Робочий зошит
Диференціальне числення функцій однієї та декількох змінних

2004

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет
ім. М. Є. Жуковського
"Харківський авіаційний інститут"

РОБОЧИЙ ЗОШИТ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ТА ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

____
прізвище

____
ім'я та по батькові

____
назва навчального підрозділу (курс, факультет, група)

____
навчальний рік, семестр

Харків "ХАІ" 2004

Затверджено методичною комісією факультету N4
від 29.09.2001р. (протокол N 1)

Укладачі:

І. В. Брисіна,
О. В. Головченко,
В. Ф. Деменко,
Ю. О. Крашаниця,
О. Г. Ніколаєв,
В. С. Проценко,
В. О. Рвачов,
В. Т. Сікульський,
Є. П. Томілова,
О. Г. Ушакова,
В. В. Хоменко

Передмова

Робочий зошит з математичного аналізу для студентів аерокосмічного університету всіх спеціальностей містить матеріал, що вивчається у першому семестрі. Його написано відповідно до діючої програми з урахуванням можливих відмінностей у змісті та обсязі залежно від факультету та спеціальності.

Для оволодіння вміннями та навичками, що потрібні у подальшому навчанні та праці, студент має розв'язати вказану викладачем більшість задач та записати розв'язання до цього зошита. Структура робочого зошита допомогає засвоїти матеріал та здійснювати самоконтроль студенту, а також прискорює процес нагляду з боку викладача за станом засвоєння матеріалу.

Робочий зошит не є замінником конспекта лекцій, підручника або збірника задач з розв'язаннями та вказівками. Цей зошит містить вправи та задачі з теорії границь, диференціального числення функцій однієї та багатьох змінних. Він складається з 17 занять. Кожне заняття містить дві частини: задачі, що повинні розв'язуватися в аудиторії, та задачі для домашньої роботи. Крім того, в зошиті наведені задачі для контрольних робіт та контрольних домашніх завдань по 30 варіантів для кожної контрольної роботи. Задачі для кожного варіанта наведені з таким розрахунком, щоб забезпечити як контрольну роботу в аудиторії, так і контрольне домашнє завдання залежно від того, що саме передбачено в календарному плані для конкретного потоку. Які саме номери включати до контрольного завдання, має вирішувати викладач.

Заняття 1
Тема: Функції та їх загальні властивості. Побудова графіків функцій

1.1. Познайомитися з теоретичними положеннями згідно з темою заняття.

1.2. Завдання для роботи в аудиторії.

1.2.1. При яких значеннях a область визначення функції f містить область значень функції g, якщо $f(x) = \sqrt{\frac{2a+x}{a-x}}$, $g(x) = \frac{1}{x^2+2x+4a-2}$.

Відповідь: $a > 1$.

1.2.2. Представити функцію у вигляді суми парної та непарної функцій, якщо:

1) $y = |x-1|$; 2) $y = a^x$;
3) $y = \ln(1+e^x)$; 4) $y = \sin(x^3 + x^2)$.

Відповідь: 1) $\frac{1}{2}\left(|x-1| + |x+1|\right) + \frac{1}{2}\left(|x-1| - |x+1|\right)$.

1.2.3. Довести, що дана функція періодична і знайти її період:

1) $y = \sin 2x + \sin^2 3x$;
2) $y = \operatorname{tg}(x + \sin x)$; 3) $y = \sin(\cos x)$; 4) $y = |\sin(\sqrt{2}x + 1)|$.

Відповідь: 1) π; 2) 2π; 3) 2π; 4) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

1.2.4. Довести, що функція $y = \sin x + \sin\sqrt{2}x$ неперіодична.

**1.2.5. Знайти період функції: 1) $y = 8\sin\frac{9x}{8} + 2\cos\frac{3x}{2}$;
2) $y = a\sin\frac{p_1 x}{q_1} + b\cos\frac{p_2 x}{q_2}$, де $p_1, p_2, q_1, q_2 \in N$, $p_1 q_2 \neq p_2 q_1$.**

Відповідь: 1) $\frac{16\pi}{3}$; 2) $2\pi n_0 \frac{q_1}{p_1} = 2\pi m_0 \frac{q_2}{p_2}$, де $\frac{p_1 q_2}{p_2 q_1} = \frac{n_0}{m_0}$ – нескоротний дріб.

1.2.6. При якому співвідношені між a, b, c, d графік функції $= \frac{ax+b}{cx+d}$ одержується переносом графіка функції: 1) $y = \frac{1}{x}$; 2) $y = \frac{x-x_1}{x-x_2}$, $x_1 \neq x_2$.

Відповідь: 1) $c \neq 0, bc - ad = c^2$; 2) $c \neq 0$, $bc - ad = c^2(x_2 - x_1)$.

1.2.7. Знайти проміжки зростання і спадання функції $= x^3 - 3a^2 x$, $(a > 0)$. Побудувати графік цієї функції при $a = 2$.

Відповідь: $(-\infty; -a]$, $[a; +\infty)$ – проміжки зростання, $[-a; a]$ – проміжок спадання.

1.2.8. Знайти центр симетрії графіка функції $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.

Відповідь: $\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$.

1.2.9. Знайти відстань від параболи $y = \frac{x^2}{4}$ до прямої $y = -x - 2$.

Відповідь: $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

1.2.10. Знайти найбільший проміжок виду $[a; -\infty)$, на якому функція $y = 1 + 2\sin\frac{x-1}{x+1}$ оборотна, і знайти на цьому проміжку обернену функцію.

Відповідь: $\left[\frac{2-\pi}{2+\pi}; +\infty\right)$, $y = \frac{1+\arcsin 0{,}5(x-1)}{1-\arcsin 0{,}5(x-1)}$, $x \in [-1\,;\ 1 + 2\sin 1]$.

