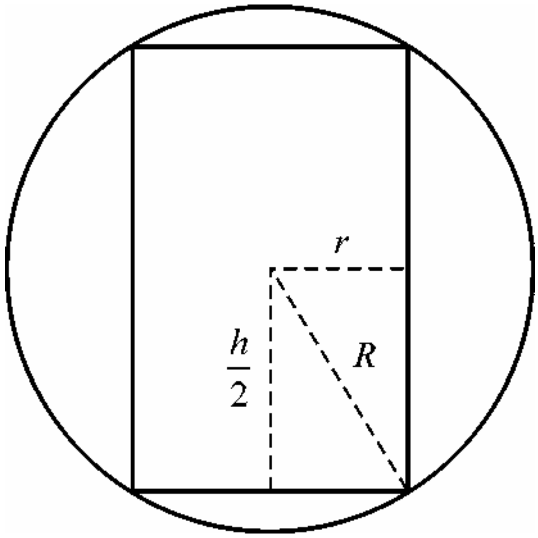


Рис. 2.2.51

Таким чином, одержано функцію $S=4\pi r\sqrt{R^2-r^2}$ аргументу r, де R – стала величина.

Дослідимо цю функцію на екстремум.

Знайдемо точки локального екстремуму: $S'=4\pi\left(\sqrt{R^2-r^2}-\dfrac{r^2}{\sqrt{R^2-r^2}}\right)=$

$=4\pi\dfrac{R^2-2r^2}{\sqrt{R^2-r^2}}$; $S'=0$: $R^2-2r^2=0\Rightarrow r_1=\dfrac{R}{\sqrt2}$; S' не існує: $r=R\notin(0;R)$ (точка локального екстремуму має бути внутрішньою точкою проміжку).

Таким чином, $r_1=\dfrac{R}{\sqrt2}$ – єдина критична точка.

Далі маємо: $S'(r_1-0)>0$, $S'(r_1+0)<0\Rightarrow r_1=\dfrac{R}{\sqrt2}$ – точка локального максимуму, а тому й точка глобального максимуму, оскільки функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[0;R]$ і r_1 – єдина точка екстремуму.

Знаходимо $S_{\max}=S\left(\dfrac{R}{\sqrt2}\right)=\left(4\pi r\sqrt{R^2-r^2}\right)\Bigg|_{r=\frac{R}{\sqrt2}}=4\pi\dfrac{R}{\sqrt2}\sqrt{R^2-\dfrac{R^2}{2}}=$

$=2\pi R^2$; $h=2\sqrt{R^2-r^2}=R\sqrt2$.

Отже, параметри циліндра: $r = \frac{R\sqrt{2}}{2}$, $h = R\sqrt{2}$.

Приклад 2.2.236. Серед усіх рівнобедрених трикутників, вписаних у даний круг, знайти трикутник з найбільшим периметром.

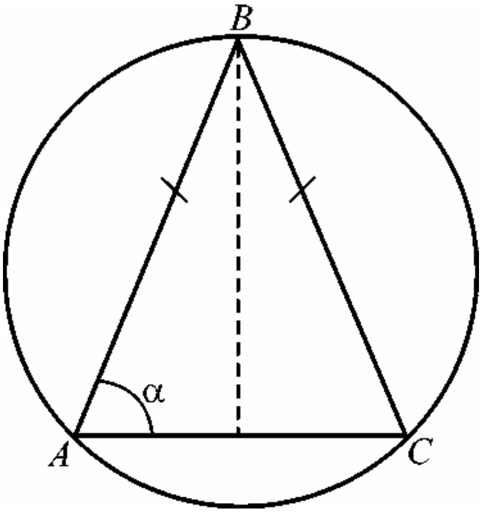


Рис. 2.2.52

Розв'язання. Нехай трикутник ABC вписано в круг радіусом R, причому $AB = BC$ (рис. 2.2.52). Позначимо $\angle BAC = \alpha$. За теоремою синусів $AB = BC = 2R\sin\alpha$, $AC = 2R\sin(\pi - 2\alpha) = 2R\sin 2\alpha$. Периметр трикутника ABC дорівнює $P = 2R(2\sin\alpha + \sin 2\alpha)$, де $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Таким чином, одержано функцію $P = P(\alpha)$ аргументу α, де R – стала величина. Дослідимо цю функцію на екстремум.

Знайдемо точки локального екстремуму:

$$P' = 2R(2\cos\alpha + 2\cos 2\alpha) = 4R(\cos\alpha + \cos 2\alpha) = 8R\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2};\ P' = 0:$$

1) $\cos\frac{\alpha}{2} = 0$, $\alpha \in \varnothing$;

2) $\cos\frac{3\alpha}{2} = 0$, $\frac{3\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $\alpha = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}$, $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$; P' не існує: $\alpha \in \varnothing$.

Маємо одну критичну точку $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$.

Дослідимо поведінку функції при переході через цю точку: $P'\left(\frac{\pi}{3} - 0\right) > 0$, $P'\left(\frac{\pi}{3} + 0\right) < 0$, отже, $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$ – точка локального максимуму, а тому й точка глобального максимуму, оскільки функція $P(\alpha)$ неперервна на проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ і $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$ – єдина точка екстремуму.

Якщо $\alpha = \frac{\pi}{3}$, то трикутник ABC – рівносторонній.

Приклад 2.2.237. Човен знаходиться на віддалі 3 км від найближчої точки A берега. Пасажир човна хоче досягти точки B, яка знаходиться на березі на віддалі 5 км від точки A (рис. 2.2.53). Човен пливе зі швидкістю 4 км/год, а пасажир, вийшовши з човна, може за годину пройти 5 км. До

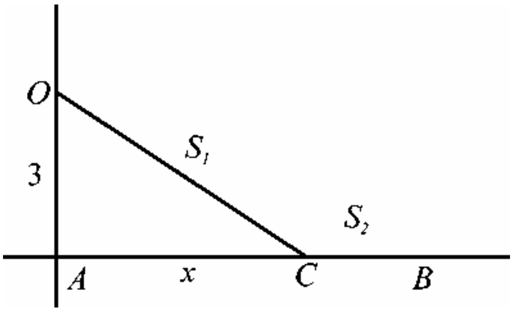


Рис. 2.2.53

якої точки C берега повинен пристати човен, щоб пасажир досяг точки B за найменший час?

Розв'язання. Нехай шлях S_1 пасажир пропливає на човні зі швидкістю $v_1 = 4$ км/год, а шлях S_2 проходить зі швидкістю $v_2 = 5$ км/год.

Оскільки $S_1 = \sqrt{9 + x^2}$, а $S_2 = 5 - x$ (x – відстань від точки C до точки A в км), то загальний час дорівнює $T = \dfrac{\sqrt{9 + x^2}}{4} + \dfrac{5 - x}{5}$, де $0 \le x \le 5$.

Дослідимо функцію $T(x)$ на локальний екстремум: $T' = \dfrac{x}{4\sqrt{9 + x^2}} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{5x - 4\sqrt{9 + x^2}}{20\sqrt{9 + x^2}}$; $T' = 0$: $5x - 4\sqrt{9 + x^2} = 0$, $16(9 + x^2) = 25x^2$, $9x^2 - 144 = 0$, $x^2 - 16 = 0$, $x_1 = 4$; T' не існує: $x \in \varnothing$; $T'(4 - 0) < 0$, $T'(4 + 0) > 0 \Rightarrow x_1 = 4$ – точка локального мінімуму, а отже, і точка глобального мінімуму на проміжку $[0; 5]$.

Таким чином, якщо човен пристане до берега в точці C, яка знаходиться на віддалі 4 км від точки A, то час, затрачений на досягнення точки B, буде найменшим.