1.2.11. Побудувати графіки функцій: 1) $y = ch\,x$; 2) $y = th\,x$.

1.2.12. Довести: 1) $sh\,(x-y) = sh\,x\,ch\,y - ch\,x\,sh\,y$; 2) $ch\,x\,ch\,y = \frac{1}{2}\Big(ch(x+y) + ch(x-y)\Big)$.

1.2.13. Побудувати графіки рівнянь:

1) $y^2 + 4|x + y| - 4x + 3 = 0$; 2) $|y| = \frac{1}{||x+1|-3|}$.

1.2.14. Задати криву рівнянням і побудувати її:

1) $x = t^3 + 1,\ y + t^2$; 2) $x = \sin 3t,\ y = \sin t$.

1.2.15. Побудувати графіки функцій у полярних координатах: 1) $\rho = e^{\varphi}$; 2) $\rho = \frac{1}{1-\sin\varphi}$; 3) $\rho = 2|cos 3\varphi|$; 4) $\varphi = \arcsin(\rho - 1)$.

1.3. Домашнє завдання.

1.3.1. При яких значеннях a область визначення функції f містить область значень функції g, якщо $f(x) = \lg(x^2 + a)$, $g(x) = \frac{x^2+x-a}{x}$.

Відповідь: $a < -1$, $a > 0$.

1.3.2. Представити функцію у вигляді суми парної і непарної функцій, якщо:
1) $f(x) = (x+1)^3$; 2) $f(x) = \frac{x-3}{x^4}$;
3) $f(x) = sin(x+1)$; 4) $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $|x| < 1$.

Відповідь: $(3x^2 + 1) + (x^3 + 3x)$.

1.3.3. Довести, що дана функція періодична і знайти її період:
1) $y = \sin 4x + 5\cos 6x$; 2) $y = 3\sin 4x + 2\operatorname{tg} 5x$; 3) $y = \cos(\sin x)$;
4) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$.

Відповідь: 1) π; 2) π; 3) π; 4) 2π.

1.3.4. Довести, що функція $y = \sin\sqrt{|x|}$ неперіодична.

1.3.5. Знайти період функції: 1) $y = \sin\frac{3x}{4} + \sin\frac{9x}{8}$; 2) $y = a\sin\frac{p_1 x}{q_1} + b\,\mathrm{tg}\frac{p_2 x}{q_2}$, де $p_1, p_2, q_1, q_2 \in N$, $p_1 q_2 \neq p_2 q_1$.

Відповідь: 1) $\frac{16\pi}{3}$; 2) $2\pi l_0 \frac{q_1}{p_1} = \pi k_0 \frac{q_1}{p_1}$, де $\frac{p_1 q_2}{2 p_2 q_1} = \frac{l_0}{k_0}$ – нескоротний дріб.

1.3.6. Довести, що графіки функцій $y = x^3 - 3a^2 x$ і $y = x^3 - 3ax^2$ одержуються один із другого переносом.

1.3.7. Знайти проміжки зростання і спадання функції $= x^3 - 3bx^2$ $(b > 0)$. Побудувати графік цієї функції при $b = 1$.

Відповідь: $(-\infty; 0]$, $[2b; +\infty)$ – проміжки зростання, $[0; 2b]$ – проміжок спадання.

1.3.8. Знайти центр симетрії графіка функції $y = x^3 - 6x^2$.

Відповідь: $(2; -16)$.

1.3.9. Знайти $max\, f$ **та** $min\, f$, **якщо:** 1) $f(x) = x - \sqrt{1 - x^2}$;

2) $f(x) = \sqrt{6 - x} + \sqrt{x - 2}$.

Відповідь: $1, -\sqrt{2}$; 2) $2\sqrt{2}, 2$.

1.3.10. При якій умові на a, b, c, d **функція** $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ **обернена сама собі.**

Відповідь: $a + d = 0\ |a| + |c| \neq 0$.

1.3.11. Побудувати графіки функцій: 1) $y = sh\, x$; 2) $y = cth\, x$.

1.3.12. Довести : 1) $ch\,(x + y) = ch\, x\, ch\, y + sh\, x\, sh\, y$;

2) $sh\, x\, ch\, y = \frac{1}{2}\Big[sh(x + y) + sh(x - y)\Big]$.

1.3.13. Побудувати графіки рівнянь:

1) $x^2 + y^2 = 2(|x| + |y|)$; 2) $|y| = \log_{\frac{1}{3}}||x + 2| - 1|$.

1.3.14. Задати криву рівнянням і побудувати її:

1) $x = 6t - t^2,\ y = 3t$; 2) $x = \cos t,\ y = \sin 2t$.

1.2.15. Побудувати графіки функцій у полярних координатах:

1) $\rho = \frac{1}{\varphi}$; 2) $\rho = 8 sin\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right)$; 3) $\rho = \frac{\varphi}{\varphi - \pi}$;

4) $\rho = 2|cos 3\varphi|$; 5) $\varphi = arcsin(\rho - 1)$.

1.4. Завдання для самостійної роботи.

Заняття 2

Тема: Границі послідовності. Границі алгебраїчних функцій

2.1. Познайомитися з теоретичними положеннями згідно з темою заняття.

2.2. Завдання для роботи в аудиторії.

Знайти границі послідовностей:

2.2.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+n-n^2+3n^3}{12-7n+5n^3}$.

Відповідь: $\frac{3}{5}$.

2.2.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^4-(n-1)^4}{(2n+1)^4+(n-1)^4}$.

Відповідь: $\frac{15}{17}$.

2.2.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-2+3-...+(2n-1)-2n}{\sqrt{n^2+1}}$.

Відповідь: -1.

2.2.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^2+2^2+..+n^2}{n^2}-\frac{n}{3}\right)$.

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

2.2.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$.

Відповідь: 1.

2.2.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{3^n}}$.

Відповідь: $\frac{4}{3}$.

2.2.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$.

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

2.2.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3-2n^2+1}+\sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt[4]{n^6+6n^5+2}-\sqrt[5]{n^7+3n^3+1}}$.

Відповідь: 1.

2.2.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+1)(n+2)}-\sqrt{(n-1)n}\right)$.

Відповідь: 2.

2.2.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+n}-n-1}$.

Відповідь: 0.

2.2.11. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n}}$.

Відповідь: $-\infty$.

Знайти границі функцій:

2.2.12. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{2x^2-11x-21}{x^2-9x+14}$.

Відповідь: $\frac{17}{5}$.

2.2.13. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$.

Відповідь: 1.

2.2.14. $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^3+3x^2-4x-12}{x^3+3x^2+x+3}$.

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

2.2.15. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$.

Відповідь: $\frac{49}{24}$.

2.2.16. $\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sqrt{x^2+x+1}-2-x}{x^2}$.

Відповідь: $\frac{3}{4}$.

2.2.17. $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

Відповідь: $\frac{4}{3}$.

2.2.18. $\lim\limits_{x\to8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

Відповідь: $\frac{12}{5}$.

2.2.19. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1}$.

Відповідь: $-\frac{1}{4}$.

2.2.20. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[k]{x}-1}$, $\boldsymbol{n, k \in N}$.

Відповідь: $\frac{k}{n}$.

2.2.21. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x^3+7x-1)^6}{(2x^6-13x^2+x)^3}$.

Відповідь: 8.

2.2.22. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}$.

Відповідь: 1.

2.2.23. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[5]{x^7+3}+\sqrt[4]{2x^3-1}}{\sqrt[6]{x^8+x^7+1}-x}$.

Відповідь: ∞.

2.2.24. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}\right)$.

Відповідь: 0.

2.2.25. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2+4x}-\sqrt[3]{x^3-3x^2+4}\right)$.

Відповідь: 2.

2.3. Домашнє завдання.

Знайти границі послідовностей:

2.3.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3-5n+7n^2}{n^3+n^2-15}$.

Відповідь: 0.

2.3.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n+1)^4-(2n-1)^4}{(3n+1)^4+(2n-1)^4}$.

Відповідь: $\frac{65}{97}$.

2.3.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3+5+...+(2n-1)}{n^3}$.

Відповідь: 0.

2.3.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+..+n^2}{n^3}$.

Відповідь: $\frac{1}{3}$.

2.3.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$.

Відповідь: 0.

2.3.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+a+a^2+...+a^n}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+...+\frac{1}{4^n}}$.

Відповідь: $\frac{3}{4(1-a)}$, **якщо** $|a|<1$; ∞, **якщо** $|a|\geq 1$.

2.3.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n(n+1)}\right)$.

Відповідь: 1.

2.3.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$.

Відповідь: 4.

2.3.9. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+n^2+1997}-n)$.

Відповідь: $\frac{1}{3}$.

2.3.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{n^2+3}-n}$.

Відповідь: $\frac{1}{6}$.

2.3.11. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n^3+1}-n\sqrt{n}}$.

Відповідь: $+\infty$.

Знайти границі функцій:

2.3.12. $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2+8x+15}{x^2+5x+6}$.

Відповідь: -2.

2.3.13. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$.

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

2.3.14. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+3x+2}{x^3+x^2+4}$.

Відповідь: $\frac{3}{8}$.

2.3.15. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$.

Відповідь: $\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$.

2.3.16. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

Відповідь: $-\frac{1}{56}$.

2.3.17. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$.

Відповідь: $-\frac{1}{3}$.

2.3.18. $\lim\limits_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

Відповідь: -2.

2.3.19. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$.

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

2.3.20. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$.

Відповідь: $\frac{4}{3}$.

2.3.21. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2(3-7x)^2}{(2x-1)^4}$.

Відповідь: $\frac{49}{16}$.

2.3.22. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^2+1}-\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4-1}}$.

Відповідь: 3.

2.3.23. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[5]{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^7+1}}$.

Відповідь: 0.

2.3.24. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

Відповідь: 0, якщо $x\to+\infty$; $+\infty$, якщо $x\to-\infty$.

2.3.25. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$.

Відповідь: 0.

2.4. Завдання для самостійної роботи.

Заняття 3
Тема: Визначні границі та наслідки із них

3.1. Познайомитися з теоретичними положеннями згідно з темою заняття.

3.2. Завдання для роботи в аудиторії.

Знайти границі функцій:

3.2.1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\sin x}$.

Відповідь: 4.

3.2.2. $\lim\limits_{x\to 0} (x \operatorname{ctg} 5x)$.

Відповідь: $\frac{1}{5}$.

3.2.3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$, $\beta \neq 0$.

Відповідь: $\frac{\alpha}{\beta}$.

3.2.4. $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}$.

Відповідь: $-\frac{5}{2}$.

3.2.5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sin 6x - \sin 7x}$.

Відповідь: -1.

3.2.6. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{2}{\sin 2x \ \sin x} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)$.

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

3.2.7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos 3x^3 - 1}{\sin^6 2x}$.

Відповідь: $-\frac{9}{128}$.

3.2.8. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{4\sin(\frac{\pi}{6}+x) \ \sin(\frac{\pi}{6}+2x) - 1}{\sin x}$.

Відповідь: $3\sqrt{3}$.

3.2.9. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}(1+\mathrm{x})\,\mathrm{tg}(1-\mathrm{x})-\mathrm{tg}^2 1}{\mathrm{tg}^2 \mathrm{x}}$.

Відповідь: $\mathrm{tg}^4 1 - 1 = -\frac{\cos 2}{\cos^4 1}$.