Приклад 2.2.238. По двох дорогах рухаються до перехрестя дві автомашини з постійними швидкостями v_1 і v_2. Вважаючи, що вулиці пересікаються під прямим кутом, і знаючи, що в початковий момент машини знаходяться від перехрестя на віддалях a_1 і a_2, знайти, через який час віддаль між ними стане найменшою (рис. 2.2.54). Будемо вважати також, що $\dfrac{a_1}{a_2} \ne \dfrac{v_1}{v_2}$.

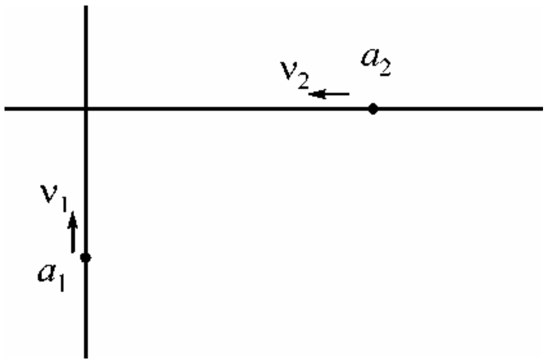


Рис. 2.2.54

Розв'язання. За час t машина, яка рухається зі швидкістю v_1, пройде шлях $v_1 t$ і знаходитиметься від перехрестя на віддалі $|a_1 - v_1 t|$. Друга машина через час t буде знаходитися від перехрестя на віддалі $|a_2 - v_2 t|$. Знайдемо відстань між машинами $l = \sqrt{(a_1 - v_1 t)^2 + (a_2 - v_2 t)^2}$, $t \ge 0$, яка є функцією аргументу t: $l = l(t)$. Дослідимо дану функцію на екстремум:

$$l'(t) = \frac{2[(a_1 - v_1 t)(-v_1) + (a_2 - v_2 t)(-v_2)]}{2\sqrt{(a_1 - v_1 t)^2 + (a_2 - v_2 t)^2}} = -\frac{a_1 v_1 + a_2 v_2 - t(v_1^2 + v_2^2)}{\sqrt{(a_1 - v_1 t)^2 + (a_2 - v_2 t)^2}};$$

$l'(t) = 0$: $t_1 = \dfrac{a_1 v_1 + a_2 v_2}{v_1^2 + v_2^2}$; при умові $\dfrac{a_1}{a_2} \ne \dfrac{v_1}{v_2}$ $l'(t)$ існує; $l'(t_1 - 0) < 0$, $l'(t_1 + 0) > 0$, отже, t_1 – точка і локального, і глобального мінімумів.

Таким чином, маємо розв'язок: $\dfrac{a_1v_1+a_2v_2}{v_1^2+v_2^2}$.

Приклад 2.2.239. У фокуси еліпса, більша піввісь якого $a=2$ і ексцентриситет $e=\dfrac{1}{2}$, поміщено точкові заряди $q_1=1$ і $q_2=2$ (рис. 2.2.55).

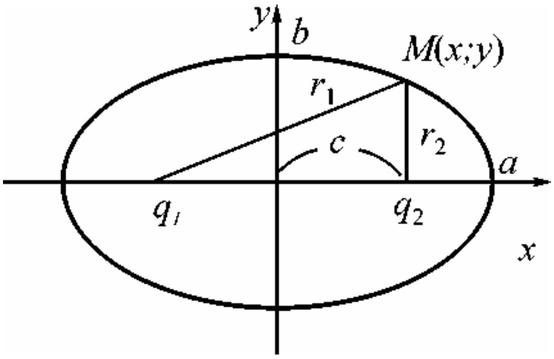


Рис. 2.2.55

Знайти на даному еліпсі точки найбільшого і найменшого значень потенціалів цих зарядів.

Розв'язання. Потенціал u точкового заряду q знаходимо за формулою $u=\dfrac{q}{r}$, де r – відстань між точкою, в якій вимірюється потенціал, і зарядом.

Для еліпса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ справедливі співвідношення: $r_1=a+ex$, $r_2=a-ex$, $r_1+r_2=2a$, $\dfrac{c}{a}=e$, $b^2=a^2-c^2$ (b – мала піввісь, $2c$ – фокусна відстань).

Знайдемо рівняння даного еліпса: $c=ae=2\cdot\dfrac{1}{2}=1$, $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$; отже, $\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2}=1$ – рівняння еліпса.

Потенціали зарядів для точки $M(x;y)$ еліпса: $u_1=\dfrac{q_1}{r_1}$ – потенціал першого заряду, $u_2=\dfrac{q_2}{r_2}$ – потенціал другого заряду, $u=u_1+u_2=\dfrac{q_1}{r_1}+\dfrac{q_2}{r_2}=$
$=\dfrac{q_1}{a+ex}+\dfrac{q_2}{a-ex}=\dfrac{1}{2+\dfrac{x}{2}}+\dfrac{2}{2-\dfrac{x}{2}}=\dfrac{2}{4+x}+\dfrac{4}{4-x}$ – потенціал суми зарядів.

Одержано функцію $u=u(x)=\dfrac{2}{4+x}+\dfrac{4}{4-x}$, де $-2\le x\le 2$; дослідимо її на екстремум:

$$u'(x)=-\frac{2}{(4+x)^2}+\frac{4}{(4-x)^2}=2\frac{-16+8x-x^2+32+16x+2x^2}{\left(16-x^2\right)^2}=2\frac{x^2+24x+16}{\left(16-x^2\right)^2};$$

$$u'(x)=0:\ x^2+24x+16=0,\ x_1=-12+8\sqrt{2},\ x_2=-12-8\sqrt{2}\notin[-2;2];$$

u' не існує: $x\in\varnothing$; $u'(x_1-0)<0$, $u'(x_1+0)>0\Rightarrow x_1=-12+8\sqrt{2}$ – точка локального і глобального мінімумів.

Для знаходження точки локального і глобального максимумів треба знайти значення функції $u(x)$ у крайніх точках проміжку $[-2;2]$:

$u(-2)=\dfrac{2}{4-2}+\dfrac{4}{4+2}=\dfrac{5}{3}$, $u(2)=\dfrac{2}{4+2}+\dfrac{4}{4-2}=\dfrac{7}{3}\Rightarrow$ $x=2$ – точка глобального максимуму.

Таким чином, потенціал, створений зарядами q_1 і q_2, набуває найменшого значення в точках еліпса з абсцисою $x=-12+8\sqrt{2}$ і найбільшого значення в точці $(2;\,0)$.

Приклад 2.2.240. На якій висоті h над центром круглого стола радіусом a треба помістити електричну лампочку, щоб освітленість краю стола була найбільшою (рис. 2.2.56)?

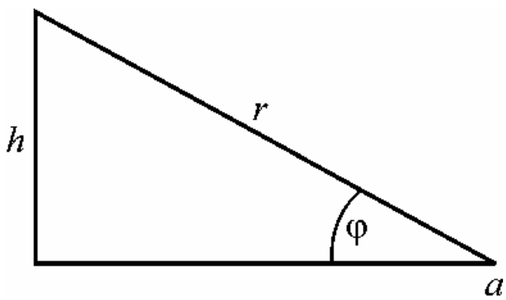


Рис. 2.2.56

Розв'язання. Яскравість освітленості знаходимо за формулою $I=k\dfrac{\sin\varphi}{r^2}$, де φ – кут нахилу променів, r – віддаль від джерела світла до точки, яка освітлюється, k – сила джерела світла.

Знайдемо $r=\dfrac{a}{\cos\varphi}$, тоді $I=\dfrac{k}{a^2}\sin\varphi\cos^2\varphi$.

Одержано функцію $I=I(\varphi)$, де $0\le\varphi<\dfrac{\pi}{2}$; дослідимо цю функцію на екстремум: $I'=\dfrac{k}{a^2}\left(\cos^3\varphi-2\cos\varphi\sin^2\varphi\right)=\dfrac{k}{a^2}\cos\varphi\left(\cos^2\varphi-2\sin^2\varphi\right)$; $I'=0$: $\cos^2\varphi-2\sin^2\varphi=0$, $\operatorname{ctg}^2\varphi=2$, $\operatorname{ctg}\varphi=\sqrt{2}$, $\varphi_1=\operatorname{arcctg}\sqrt{2}$; I' не існує: $\varphi\in\varnothing$; $I'(\varphi_1-0)>0$, $I'(\varphi_1+0)<0\Rightarrow\varphi_1=\operatorname{arctg}\sqrt{2}$ – точка локального і глобального максимумів.