3.2.10. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin 7\pi \mathrm{x}}{\sin 2\pi \mathrm{x}}$.

Відповідь: $-\frac{7}{2}$.

3.2.11. $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sin \mathrm{x}}{\pi^2-\mathrm{x}^2}$.

Відповідь: $\frac{1}{2\pi}$.

3.2.12. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(x \sin\frac{\pi}{\mathrm{x}}\right)$.

Відповідь: π.

3.2.13. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(x^2 \left(\cos\frac{1}{\mathrm{x}} - \cos\frac{3}{\mathrm{x}}\right)\right)$.

Відповідь: 4.

3.2.14. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{1-\mathrm{tg}^2 \mathrm{x}}{\sqrt{2}\cos \mathrm{x}-1}$.

Відповідь: 4.

3.2.15. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{\cos(\frac{2\pi}{3}-\mathrm{x})}{\sqrt{3}-2\cos \mathrm{x}}$.

Відповідь: 1.

3.2.16. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2\sin 3\mathrm{x}}-\sqrt{1-4\sin 5\mathrm{x}}}{\sin 6\mathrm{x}}$.

Відповідь: $\frac{13}{6}$.

3.2.17. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{\cos 4x}\ -\sqrt[3]{\cos 5x}}{1-\cos 3x}$.

Відповідь: $\frac{1}{3}$.

3.2.18. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg} x^2}$.

Відповідь: $\frac{3}{2}$.

3.2.19. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[4]{\sin x}-\sqrt[3]{\sin x}}{\cos^2 x}$.

Відповідь: $\frac{1}{24}$.

3.2.20. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin 2x}{x}$.

Відповідь: 2.

3.2.21. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{5x}{\operatorname{arctg} 6x}$.

Відповідь: $\frac{5}{6}$.

3.2.22. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x-3\arcsin 4x}{\sin 5x-6\operatorname{arctg} 7x}$.

Відповідь: $\frac{10}{37}$.

3.2.23. $\lim\limits_{x\to 2} (2x-3)^{\frac{x}{x-2}}$.

Відповідь: e^4.

3.2.24. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{5x^3+2}{5x^3}\right)^{\sqrt{x}}$.

Відповідь: 1.

3.2.25. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1+x}}$.

Відповідь: 1.
3.2.26. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x}$.

Відповідь: e^2**.**
3.2.27. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}$.

Відповідь: 2.
3.2.28. $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$.

Відповідь: e^{-1}**.**
3.2.29. $\lim\limits_{x\to+\infty}[(3x-2)(\ln(2x-1)-\ln(2x+1))]$.

Відповідь: −3.
3.2.30. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)+\ln(x-h)-2\ln x}{h^2}$ $(x>0)$.

Відповідь: $-\frac{1}{x^2}$**.**
3.2.31. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}$.

Відповідь: $\frac{3}{2}$**.**
3.2.32. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$.

Відповідь: $\sqrt{e}$**.**

3.2.33. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln \operatorname{ch} x}{\ln\cos x}$.

Відповідь: -1.

3.2.34. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$.

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

3.2.35. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\operatorname{ch}^2 x}{\ln(1+\operatorname{sh}^2 x)}$.

Відповідь: 0.

3.2.36. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(\boldsymbol{a} > 0,\ \boldsymbol{b} > 0,\ \boldsymbol{c} > 0)$.

Відповідь: $\sqrt[3]{\boldsymbol{abc}}$.

3.2.37. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x+\operatorname{arctg}^2 x\right)^{\frac{1}{\operatorname{arctg} x^2}}$.

Відповідь: $\sqrt{e}$.

3.2.38. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\ln\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\ln^{-2}\frac{x+1}{x-1}\right)$.

Відповідь: $\frac{1}{8}$.

3.3. Домашне завдання.
Знайти границі функцій:

3.3.1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

Відповідь: $\frac{3}{2}$.

3.3.2. $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

Відповідь: $-\frac{3}{2}$.

3.3.3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 7x-\sin 2x}{\sin x}$.

Відповідь: 5.

3.3.4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}$.

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

3.3.5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin 2x}{\sin x}$.

Відповідь: 2.

3.3.6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{x-\sin 2x}$.

Відповідь: 0.

3.3.7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(a+2x)-2\sin(a+x)+\sin a}{x^2}$.

Відповідь: $-\sin \boldsymbol{a}$.

3.3.8. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$.

Відповідь: 14.

3.3.9. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg(a+x)\,tg(a-x)-tg^2\,a}}{\mathrm{x^2}}$.

Відповідь: $-\frac{\cos 2\mathrm{a}}{\cos^4 \mathrm{a}}$ $\left(\boldsymbol{a \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}}\textbf{, где } \boldsymbol{k \in N}\right)$.

3.3.10. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{\sin x-\cos x}}{\mathrm{1-tg^3\,x}}$.

Відповідь: $-\frac{\sqrt{2}}{6}$.

3.3.11. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\,\mathrm{\cos x-1}}{\mathrm{1-tg^2\,x}}$.

Відповідь: $\frac{1}{4}$.

3.3.12. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{\mathrm{\sin (x-2)}}{\mathrm{x^2-4}} + 2^{\frac{1}{\mathrm{(x-2)^2}}}\right)$.

Відповідь: $+\infty$.

3.3.13. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{\cos x-\sin x+1}}{\mathrm{\cos x+\sin x-1}}$.

Відповідь: 1.

3.3.14. $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sqrt{\mathrm{1-tg\ x}}-\sqrt{\mathrm{1+tg\,x}}}{\mathrm{\sin 2x}}$.

Відповідь: $-\frac{1}{2}$.

3.3.15. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}-1}{2\sin^2 x-1}$.

Відповідь: $\frac{1}{3}$.

3.3.16. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.

Відповідь: $\frac{4}{3}$.

3.3.17. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

Відповідь: $-\frac{1}{12}$.

3.3.18. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(x^2+3x)}{\arcsin 2x}$.

Відповідь: $\frac{3}{2}$.

3.3.19. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(x+h)-\operatorname{arctg} x}{h}$.

Відповідь: $\frac{1}{1+x^2}$.

3.3.20. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right)\right)$.

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

3.3.21. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{3x-4}{x}\right)^{\frac{x+1}{x-2}}$.

Відповідь: e^3.

3.3.22. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

Відповідь: e.

3.3.23. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$.

Відповідь: 0.

3.3.24. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{5x}-e^{3x}}{3^x-2^x}$.

Відповідь: $\frac{2}{\ln\frac{3}{2}}$.

3.3.25. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$.

Відповідь: $a-b$.

3.3.26. $\lim\limits_{x\to 10} \frac{\lg x-1}{x-10}$.

Відповідь: $\frac{\lg e}{10}$.

3.3.27. $\lim\limits_{x\to -\infty} [(x+3)(\ln(2-4x)-\ln(1-4x))]$.

Відповідь: $-\frac{1}{4}$.

3.3.28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x+x^2)-\ln(1-3x+x^2)}{x}$.

Відповідь: 6.

3.3.29. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$.

Відповідь: $\dfrac{1}{5}$.

3.3.30. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Відповідь: $e^{\frac{3}{2}}$.

3.3.31. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$.

Відповідь: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2$.

3.3.32. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x})}{x^3}$.

Відповідь: −2.

3.3.33. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{x}^2} - \cos \mathrm{x}}{\sin^2 \mathrm{x}}$.

Відповідь: $\frac{3}{2}$.

3.3.34. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{ax}} - \mathrm{e}^{\mathrm{bx}}}{\sin \mathrm{ax} - \sin \mathrm{bx}}$, $(\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b})$.

Відповідь: 1.

3.3.35. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\mathrm{ch}\, 2\mathrm{x}}{\mathrm{ch}\, \mathrm{x}}\right)^{\frac{1}{\mathrm{x}^2}}$.

Відповідь: $\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$.

3.3.36. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\ln(1 + 2^{\mathrm{x}}) \ln\left(1 + \frac{3}{\mathrm{x}}\right)\right)$.

Відповідь: $\ln \mathbf{8}$.

3.4. Завдання для самостійної роботи.

Заняття 4
Тема: Доведення границь на основі їх визначення. Однобічні границі. Порівняння нескінченно малих величин. Точки розриву та їх класифікація

4.1. Познайомитися з теоретичними положеннями згідно з темою заняття.

4.2. Завдання для роботи в аудиторії.

4.2.1. При яких значеннях α і β функція $f(x)=\sqrt[3]{x^2-x^3}-\alpha x-\beta$ є нескінченно малою при $x\to\infty$.

Відповідь: $\alpha=-1$, $\beta=\frac{1}{3}$.

4.2.2. Побудувати графік функції: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^4}$ $(x\geq 0)$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}((x-1)\operatorname{arctg}x^n)$.

Відповідь: 1) $y=0$, якщо $0\leq x<1$; $y=\frac{1}{2}$, якщо $x=1$; $y=1$, якщо $1<x<\infty$; 2) $y=0$, якщо $-1<x\leq 1$; $y=\frac{\pi}{2}(x-1)$, якщо $x>1$.

4.2.3. Виходячи із рівності $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$.

4.2.4. Довести, що: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{2n-1}=\frac{3}{2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{3n-11}}=0$.

4.2.5. Довести, що: 1) $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2-1)=1$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-1}{5x+3}=\frac{2}{5}$.

4.2.6. У коло радіусом R вписаний квадрат, у квадрат вписаний круг, у цей круг знову вписаний квадрат і так n раз. Знайти границю суми площин усіх кругів і границю суми площин усіх квадратів при $n\to\infty$.

Відповідь: $2\pi R^2$; $4R^2$.

4.2.7. Знайти однобічні границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|\sin x|}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 2} e^{\frac{1}{x-2}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1-3^{\operatorname{ctg}x}}$.

Відповідь: 1) $-1; 1$; 2) $1; 0$; 3) $0; +\infty$; 4) $1; 0$.

4.2.8. Порівняти порядок малості при $x \to 0$ даної функції із нескінченно малою $\beta(x) = x$: 1) $\sqrt[3]{\sin x}$; 2) $\sqrt{4+x} - 2$; 3) $\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-x}$;
4) $\operatorname{tg}^3\left(\sqrt{x\sqrt[3]{x}}\right)$; 5) $\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}$.

Відповідь: 1) нижчий; 2) однаковий; 3) однаковий; 4) вищий; 5) вищий.

4.2.9. Довести, що при $x \to 0$ нескінченно малі величини $e^{2x} - e^{x}$ і $\sin 2x - \sin x$ будуть еквівалентними.

4.2.10. Довести, що в околі точки $x = 0$ нескінченно малі функції $\alpha(x) = \sqrt[n]{1+x} - 1$ і $\beta(x) = \frac{x}{n}$, $(n \in N)$ еквівалентні. Виходячи з цього, знайти наближено: 1) $\sqrt[3]{1042}$; 2) $\sqrt[4]{10124}$.

Відповідь: 1) $10,14$; 2) $10,03$.

4.2.11. Знаючи, що $\sqrt[n]{1+x} - 1$ і $\frac{x}{n}$ – дві еквівалентні нескінченно малі при $x \to 0$, знайти границі: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+\sin x}-1}{\operatorname{tg} x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt[n]{1+\operatorname{tg} x}-1)(\sqrt{1+x}-1)}{2x\sin x}$.