При $\varphi=\varphi_1$ $h=a\operatorname{tg}\varphi_1=\dfrac{a}{\operatorname{ctg}\varphi_1}=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Таким чином, якщо джерело світла помістити на висоті $h=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$, то освітленість краю стола буде найбільшою.

2.3. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

2.3.1. Функції багатьох змінних. Границя і неперервність. Частинні похідні. Диференціал. Похідні та диференціали вищих порядків

1. Поняття функції багатьох змінних.

Нагадаємо, що R^n – це лінійний n-вимірний простір, що складається з елементів – наборів $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, де $x_k\in R$, тобто наборів дійсних чисел.

Зокрема, $R^1=R$ – множина дійсних чисел, R^2 – множина точок площини, R^3 – множина точок простору. Замість слів «елемент» і «точка» можна вживати термін «вектор».

Функція $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n незалежних змінних x_1, x_2, …, x_n з областю визначення $\Omega \subset R^n$ – це відображення $f : \Omega \to R$, тобто для кожного $x \in \Omega$ однозначно визначено число $f(x) \in R$, де для скорочення покладено $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Якщо $n = 2$ (функція двох змінних), то звичайно вживають позначення $z = f(x, y)$, тобто незалежні змінні позначають через x, y, а значення функції (залежну змінну) – через z. Для функції трьох змінних часто вживають позначення $w = f(x, y, z)$, тобто незалежні змінні позначають через x, y, z, а значення функції – через w.

Для точки (вектора) $x \in R^n$ можна ввести так звану норму $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$. Норма – це узагальнення довжини вектора. Для $n = 2, 3$ норма є звичайною довжиною вектора. Відстань між точками $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ і $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ – це норма різниці $(x - y)$, тобто $\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$.

Кажуть, що точка x прямує до точки y, якщо $\|x - y\| \to 0$. Якщо $\|x - y\| \to 0$, то $|x_k - y_k| \to 0$, $k = 1, 2, ..., n$, і навпаки.

Функція $z = f(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ називається *неперервною в точці* $x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$, якщо з умови $\|x - x^0\| \to 0$ випливає, що $f(x) \to f(x^0)$, тобто $|f(x) - f(x^0)| \to 0$.

Поверхня, задана рівнянням $f(x, y, z) = C$, називається *поверхнею рівня функції трьох змінних* $w = f(x, y, z)$.

Крива, що задовольняє рівнянню $f(x, y) = C$, називається *лінією рівня функції двох змінних* $z = f(x, y)$.

2. Частинні похідні.

Частинна похідна функції $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ відносно незалежної змінної x_k означається таким чином:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1, x_2, ..., x_k + \Delta x_k, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_k, ..., x_n)}{\Delta x_k}.$$

Іншими словами, всі незалежні змінні, крім x_k, вважаються сталими. Тоді функція $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ стає функцією однієї змінної x_k. Похідна цієї функції однієї змінної відносно x_k і називається частинною похідною $\frac{\partial f}{\partial x_k}$. Вживається також позначення f'_{x_k} або навіть f_{x_k} (тобто іноді штрих не пишуть, наявність індексу x_k вже означає, що це – частинна похідна відносно x_k).

Приклад 2.3.1. Для функції $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ знайти область визначення, лінії рівня та частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Розв'язання. Областю визначення є множина точок (x, y), що задовольняють нерівності $1 - x^2 - y^2 \ge 0$, тобто $x^2 + y^2 \le 1$, а це – круг радіусом 1 з центром у початку координат. Рівнянням ліній рівня є $\sqrt{1 - x^2 - y^2} = C$, звідки $1 - x^2 - y^2 = C^2$, $x^2 + y^2 = 1 - C^2$.

Таким чином, для $0 \le C < 1$ лінія рівня – це коло з центром у початку координат, для $C = 1$ – точка $(0, 0)$. Для $C < 0$ та $C > 1$ лінії рівня відсутні, бо таких значень функція не набуває.

Знаходимо частинні похідні

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2 - y^2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2 - y^2}}(-2y) = -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

Приклад 2.3.2. Знайти область визначення, поверхні рівня та частинні похідні функції $w = \ln(x + 2y + 3z)$.

Розв'язання. Область визначення цієї функції – це множина точок (x, y, z), що задовольняють нерівності $x + 2y + 3z > 0$. Поверхня $x + 2y + 3z = 0$ – площина. Таким чином, область визначення функції – це півпростір, який лежить вище цієї площини. Рівняння поверхонь рівня

$$x + 2y + 3z = C, \ C > 0$$

– це рівняння площин, що паралельні площині $x + 2y + 3z = 0$ – межі області визначення функції.

Частинні похідні дорівнюють

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{x + 2y + 3z}, \ \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{2}{x + 2y + 3z}, \ \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{3}{x + 2y + 3z}.$$

3. Дифференційовність. Диференціал.

Нехай $\Omega \subset R^n$. Точка $x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$ називається внутрішньою точкою множини Ω, якщо існує $r > 0$, таке, що множина $B_r(x^0) = \{x : \|x - x^0\| < r\}$ (така множина має назву “куля радіусом r з центром у точці x^0”) міститься в Ω: $B_r(x^0) \subset \Omega$.

Якщо всі точки $x \in \Omega$ є внутрішніми точками Ω, то множина Ω називається відкритою. Множина Ω називається зв'язною, якщо довільні дві точки цієї множини можна з'єднати ламаною, що належить Ω. Відкрита зв'язна множина має назву "*область*".

Нехай функція $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ має область Ω як область визначення. Якщо приріст функції Δy в точці $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ можна зобразити у вигляді $\Delta y = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_k} \Delta x_k + \alpha \|\Delta x\|$, де $\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n)$, а $\alpha \to 0$ при $\|\Delta x\| \to 0$, то функція називається *диференційовною* в цій точці.

Величина

$$dy = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_k} \Delta x_k$$

є, таким чином, головною частиною приросту Δy (якщо тільки не всі частинні похідні $\frac{\partial y}{\partial x_k}$ дорівнюють 0). Крім того, dy є лінійною функцією приростів незалежних змінних Δx_k. Ця величина dy має назву *повного диференціала функції* $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точці $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Якщо позначити матрицю $\begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_1} & \frac{\partial y}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial y}{\partial x_n} \end{bmatrix}$ через y', а матрицю $\begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ ... \\ \Delta x_n \end{bmatrix}$ – через Δx (або dx), то можна одержати $dy = y'\Delta x = y'dx$, що за формою збігається з формулою для диференціала функції однієї змінної.

Теорема 2.3.1. Якщо частинні похідні функції існують у деякому околі точки x і є неперервними в цій точці, то функція диференційовна в цій точці.

Зауваження. Під околом точки x можна розуміти $B_r(x)$ – кулю радіусом $r > 0$ з центром у точці x.

Приклад 2.3.3. Знайти повний диференціал функції $z = x \operatorname{arctg} y$ в точці (0, 0).

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{arctg} y, \; \frac{\partial z}{\partial x}(0, 0) = 0, \; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{1 + y^2}, \; \frac{\partial z}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Таким чином, у точці (0, 0) $dz = 0$.

Приклад 2.3.4. Знайти повний диференціал функції $z = e^{\frac{x}{y}}$ в точці $(0, 1)$.

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{\frac{x}{y}} \frac{1}{y}; \; \frac{\partial z}{\partial x}(0, 1) = 1; \; \frac{\partial z}{\partial y} = e^{\frac{x}{y}} \left(-\frac{x}{y^2} \right); \; \frac{\partial z}{\partial y}(0, 1) = 0.$$

Отже, в точці $(0, 1)$ $dz = \Delta x = dx$.