Відповідь: 1) $\frac{1}{n}$; 2) $\frac{1}{4n}$.

Знайти точки розриву функції та встановити їх характер; побудувати схематично її графік (4.2.12 - 4.2.16).

4.2.12. $y = \frac{x^2-1}{x^3-1}$.

Відповідь: $x_1 = 1$ – точка усуваного розриву.

4.2.13. $y = \frac{|x+1|}{x+1}$.

Відповідь: $x_1 = -1$ – точка розриву з скінченним стрибком.

4.2.14. $y = \frac{1}{\lg|x|}$.

Відповідь: $x_1 = 0$ – точка усуваного розриву; $x_{2,3} = \pm 1$ – точки розриву другого роду.

4.2.15. $y = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$.

Відповідь: $x_1 = 0$ – точка розриву з скінченним стрибком.

4.2.16. $y = \frac{1}{1+2^{\operatorname{tg} x}}$.

Відповідь: $x_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$ – точки розриву з скінченним стрибком.

4.2.17. Показати, що рівняння $x \cdot 2^x = 1$ має, по меншій мірі, один невід'ємний корінь, менший за одиницю.

4.2.18. Дослідити на неперервність і побудувати графік функції:
1) $y = x - E(x)$; 2) $y = \frac{1}{x - E(x)}$; 3) $y = (-1)^{E(x)}$.

4.3. Домашнє завдання.

4.3.1. При яких значеннях α і β функція $f(x) = \sqrt{4x^2+x+1} - \alpha x - \beta$ є нескінченно малою при $x \to -\infty$.

Відповідь: $\alpha = -2,\ \beta = -\frac{1}{4}$.

4.3.2. Побудувати графік функції: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - x^{2n}\right)$ $(-1 \le x \le 1)$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^{2n} x$.

Відповідь: 1) $y = 1$, якщо $|x| < 1$; $y = 0$, якщо $|x| = 1$; 2) $y = 0$, якщо $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$; $y = 1$, якщо $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$; $k \in Z$.

4.3.3. Користуючись формулою $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, **знайти**
$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sin\frac{a}{n^2} + \sin\frac{3a}{n^2} + \ldots + \sin\frac{(2n-1)a}{n^2}\right)$.

Відповідь: a.

4.3.4. Довести, що: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$; **2)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{2n-11}} = 0$.

4.3.5. Довести, що: 1) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)=1$; **2)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x-3}=\frac{1}{2}$.

4.3.6. Дано правильний трикутник з стороною a**; із трьох висот його будується новий правильний трикутник і так** n **раз. Знайти границю суми площин усіх трикутників при** $n\to\infty$**.**

Відповідь: $\sqrt{3}a^2$**.**

4.3.7. Знайти однобічні границі:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{x-1}$; **2)** $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$; **3)** $\lim\limits_{x\to 1}\operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}$; **4)** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{|x-2|}{x-2}$.

Відповідь: 1) $-\infty;+\infty$; **2)** $0;+\infty$; **3)** $-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}$; **4)** $-1;1$.

4.3.8. Порівняти порядок малості при $x \to 0$ даної функції із нескінченно малою $\beta(x) = x$: 1) $-\frac{x}{2}$; 2) $x + \sqrt[3]{\sin x}$; 3) $\operatorname{tg} x - \sin x$; 4) $\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}}$; 5) $\lg\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{\sin x}\right)$.

Відповідь: 1) однаковий; 2)нижчий; 3) вищий; 4) однаковий; 5) нижчий.

4.3.9. Довести, що при $x \to 0$ нескінченно малі величини $\ln(1 + 3x\sin x)$ і $\operatorname{tg}(3x^2)$ будуть еквівалентними.

4.3.10. Довести, що в околі точки $x = 0$ нескінченно малі функції $\alpha(x) = \sqrt{1+x} - 1$ і $\beta(x) = \frac{1}{2}x$ еквівалентні. Виходячи з цього, знайти наближено: 1) $\sqrt{912}$; 2) $\sqrt{1672}$.

Відповідь: 1) $30,2$; 2) $40,9$.

4.3.11. Знаючи, що $\sqrt{1+x} - 1$ і $\frac{1}{2}x$ – дві еквівалентні нескінченно малі при $x \to 0$, знайти границі: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$.

Відповідь: 1) $\frac{1}{4}$; 2) 1.

Знайти точки розриву функції та установити їх характер; побудувати схематично її графік (4.3.12 - 4.3.16).

4.3.12. $y = \dfrac{2^{\frac{1}{x-2}}-1}{2^{\frac{1}{x-2}}+1}$.

Відповідь: $x_1 = 2$ – точка розриву з скінченним стрибком.

4.3.13. $y = \dfrac{1}{(x-1)(x-5)}$.

Відповідь: $x_1 = 1, x_2 = 5$ – точка розриву 2-го роду.

4.3.14. $y = \dfrac{1}{1-e^{1-x}}$.

Відповідь: $x_1 = 1$ – точка розриву 2-го роду;

4.3.15. $y = \dfrac{\sin x}{x}$.

Відповідь: $x_1 = 0$ – точка усуваного розриву.

4.3.16. $y = \dfrac{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x-3}}{x(x-5)}$.

Відповідь: $x_1 = 0$ – точка усуваного розриву, $x_2 = 3$ – точка розриву з скінченним стрибком, $x_3 = 5$ – точка розриву 2-го роду.

4.3.17. $y = \dfrac{x+1}{x^3+6x^2+11x+6}$.

Відповідь: $x_1 = -2$, $x_2 = -3$ – точки розриву 2-го роду, $x_3 = -1$ – точка усуваного розриву.

4.3.18. Використовуючи властивості неперервних функцій, переконатися у тому, що рівняння $x^5 - 2x = 1$ має, по меншій мірі, один корінь, який знаходиться між 1 та 2.

4.4. Завдання для самостійної роботи.

Заняття 5
Тема: Контрольна робота "Границі". Похідна, техніка диференціювання

5.1. Підготуватися до контрольної роботи. Познайомитися з теоретичними положеннями згідно з темою другої частини заняття.

5.2. Контрольна робота "Границі"(варіанти контрольної роботи наведено в кінці зошита).

5.3. Завдання для роботи в аудиторії (рекомендується виконувати в окремому зошиті).

Знайти похідні даних функцій (5.3.1 - 5.3.18):

5.3.1. $y = (x+3)^3(2x-5)^2$.

Відповідь: $(x+3)^2(2x-5)(10x-3)$.

5.3.2. $y = x\sqrt{x+3}$.

Відповідь: $\frac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}}$.

5.3.3. $y = \frac{x^2+5}{2x-3}$.

Відповідь: $\frac{2(x^2-3x-5)}{(2x-3)^2}$.

5.3.4. $y = \sqrt{a^2-x^2}$.

Відповідь: $-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

5.3.5. $y = \frac{\sqrt{2-x}}{x}$.

Відповідь: $\frac{x-4}{2x^2\sqrt{2-x}}$.

5.3.6. $y = \sin^3(\sqrt{x}+1)$.

Відповідь: $\frac{3}{2\sqrt{x}}\sin^2(\sqrt{x}+1)\cos(\sqrt{x}+1)$.

5.3.7. $y = \frac{\cos x}{\sin^4 x+1}$.

Відповідь: $\frac{-\sin x(1+\sin^2 2x+\sin^4 x)}{(\sin^4 x+1)^2}$.

5.3.8. $y = \operatorname{ctg} x^2 - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 2x$.

Відповідь: $-2\left(\frac{x}{\sin^2 x} + \frac{\operatorname{tg}^2 2x}{\cos^2 2x}\right)$.

5.3.9. $y = \operatorname{ctg}^3 x - 3\operatorname{ctg} x - 3x$.

Відповідь: $-3\operatorname{ctg}^4 x$.

5.3.10. $y = x\arcsin\sqrt{x}$.

Відповідь: $\arcsin\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{1-x}}$.

5.3.11. $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{2}}{x}$.

Відповідь: $\frac{1}{x^2+2}$.

5.3.12. $y = \ln(\sqrt{1+x^2}+2)$.

Відповідь: $\frac{x}{1+x^2+2\sqrt{1+x^2}}$.

5.3.13. $y = \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+x\sqrt{3}}{\sqrt{2}-x\sqrt{3}}\right)^2$.

Відповідь: $\frac{2}{2-3x^2}$.

5.3.14. $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Відповідь: $-xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

5.3.15. $y = 3^{\sin 3x}$.

Відповідь: $3^{1+\sin 3x}\ln 3\cos 3x$.

5.3.16. $y = \mathrm{ch}\frac{x}{5}$.

Відповідь: $\frac{1}{5}\mathrm{sh}\frac{x}{5}$.

5.3.17. $y = 2\,\mathrm{arctg}\left(\mathrm{th}\,\frac{x}{2}\right)$.

Відповідь: $\frac{1}{\mathrm{ch}\,x}$.

5.3.18. $y = \frac{1}{2}\mathrm{th}\,x + \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{1+\sqrt{2}\,\mathrm{th}\,x}{1-\sqrt{2}\,\mathrm{th}\,x}$.

Відповідь: $\frac{1}{1-\mathrm{sh}^4 x}$.

Знайти значення похідної у заданій точці (5.3.19 - 5.3.22):

5.3.19. $y = (1+x)\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3}, \quad x = 1$.

Відповідь: -2.

5.3.20. $y = 3\cos 2x - \sqrt{1-\sin 2x}(\sin x + \cos x), \quad x = \frac{\pi}{6}$.

Відповідь: $-2\sqrt{3}$.

5.3.21. $y = \ln(1+sin^2 x) - 2\sin x\cdot\mathrm{arctg}\sin x, \quad x = \frac{\pi}{2}$.

Відповідь: 0.

5.3.22. $y = \ln\frac{x^4-x^2+1}{x^4+2x^2+1} + 2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1-2x^2}$, $x = 1$.

Відповідь: 6.

Довести, що дані функції є розв'язками відповідних рівнянь (5.3.23 - 5.3.24):

5.3.23. $y = 3 + \frac{5}{x}; \quad xy' + y = 3$.

5.3.24. $y = \mathrm{arcctg}\sqrt{\mathrm{tg}^2 x + c}; \quad y' = -\frac{\sin x\sin^3 y}{\cos^3 x\cos y}$.

5.3.25. Знайти значення α і β, при яких функція

$$y = \begin{cases} 2x - 2, & \text{якщо } x \le 1, \\ \alpha(x-1)(x-2)(x-\beta), & \text{якщо } 1 < x < 2, \\ \frac{x}{2} - 1, & \text{якщо } x \ge 2, \end{cases}$$

а) скрізь неперервна, б) скрізь диференційовна.

Відповідь: а) α, β – будь-які числа; б) $\alpha = \frac{5}{2}$; $\beta = \frac{9}{5}$.

5.3.26. Знайти значення α і β, при яких функція

$$y = \begin{cases} (x+\alpha)e^{-\beta x}, & \text{якщо } x < 0, \\ \alpha x^2 + \beta x + 1, & \text{якщо } x \ge 0, \end{cases}$$

всюди диференційовна.

Відповідь: $\alpha = 1$; $\beta = \frac{1}{2}$.