Приклад 2.3.5. Знайти повний диференціал функції $w = \ln(x^2 + 2y^2 + 3z^2)$ в точці $(1, 1, 1)$.

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + 2y^2 + 3z^2}; \; \frac{\partial w}{\partial x}(1, 1, 1) = \frac{1}{3};$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{4y}{x^2+2y^2+3z^2};\ \frac{\partial w}{\partial y}(1,1,1)=\frac{2}{3};\ \frac{\partial w}{\partial z}=\frac{6z}{x^2+2y^2+3z^2};\ \frac{\partial w}{\partial z}(1,1,1)=1.$$

Таким чином, у точці $(1,1,1)$ $dw=\frac{1}{3}dx+\frac{2}{3}dy+dz$.

4. Частинні похідні вищих порядків.

Частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1,x_2,...,x_n)$ є функціями незалежних змінних x_1, x_2, …, x_n. Частинні похідні від цих функцій називаються частинними похідними другого порядку, частинні похідні від частинних похідних другого порядку – *похідними третього порядку* і т.д.

Вживаються такі позначення: якщо $z=f(x,y)$, то

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx}=z''_{x^2}=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=f''_{xx},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{xy}=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=f''_{xy},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z''_{yx}=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}=f''_{yx}$$

і т.д.

Похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ та $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ називаються *мішаними похідними другого порядку*.

Приклад 2.3.6. Знайти мішані похідні другого порядку функції $z=x^3y+x^2y^2+2xy^3+x^2y^4$.

Розв'язання. За означенням

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y+2xy^2+2y^3+2xy^4;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=3x^2+4xy+6y^2+8xy^3;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^3+2x^2y+6xy^2+4x^2y^3;\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=3x^2+4xy+6y^2+8xy^3.$$

Бачимо, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, і це не випадково: має місце теорема про рівність мішаних похідних.

Теорема 2.3.2. Якщо в деякому околі точки (x_0,y_0) для функції $z=f(x,y)$ існують похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ та $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ і ці похідні неперервні в цій точці, то $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

Аналогічний результат має місце для мішаних похідних довільного порядку функцій довільного числа змінних. Наприклад, з неперервності похідних 3-го порядку випливає, що $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial^2 x}$.

5. Похідні та диференціали складених функцій.

Нехай $z = f(x, y)$, а, в свою чергу, $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, і всі ці функції диференційовні; при цьому функції φ і ψ набувають таких значень, що точка (x, y) належить області визначення функції $z = f(x, y)$. Тоді за заданими значеннями u та v можна знайти значення z, тобто одержати функцію $z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$. Ця функція називається складеною.

Частинні похідні складеної функції знаходять за формулами

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}; \ \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Аналогічні формули мають місце і для функцій довільного числа змінних.

Приклад 2.3.7. Нехай $z = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$. Знайти $\frac{\partial z}{\partial \rho}$ та $\frac{\partial z}{\partial \varphi}$.

Розв'язання.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{(x^2 + y^2) - x2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{dx}{d\rho} = \cos\varphi,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\rho\sin\varphi\ , \ \frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin\varphi\ , \ \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \rho\cos\varphi;$$

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\cos\varphi - \frac{2yx}{(x^2 + y^2)^2}\sin\varphi =$$

$$= \frac{\rho^2\left(\left(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi\right)\cos\varphi - 2\sin^2\varphi\cos\varphi\right)}{\rho^4} = -\frac{\cos\varphi}{\rho^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}(-\rho\sin\varphi) - \frac{2yx}{(x^2 + y^2)^2}\rho\cos\varphi =$$

$$= \frac{\rho^3\left(-\left(-\sin^2\varphi - \cos^2\varphi\right)\sin\varphi - 2\sin\varphi\cos^2\varphi\right)}{\rho^4} = -\frac{\sin\varphi}{\rho}.$$

Цей результат легко перевірити, оскільки $z = \frac{\rho\cos\varphi}{\rho^2} = \frac{\cos\varphi}{\rho}$.

Нехай f – відображення R^n у R^m: $f : R^n \to R^m$ або $y = f(x)$, де $x \in R^n$, $y \in R^m$.

У розгорнутому вигляді його можна записати так:

$$y_1 = f_1(x_1, ..., x_n),$$
$$...$$
$$y_m = f_m(x_1, ..., x_n).$$

Похідна відображення f з R^n у R^m в точці x – такий лінійний оператор A, що $\Delta y = A\Delta x + r(\Delta x)$, де $\|r(\Delta x)\| = \alpha\|\Delta x\|$, $\alpha \to 0$ при $\|\Delta x\| \to 0$.

Цю похідну A позначають $f'(x)$, в розгорнутому вигляді вона має таку форму:

$$f'(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Якщо g – відображення R^p у R^n, а f – відображення R^n у R^m, то для похідної складеного відображення $y = f(g(u))$ (де $y = f(x)$, $x = g(u)$) має місце формула $f(g(u))' = f' \cdot g'$. Це добуток лінійних операторів і, відповідно, матриць, що їх зображають.

Якщо $f : R^n \to R^n$ і $g : R^n \to R^n$ – взаємно обернені зображення (тобто $f \cdot g = I$ і $g \cdot f = I$, де I – тотожне відображення, що задається одиничною матрицею) і похідні f' та g' існують, то з формули похідної складеного відображення випливає, що $f' \cdot g' = g' \cdot f' = I$, оскільки похідна тотожного відображення збігається з ним самим, бо тотожне відображення є лінійним. Таким чином, похідна оберненого зображення задається матрицею, оберненою до матриці похідної самого зображення. Має місце таке твердження: якщо похідна відображення $f : R^n \to R^n$ в даній точці є невиродженою матрицею з неперервними в цій точці коефіцієнтами $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)$, то в деякому околі образу цієї точки існує обернене відображення, що має похідну, яка, в свою чергу, є невиродженою матрицею.

Матриця похідної відображення $f : R^n \to R^n$ називається ще *матрицею Якобі*, а її визначник $\det f'$ – *якобіаном*. Таким чином, якщо частинні похідні відображення неперервні в точці і якобіан його не дорівнює нулю, то в деякому околі образу цієї точки існує обернене відображення, що має неперервні частинні похідні і ненульовий якобіан.

Приклад 2.3.8. Нехай відображення R^2 у R^2 задане формулами $y_1 = x_1^2 + x_2^2$; $y_2 = x_1 x_2$. Знайти матрицю Якобі (похідну) цього відображення, якобіан та похідну оберненого відображення.

Розв'язання. Знаходимо похідні:

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = 2x_1;\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = 2x_2;\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = x_2;\ \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = x_1.$$

Таким чином, $y'_x = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix}$, а якобіан $\det y'_x = 2x_1^2 - 2x_2^2$.

Якщо $2x_1^2 \neq 2x_2^2$, тобто $x_1 \neq \pm x_2$, то локально існує обернене відображення, при цьому $x'_y = (y'_x)^{-1} = \dfrac{1}{2(x_1^2 - x_2^2)}\begin{bmatrix} x_1 & -2x_2 \\ -x_2 & 2x_1 \end{bmatrix}$.

6. Функції, що задані неявно (неявні функції).

Нехай $z = F(x, y)$ – функція двох змінних. Розглянемо рівняння $F(x, y) = 0$. Якщо існує функція $y = f(x)$ з областю визначення $[a, b]$, така, що справедлива тотожність $F(x, f(x)) \equiv 0$ при $x \in [a, b]$, то кажуть, що рівняння $F(x, y) = 0$ неявно задає функцію $y = f(x)$. У деяких випадках може існувати безліч функцій однієї змінної, що відповідають одній функції $z = F(x, y)$.

Наприклад, якщо $z = F(x, y) \equiv 0$ (тотожно дорівнює нулю), то підстановка довільної функції однієї змінної $y = f(x)$ у рівняння $F(x, y) = 0$, природно, дає тотожність $F(x, f(x)) \equiv 0$ (тобто $0 \equiv 0$). Корисним є тільки той типовий випадок, коли функцій, що задаються неявно рівнянням $F(x, y) = 0$, не надто багато – одна або декілька.

Рівняння $x^2 + y^2 - 1 = 0$ задає дві функції: $y = \sqrt{1 - x^2}$ і $y = -\sqrt{1 - x^2}$ з областю визначення $[-1, 1]$.

Важливим є такий факт.

Теорема 2.3.3 (про неявну функцію). Нехай функція $z = F(x, y)$ неперервно диференційовна в області Ω і в точці $(x_0, y_0) \in \Omega$ частинна похідна $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ не дорівнює нулю: $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Тоді існують відрізок $[-h + x_0, h + x_0]$, $h > 0$ і єдина, до того ж неперервно диференційовна, функція $y = f(x)$, визначена на $[-h + x_0, h + x_0]$, неявно задана рівнянням $F(x, y) = 0$ і така, що $f(x_0) = y_0$. При цьому має місце формула

$$y_x'(x_0) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

Приклад 2.3.9. Знайти y'_x, якщо $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

Розв'язання. Знаходимо $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y$.

Якщо $y = 1$, то $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$. Тому існує єдина неперервно диференційовна функція $y = f(x)$, задана рівнянням $x^2 + y^2 - 1 = 0$ і така, що $f(0) = 1$. При цьому

$$y'_x(0) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = -\left.\frac{2x}{2y}\right|_{(0,\,1)} = 0.$$

Це функція $y=\sqrt{1-x^2}$, що визначена для $x\in[-1,1]$ і $y'_x=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. При $x=0$ дійсно $y'(0)=0$.

Це ж рівняння $x^2+y^2-1=0$ задає й іншу функцію – $y=-\sqrt{1-x^2}$, визначену для $x\in[-1,1]$, що в точці $x=0$ набуває іншого значення: $y(0)=-1$. Така функція єдина, оскільки $\dfrac{\partial F}{\partial y}\neq 0$ при $y=1$. А от у точці $(1,0)$ похідна $\dfrac{\partial F}{\partial y}=0$. Тому, з одного боку, не існує відрізка $[1-h,1+h]$ для $h>0$, на якому б були функції, неявно задані рівнянням $x^2+y^2-1=0$, а з іншого – на відрізку $[-1,1]$ існують дві функції $f_1(x)=\sqrt{1-x^2}$ і $f_2(x)=-\sqrt{1-x^2}$, такі, що $f_1(1)=f_2(1)=0$.

Приклад 2.3.10. Знайти похідні функції $x^5+yx+1=0$.

Розв'язання. Розглянемо $F(x,y)=x^5+yx+1$ і відповідне рівняння $x^5+yx+1=0$. Виразимо x як функцію y, тобто знайдемо корені цього рівняння п'ятого степеня залежно від коефіцієнта y при x.

Знайдемо $\dfrac{\partial F}{\partial x}=5x^4+y$. Цей вираз дорівнює 0 для $y=-5x^4$, звідки маємо $x^5-2x^5+1=0$, або $4x^5=1$, отже, $x_1=\sqrt[5]{\dfrac{1}{4}}$, $y_1=-5\sqrt[5]{\dfrac{1}{256}}$.

Таким чином, для $y<-\dfrac{5}{\sqrt[5]{256}}$ і $y>-\dfrac{5}{\sqrt[5]{256}}$ такі функції $x=x(y)$ існують і є диференційовними.

Нехай, наприклад, $y_0=0>-\dfrac{5}{\sqrt[5]{256}}$. Тоді маємо рівняння $x^5+1=0$. Єдиний дійсний корінь цього рівняння – $x_0=-1$. При цьому за теоремою про неявну функцію

$$x'_0(y_0)=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}=-\frac{x}{5x^4+y}\Bigg|_{(x_0,\,y_0)}=-\frac{1}{5}.$$

Бачимо, що $x'_y(y)=-\dfrac{x}{5x^4+y}$ є диференційовною функцією незалежної змінної y для $y>-\dfrac{5}{\sqrt[5]{256}}$. Тому можна знайти другу похідну:

$$x''_{yy}=-\frac{x'_y\left(5x^4+y\right)-x\left(20x^3x'_y+1\right)}{\left(5x^4+y\right)^2}=\frac{2x}{\left(5x^4+y\right)^2}-\frac{20x^4}{\left(5x^4+y\right)^3}.$$

У точці (x_0, y_0), тобто в точці $(-1, 0)$, $x''_{yy}(-1, 0) = -\dfrac{6}{25}$.

Подібним чином можна знайти третю похідну, четверту і т. д., що дає змогу записати розвинення функції $x = x(y)$ за формулою Тейлора – Маклорена, зокрема $x(y) = -1 - \dfrac{1}{5} y - \dfrac{6}{25} y^2 + o(y^2)$. Замість залишкового члена у формі Пеано $o(y^2)$ можна записати залишковий член у формі Лагранжа $\dfrac{1}{6} x'''(\theta) y^3$, де $\theta \in [0, y]$, що дозволяє оцінити похибку, але тут на цьому не будемо зупинятися.

Якщо задано неперервно диференційовну функцію трьох змінних $w = F(x, y, z)$, то рівняння $F(x, y, z) = 0$ теж задає неявно єдину диференційовну функцію $z = z(x, y)$, таку, що $z_0 = z(x_0, y_0)$, якщо $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ і $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Це означає, що існує $h > 0$, таке, що для всіх $x, y : |x - x_0| < h$, $|y - y_0| < h$ функція $z = z(x, y)$ визначена і $F(x, y, z(x, y)) \equiv 0$. При цьому частинні похідні цієї функції можна знайти за формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}.$$

Аналогічний результат має місце і для функцій n змінних $F(x_1, ..., x_n)$.

Неявна функція може бути задана не одним рівнянням, а системою рівнянь.

Нехай, наприклад, $F(x, y, z)$ та $G(x, y, z)$ – неперервно диференційовні функції. Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Нехай точка (x_0, y_0, z_0) задовольняє цій системі і виконується умова

$$\Delta = \left. \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} \neq 0.$$

Тоді існує $h > 0$, таке, що для $z \in [z_0 - h, z_0 + h]$ існують єдині неперервно диференційовні функції $x = \varphi(z)$ та $y = \psi(z)$, такі, що

$$\begin{cases} F(\varphi(z), \psi(z), z) \equiv 0, \\ G(\varphi(z), \psi(z), z) \equiv 0, \end{cases}$$

тобто функції $x = \varphi(z)$ та $y = \psi(z)$ визначаються як неявні функції незалежної змінної z із системи рівнянь

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$$

При цьому похідні x'_z та y'_z можна знайти із системи рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}x'_z+\dfrac{\partial F}{\partial y}y'_z+\dfrac{\partial F}{\partial z}=0, \\ \dfrac{\partial G}{\partial x}x'_z+\dfrac{\partial G}{\partial y}y'_z+\dfrac{\partial G}{\partial z}=0. \end{cases}$$

Визначник цієї лінійної алгебричної системи відносно невідомих x'_z, y'_z не дорівнює 0 за умовою, а тому ця система має єдиний розв'язок.

7. Диференціали вищих порядків.

За означенням, якщо задано функцію $z=f(x,y)$, то диференціал порядку n – це перший диференціал від диференціала порядку $n-1$: $d^n z=d\left(d^{n-1}z\right)$, де величини $dx=\Delta x$ та $dy=\Delta y$ вважаються незалежними від $x,\ y$, тобто фіксованими, при обчисленні частинних похідних відносно $x,\ y$. Так, за цим означенням

$$d^2z=d(dz)=d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)=d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx+d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dy\right)dx+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}dx+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)dy=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Аналогічно означаються диференціали вищих порядків для функцій n змінних. Якщо $y=f(x_1,...,x_n)$, то $d^n y=d\left(d^{n-1}y\right)$, де при обчисленні диференціала прирости незалежних змінних $\Delta x_1=dx_1,\dots,\Delta x_n=dx_n$ вважаються сталими.

Для існування диференціала порядку n достатньо існування і неперервності всіх частинних похідних функції до порядку n включно.

Приклад 2.3.11. Знайти другий диференціал функції $w=xyz$ в точці (1, 2, 3).

Розв'язання. Знайдемо перший диференціал:

$$dw=\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy+\frac{\partial w}{\partial z}dz=yzdx+xzdy+xydz\,.$$

Тоді

$$d^2w=d(dw)=d(yz)dx+d(xz)dy+d(xy)dz=$$

$$=(zdy+ydz)dx+(zdx+xdz)dy+(ydx+xdy)dz=2zdxdy+2ydxdz+2xdydz\,.$$

Отже, в точці $(1,2,3)$ $d^2w=6dxdy+4dxdz+2dydz\,.$

8. Дотична площина.

Рівняння площини, дотичної до поверхні, заданої рівнянням $F(x,y,z)=0$, в точці (x_0,y_0,z_0), яка належить цій поверхні, тобто такої, що $F(x_0,y_0,z_0)=0$, має вигляд

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0\,.$$

Нормальна пряма, тобто пряма, що перпендикулярна до дотичної площини і проходить через точку дотику, задається рівняннями

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}.$$

Приклад 2.3.12. Знайти площину, дотичну до поверхні $\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}=3$ в точці (2, 1, 3).

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні в точці $(2,\ 1,\ 3)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{2x}{4}\bigg|_{(2,1,3)}=1,\ \frac{\partial F}{\partial y}=2y\bigg|_{(2,1,3)}=2,\ \frac{\partial F}{\partial z}=\frac{2z}{9}\bigg|_{(2,1,3)}=\frac{2}{3}.$$

Тоді рівняння дотичної площини має вигляд

$$(x-2)+2(y-1)+\frac{2}{3}(z-3)=0.$$

2.3.2. Похідна за напрямом. Градієнт

Похідна диференційовної функції $w=f(x,y,z)$ за напрямом вектора $\vec{l}=m\vec{i}+n\vec{j}+p\vec{k}$ в точці (x_0,y_0,z_0) визначається таким чином:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\bigg|_{(x_0,y_0,z_0)}=\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\frac{f(x_0+tm,y_0+tn,z_0+tp)-f(x_0,y_0,z_0)}{t\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Звідси за правилом Бернуллі – Лопіталя

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)m+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)n+\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Якщо ввести вектор $grad f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$, що має назву градієнта функції $f(x,y,z)$, то похідна за напрямом може бути записана у вигляді $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}=\frac{grad f\cdot\vec{l}}{|\vec{l}\,|}\bigg|_{(x_0,y_0,z_0)}=pr_{\vec{l}}\,grad f\bigg|_{(x_0,y_0,z_0)}$.

Таким чином, похідна функції в даній точці у даному напрямі дорівнює проекції градієнта функції в даній точці на вектор, що задає напрямок.

Коли напрямок вектора збігається з напрямком градієнта, ця проекція, а тим самим і похідна за напрямом, набуває максимальною значення, яке дорівнює довжині градієнта. Тому напрямок градієнта функції – це напрямок найстрімкішого зростання функції (бо довжина завжди невід'ємна), а довжина градієнта – це швидкість цього зростання.

Приклад 2.3.13. Знайти похідну функції $w=3x^2+4xy^2+2yz^3$ в точці (1,1,1) за напрямом вектора $\vec{l}=3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$.

Розв'язання.

$$gradw = \left(6x+4y^2\right)\vec{i} + \left(8xy+2z^3\right)\vec{j} + 6yz^2\vec{k}\Big|_{(1,\,1,\,1)} = 10\vec{i} + 10\vec{j} + 6\vec{k}\,;$$

$$\frac{\partial w}{\partial \vec{l}} = \frac{30-20+24}{\sqrt{9+4+16}} = \frac{34}{\sqrt{29}}.$$

Приклад 2.3.14. Знайти похідну функції $z = xy + \dfrac{x}{y}$ в точці $(1,\,2)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \vec{i} + 3\vec{j}$.

Розв'язання.

$$gradz = \left(y + \frac{1}{y}\right)\vec{i} + \left(x - \frac{x}{y^2}\right)\vec{j}\Bigg|_{(1,\,2)} = 2{,}5\vec{i} + 0{,}75\vec{j}\,;$$

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \frac{2{,}5+2{,}25}{\sqrt{10}} = \frac{4{,}75}{\sqrt{10}}.$$

2.3.3. Формула Тейлора для функцій багатьох змінних

Формулу Тейлора для функції n змінних $y = f(x_1,\ldots,x_n)$, що має неперервні похідні до порядку $m+1$ включно, можна записати в такій формі:

$$f(x_1+dx_1,\ldots,x_n+dx_n) = f(x_1,\ldots,x_n) + df\Big|_{(x_1,\ldots,x_n)} + \frac{d^2 f}{2}\Big|_{(x_1,\ldots,x_n)} + \ldots +$$

$$+\frac{d^m f}{m!}\Bigg|_{(x_1,\ldots,x_n)} + R_m(f),$$

де залишковий член $R_m(f)$ має вигляд $R_m(f) = \dfrac{d^{m+1} f}{(m+1)!}\Bigg|_{(x_1+\theta dx_1,\ldots,x_n+\theta dx_n)}$, $0 < \theta < 1$ (залишковий член у формі Лагранжа).

Якщо функція $f(x_1,\ldots,x_n)$ має неперервні похідні тільки до порядку m включно, то залишковий член $R_m(f)$ можна записати у формі Пеано $R_m(f) = \alpha\sqrt{dx_1^2+\ldots+dx_n^2}$, де $\alpha \to 0$, якщо $\sqrt{dx_1^2+\ldots+dx_n^2} \to 0$. Нагадаємо: оскільки $x_1,\ldots,x_n$ – незалежні змінні, то їх диференціали – це їх прирости.

Запишемо для прикладу формулу Тейлора для функції двох змінних $z = f(x,y)$ в точці (a,b), обмежившись при цьому першими трьома членами формули Тейлора:

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y-b)^2\right) + R_2(f).$$

Тут прирости незалежних змінних дорівнюють $dx = x-a$, $dy = y-b$.

Приклад 2.3.15. Розвинути функцію $z = e^x \sin y$ в точці $(0, 0)$ за формулою Тейлора до члена з $m = 2$ включно.

Розв'язання. За формулою Тейлора маємо $z = y + xy + \alpha(x^2 + y^2)$, де $\alpha \to 0$ при $x^2 + y^2 \to 0$.

2.3.4. Екстремум функції багатьох змінних

Означення 2.3.1. Точка (a, b) називається точкою максимуму (мінімуму) функції $z = f(x, y)$, а значення функції в цій точці називається максимумом (мінімумом) цієї функції, якщо існує таке $\delta > 0$, що з нерівності $(x-a)^2 + (y-b)^2 < \delta^2$ випливає, що $f(x, y) \le f(a, b)$ (відповідно $f(x, y) \ge f(a, b)$) для точок (x, y), які належать області визначення цієї функції.

Якщо ці нерівності строгі для точок (x, y), відмінних від точки (a, b), то кажуть, що має місце строгий максимум (мінімум). Це означення так званого локального (місцевого) екстремуму.

Має місце така теорема.

Теорема 2.3.4. Функція, що є неперервною на замкненій обмеженій множині, обмежена на цій множині та досягає на цій множині найбільшого та найменшого значень.

Таким чином, у неперервної функції, що має обмежену та замкнену область визначення, обов'язково є точки максимуму та мінімуму.

Необхідна умова існування максимуму (мінімуму). Якщо функція $z = f(x, y)$ неперервно диференційовна в області Ω, то у внутрішній точці максимуму або мінімуму $(a, b) \in \Omega$ частинні похідні функції дорівнюють 0: $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$. Тому цю необхідну умову існування екстремуму називають ще необхідною умовою існування локального екстремуму у внутрішній точці області визначення функції.

Для функцій довільного числа змінних означення екстремуму та необхідна умова його існування формулюються аналогічно. Необхідну умову існування екстремуму диференційовної функції у внутрішній точці області визначення можна ще сформулювати так: у внутрішній точці екстремуму градієнт функції дорівнює 0.

Достатня умова існування екстремуму. Нехай функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні до другого порядку включно в області Ω, точка $(a, b) \in \Omega$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0, \ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0.$$

Складемо матрицю з других частинних похідних у цій точці (матрицю Гессе):

$$H = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}_{(a,\, b)} .$$

Це симетрична матриця, отже, вона має дійсні корені характеристичного рівняння λ_1, λ_2, що є її власними числами. Якщо ці власні числа додатні, то це точка мінімуму, якщо – від'ємні, то це точка максимуму, якщо – різних знаків, то в цій точці немає екстремуму.

Якщо хоча б одне з чисел λ_1, λ_2 дорівнює 0, то наведена вище достатня умова існування екстремуму не дає відповіді. Щоб установити, чи є в точці (a, b) екстремум, не знаходячи власних чисел матриці Гессе, тобто не розв'язуючи характеристичного рівняння, роблять так. З лінійної алгебри відомо, що $\det H = \lambda_1 \lambda_2$. Отже, якщо $\det H > 0$, то знаки власних чисел однакові, а це означає, що в даній точці є екстремум. Якщо ж $\det H < 0$, то власні числа – різних знаків і екстремуму немає. Коли екстремум є, то, щоб визначити, який саме екстремум – максимум чи мінімум, дивляться на знак другої частинної похідної $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. Якщо ця похідна додатна, то й обидва власні числа додатні, а це означає, що в даній точці – мінімум. Якщо вона від'ємна, то в цій точці – максимум.

Приклад 2.3.16. Знайти екстремуми функції

$$z = 10 - x^2 - 2xy - 4y^2 + 2x - 4y .$$

Розв'язання. Знайдемо перші частинні похідні функції та прирівняємо їх до 0:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x - 2y + 2 = 0 ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2x - 8y - 4 = 0 ,$$

тобто треба розв'язати систему $\begin{cases} x + y = 1, \\ x + 4y = -2. \end{cases}$ Її розв'язок: $x = 2$, $y = -1$.

Знайдемо другі частинні похідні: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -8$.

Складемо матрицю Гессе $H = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -8 \end{bmatrix}$ і знайдемо її визначник $\det H = 16 - 4 = 12 > 0$.

Таким чином, екстремум у точці $(2; -1)$ існує, а оскільки $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2 < 0$, то ця точка – точка максимуму.

Достатня умова існування екстремуму функції *n* змінних. Для функції n незалежних змінних $y = f(x_1, ..., x_n)$ достатня умова існування екстремуму формулюється аналогічно. Якщо перші частинні похідні функції в точці $x^* = \left(x_1^*, ..., x_n^*\right)$ дорівнюють 0:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|_{x^*} = 0, \; k = 1, ..., n,$$

тобто виконується необхідна умова існування екстремуму, а функція має неперервні другі похідні в цій точці, то складаємо матрицю з других частинних похідних у цій точці (матрицю Гессе):

$$H = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\right]_{\substack{i=1,...,n \\ k=1,...,n}}.$$

Ця матриця симетрична. Всі корені відповідного характеристичного рівняння є дійсними (це власні числа матриці Гессе). Якщо всі вони мають однаковий знак, тобто або всі додатні, або всі від'ємні, то в цій точці є екстремум. Якщо вони всі від'ємні, то це точка максимуму функції. Якщо ж вони всі додатні, то це точка мінімуму функції. Якщо ж є власні числа різних знаків, то екстремуму в цій точці немає. Нарешті, якщо частина власних коренів дорівнює 0, а всі інші корені одного знаку, то питання про існування екстремуму в даній точці залишається відкритим. Для відповіді на нього тоді потрібний додатковий аналіз, наприклад, із застосуванням похідних більш високих порядків, що виходить за межі програми вищої математики для нематематиків. Оскільки знайти власні числа матриці порядку $n > 2$ важко, використовують так званий критерій Сільвестра, який дає інформацію про знаки власних чисел без знаходження самих власних чисел. Для функцій двох змінних критерій Сільвестра фактично був наведений вище. Наведемо цей критерій для довільного n. Розглянемо так звані кутові мінори Δ_k матриці Гессе:

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}, \; \Delta_3 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{vmatrix}$$

і так далі аж до $\Delta_n = \det H$. Якщо всі кутові мінори Δ_1, Δ_2, ...,Δ_n додатні, то і всі власні числа λ_k додатні, тобто в точці x^* функція має мінімум.

Якщо ж усі кутові мінори з непарними індексами Δ_1, Δ_3, Δ_5,... від'ємні, а всі кутові мінори з парними індексами Δ_2, Δ_4, Δ_6,... додатні (визначники непарного порядку від'ємні, а парного – додатні), то всі власні числа від'ємні, тобто в точці x^* маємо максимум. Зверніть увагу на те, що в точці екстремуму кутові мінори парного порядку мають бути додатними.

Якщо ж кутовий мінор парного порядку від'ємний, то це свідчить про те, що екстремуму в цій точці немає. Для функції двох змінних цей критерій збігається з умовами, що були наведені раніш – визначник матриці Гессе в точці екстремуму має бути додатним (більш точно, не може бути від'ємним), а від знака другої похідної $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ залежить, мінімум це чи максимум.

Приклад 2.3.17. Знайти екстремуми функції

$$w = 2x^2 + 4y^2 + 6z^2 - 4xy + 8yz + 8z + 5 .$$

Розв'язання. Знайдемо перші частинні похідні і прирівняємо їх до 0:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 4x - 4y = 0 ;$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 8y - 4x + 4z = 0 ;$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 12z + 8y + 8 = 0 .$$

звідки $x_0 = -4$; $y_0 = -4$; $z_0 = 2$.

Знайдемо другі частинні похідні:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 4 ;\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -4 ;\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = 0 ;\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 8 ;\ \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = 8 ;\ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 12 .$$

Складемо матрицю Гессе H:

$$H = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & 8 \\ 0 & 8 & 12 \end{bmatrix}.$$

Знайдемо кутові мінори:

$$\Delta_1 = 4 ;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 16 ;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & 8 \\ 0 & 8 & 12 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -4 & 8 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} = 128 - 192 = -64 .$$

Оскільки $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, а $\Delta_3 < 0$, то екстремуму в точці $(4, -4, 2)$ немає.

2.3.5. Умовний екстремум

Досить часто виникають задачі знаходження екстремуму функції $y = f(x_1,...,x_n)$, де незалежні змінні $x_1,...,x_n$, що належать області Ω, повинні задовольняти якісь додаткові умови. Тут ми розглянемо той випадок, коли ці умови, ці зв'язки можна записати у формі рівностей, таких, як $g_i(x_1,...,x_n) = 0$, $i = 1, 2,..., m$, тобто $x_1,...,x_n$ мають задовольняти цій системі рівнянь. Такий екстремум називають умовним екстремумом, а екстремуми, розглянуті вище, на відміну від умовного екстремуму називають безумовними екстремумами.

Далі будемо вважати, що всі функції, які розглядаються, є неперервно диференційовними і, крім того, вектори $grad\ g_i$, $i = 1,..., m$ є лінійно незалежними в усіх точках, що задовольняють системі рівнянь $g_i(x_1,...,x_n)=0$, $i=1, 2,..., m$.

Можна дати таку необхідну умову існування точки умовного екстремуму. Складемо допоміжну функцію (так звану функцію Лагранжа):

$$L(x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_m)=f(x_1,...,x_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x_1,...,x_n).$$

Для того, щоб точка $\left(x_1^0,...,x_n^0\right)$ була точкою екстремуму функції $y=f(x_1,...,x_n)$ за умови виконання рівностей $g_i(x_1,...,x_n)=0$, $i=1, 2,..., m$, повинні існувати такі $\lambda_1^0,...,\lambda_m^0$ (так звані множники Лагранжа), що точка $\left(x_1^0,...,x_n^0,\lambda_1^0,...,\lambda_m^0\right)$ задовольняє необхідні умови існування екстремуму функції Лагранжа $L(x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_m)$, тобто $grad\ L=0$, або в розгорнутому вигляді:

$$\frac{\partial L}{\partial x_k}=0\ ,\ k=1,...,n,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}=0,\ i=1,...,m.$$

Умови $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i}=0$ можна переписати у вигляді $g_i(x_1,...,x_n)=0$. Тому точка $\left(x_1^0,...,x_n^0\right)$, що знайдена з цієї системи, обов'язково задовольняє всі умови

$$g_i(x_1,...,x_n)=0,\ i=1, 2,..., m.$$

Достатні умови існування умовного екстремуму мають досить складний вигляд і тому тут не наводяться.

Приклад 2.3.18. Знайти екстремум функції $z=xy$ за умови $x^2+2xy+4y^2=5$.

Розв'язання. Перепишемо умову у вигляді $x^2+2xy+4y^2-5=0$. Складемо функцію Лагранжа: $L(x,y,\lambda)=xy+\lambda\left(x^2+2xy+4y^2-5\right)$. Знайдемо частинні похідні функції Лагранжа і прирівняємо їх до 0:

$$\frac{\partial L}{\partial x}=y+\lambda(2x+2y)=0,\ \frac{\partial L}{\partial y}=x+\lambda(2x+8y)=0,\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+2xy+4y^2-5=0.$$

Останнє рівняння – це рівняння умови. Перші два рівняння перепишемо в більш зручному вигляді, а саме зведемо подібні за змінними x та y:

$$2\lambda x+(1+2\lambda)y=0,$$

$$(1+2\lambda)x+8\lambda y=0.$$

Відносно невідомих x та y це – лінійна однорідна алгебрична система. Вона завжди має тривіальний нульовий розв'язок: $x=0$, $y=0$. Але цей нульовий розв'язок вочевидь не задовольняє третьому рівнянню: $x^2+2xy+4y^2-5=0$.

Таким чином, потрібне існування ненульового розв'язку лінійної однорідної алгебричної системи, для чого необхідно і достатньо, щоб її визначник дорівнював 0. Отже, треба, щоб $\begin{vmatrix} 2\lambda & 1+2\lambda \\ 1+2\lambda & 8\lambda \end{vmatrix} = 0$, тобто $16\lambda^2 - (1+2\lambda)^2 = 0$, звідки $\pm 4\lambda = 1 + 2\lambda$ і, нарешті, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{6}$.

Підставимо $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ в перше рівняння і одержимо $x + 2y = 0$, тобто $x = -2y$. Підставимо цей вираз у третє рівняння:

$$4y^2 - 4y^2 + 2y^2 - 5 = 0,\ y^2 = \frac{5}{2};\ y_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{5}{2}},\ x_{1,2} = \mp 2\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Підставимо $\lambda_2 = -\frac{1}{6}$ в перше рівняння:

$$-\frac{x}{3} + \frac{2}{3}y = 0,\ x = 2y.$$

Підставимо останній вираз у третє рівняння:

$$4y^2 + 4y^2 + 4y^2 - 5 = 0,\ 12y^2 = 5;\ y_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{5}{12}},\ x_{3,4} = \pm 2\sqrt{\frac{5}{12}}.$$

Таким чином, знайдено чотири точки, в яких тільки і можуть бути екстремуми. Що ж робити далі? Можна міркувати так. Рівняння $x^2 + 2xy + 4y^2 = 5$ – це рівняння кривої другого порядку. Цій кривій відповідає квадратична форма з матрицею $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$. Обидва кутові мінори цієї матриці додатні. Тому за критерієм Сільвестра обидва власні числа цієї матриці додатні, отже, ця крива є еліпсом. Еліпс є обмеженою кривою, тобто обмеженою замкненою множиною. Таким чином, повинні існувати точки максимуму та мінімуму, які знаходяться серед точок (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4). Знайдемо значення функції в цих точках: $z_{1,2} = -5$, $z_{3,4} = \frac{5}{6}$.

Таким чином, в точках $\left(\mp 2\sqrt{\frac{5}{2}}, \pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ функція має мінімум, а в точках $\left(\pm 2\sqrt{\frac{5}{2}}, \pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ – максимум.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1985.

Беклемишева Л.А., Петрович Ю.А., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. – М.: Наука, 1987.

Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1980.

Вища математика: основні означення, приклади і задачі: Навч. посібник: У 2 кн. / Г.Л. Кулініч, Л.О. Максименко, В.В. Плахотник, Г.Й. Призва. – К.: Либідь, 1994. – Кн. 1.

Вища математика: основні означення, приклади і задачі: Навч. посібник: У 2 кн. / І.П. Васильченко, В.Я. Данилов, А.І. Лобанов, Е.Ю. Таран. – К.: Либідь, 1994. – Кн. 2.

Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 ч. – М.: Наука, 1980.

Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: В 2 ч. – М.: Наука, 1982.

Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1982.

Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. – М.: Высш. шк., 1988. – Т. 1.

Марон И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. – М.: Наука, 1965.

Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. – М.: Наука, 1973.

Ніколаєв О.Г. Аналітична геометрія та лінійна алгебра: Навч. посібник. – Х.: Основа, 2000.

Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: В 2 т. – М.: Наука, 1968.

Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука, 1984.

Фролов С.В., Шостак Р.Я. Курс высшей математики. – М.: Высш. шк., 1989.

Шунда Н.М., Томусяк А.А. Практикум з математичного аналізу. Вступ до аналізу. Диференціальне числення. – К.: Вища шк., 1993.

Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Наука, 1970. – Т. 1.

Робочий зошит з лінійної алгебри та аналітичної геометрії / Уклад.: Брисіна І.В., Головченко О.В., Деменко В.Ф., Крашаниця Ю.О., Ніколаєв О.Г., Проценко В.С., Рвачов В.О., Томілова Є.П. – Х.: Харк. авіац. ін-т, 1997.

Робочий зошит. Диференціальне числення функцій однієї та декількох змінних / Уклад.: Брисіна І.В., Головченко О.В., Деменко В.Ф., Крашаниця Ю.О., Ніколаєв О.Г., Проценко В.С., Сікульський В.Т., Рвачов В.О., Хоменко В.В. – Х.: Харк. авіац. ін-т, 1998.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Брисіна Ірина Вікторівна
Головченко Олександр Васильович
Деменко Владислав Федорович
Кошовий Георгій Іванович
Ніколаєв Олексій Георгійович
Проценко Володимир Сидорович
Рвачов Володимир Олексійович
Соловйов Олександр Іванович
Томілова Євгенія Павлівна
Ушакова Олена Григорівна
Хоменко Володимир Васильович

ПРАКТИЧНИЙ КУРС ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Книга 1
Лінійна алгебра і аналітична геометрія
Диференціальне числення функцій однієї та декількох змінних

Редактори: Т.О. Іващенко, Л.О. Кузьменко
Комп'ютерна верстка: Р.П. Шевчук, Р.П. Жуля

Зв. план, 2004
Підписано до друку 28.05.2004
Формат 60×84 1/16. Папір офс. № 2. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 19,7. Обл.-вид. арк. 22,19. Наклад 1000 прим.
Замовлення 187. Ціна вільна

Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського
"Харківський авіаційний інститут"
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
http://www.khai.edu
Видавничий центр "ХАІ"
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
izdat@khai.edu