5.3.27. Дослідити на диференційовність функції:

1) $y = |x^3(x+1)^2(x+2)|$;

2) $y = \begin{cases} x^3, & \text{якщо } x \le 0, \\ e^{-\frac{1}{x}}, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$

Відповідь: 1) диференційовна скрізь, крім точки $x=-2$; 2) диференційовна скрізь.

5.4. Завдання для роботи в аудиторії (рекомендується виконувати в окремому зошиті).

Знайти похідні даних функцій (5.4.1 - 5.4.18):

5.4.1. $y=(3+4x+5x^2)^2$.

Відповідь: $6(3+4x+5x^2)^2(2+5x)$.

5.4.2. $y=\sqrt{x-\sqrt{3x-1}}$.

Відповідь: $\frac{2\sqrt{3x-1}-3}{4\sqrt{3x^2-x-(3x-1)^{3/2}}}$.

5.4.3. $y=\frac{2x-1}{3x^2+4}$.

Відповідь: $\frac{-2(3x^2-3x-4)}{(3x^2+4)^{3/2}}$.

5.4.4. $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$.

Відповідь: $\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

5.4.5. $y=\frac{x}{\sqrt{1+x+x^2}}$.

Відповідь: $\frac{x+2}{2(1+x+x^2)^{3/2}}$.

5.4.6. $y=2\operatorname{tg}^3\frac{1}{x}$.

Відповідь: $-\frac{6\operatorname{tg}^2\frac{1}{x}}{x^2\cos^2\frac{1}{x}}$.

5.4.7. $y=\frac{\cos x}{2\sin^2 x}$.

Відповідь: $-\frac{1+\cos^2 x}{2\sin^3 x}$.

5.4.8. $y=\frac{\sin^2 x}{1+\operatorname{ctg} x}+\frac{\cos^2 x}{1+\operatorname{tg} x}$.

Відповідь: $-\cos 2x$.

5.4.9. $y=x+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$.

Відповідь: $\frac{\sin x}{1+\sin x}$.

5.4.10. $y=x\arccos\frac{1}{x}$.

Відповідь: $\arccos\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

5.4.11. $y=\operatorname{arctg}\frac{2x^4}{1-x^8}$.

Відповідь: $\frac{8x^3}{1+x^8}$.

5.4.12. $y=\sqrt{x}\ln(x^2-2)$.

Відповідь: $\frac{(x^2-2)\ln(x^2-2)+4x^2}{2\sqrt{x}(x^2-2)}$.

5.4.13. $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right)^2-\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}$.

Відповідь: $\frac{20}{x^4+x^2-6}$.

5.4.14. $y = e^{\sqrt{2x}}(\sqrt{2x} - 1)$.

Відповідь: $e^{\sqrt{2x}}$.

5.4.15. $y = 5^{\ln(1+x^2)}$.

Відповідь: $\frac{5^{\ln(1+x^2)} 2x \ln 5}{1+x^2}$.

5.4.16. $y = \operatorname{sh} 2x - 2x$.

Відповідь: $4 \operatorname{sh}^2 x$.

5.4.17. $y = \ln \operatorname{th} \frac{x^2}{4}$.

Відповідь: $\frac{x}{\operatorname{sh} \frac{x^2}{2}}$.

5.4.18. $y = \frac{\operatorname{ch} x^2}{\operatorname{sh}^2 x^2} - \ln \operatorname{cth} \frac{x^2}{2}$.

Відповідь: $-\frac{4x}{\operatorname{sh}^3 x^2}$.

5.4.19. Знайти значення похідної функції $y = \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$ **в точці** $x = \frac{\pi}{4}$.

Відповідь: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Довести, що дані функції є розв'язками відповідних рівнянь (5.4.20 - 5.4.21):

5.4.20 $y = (x+1)e^x$; $y' - y = e^x$.

5.4.21. $y = \sqrt{2 \ln x - x^2 + c}$; $\quad xyy' = 1 - x^2$.

5.4.22. Знайти значення α **і** β**, при яких функція**

$$y = \begin{cases} \alpha + \beta x^2, & \text{якщо } |x| < 1, \\ \frac{1}{|x|}, & \text{якщо } |x| \geq 1, \end{cases}$$

а) скрізь неперервна, б) скрізь диференційовна.

Відповідь: а) $\alpha + \beta = 1$; б) $\alpha = \frac{3}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$.

5.4.23. Знайти значення α **і** β**, при яких функція**

$$y = \begin{cases} \alpha x + \beta, & \text{якщо } x < 0, \\ \alpha \cos x + \beta \sin x, & \text{якщо } x \geq 0, \end{cases}$$

всюди диференційовна.

Відповідь: $\alpha = \beta$.

5.5. Завдання для самостійної роботи.

Заняття 6
Тема: Похідні обернених, неявно заданих і параметрично заданих функцій
Вектор-функції скалярного аргументу та їх диференціювання

6.1. Ознайомитися з теоретичними положеннями згідно з темою заняття.

6.2. Завдання для роботи в аудиторії.

6.2.1. Знайти $\frac{ds}{dt}$, якщо $t = 2 - 3s + s^3$.

Відповідь: $\frac{1}{3(s^2-1)}$.

6.2.2. Знайти $\frac{dx}{dy}$ через x і через y, якщо $y = \frac{1-x^4}{1+x^4}$.

Відповідь: $-\frac{(1+x^4)^2}{8x^3}$ **і** $\frac{-1}{2\sqrt[4]{(1-y)^3(1+y)^5}}$.

6.2.3. Функція $y = \operatorname{th} x$ має обернену функцію $y = arth\, x$. Знайти похідну останньої функції.

Відповідь: $\frac{1}{1-x^2}$.

6.2.4. Показати, що існує однозначна функція $y = y(x)$, визначена рівнянням $y - \varepsilon \sin y = x$ $(0 \le \varepsilon < 1)$, і знайти похідну y'_x.

Відповідь: $\frac{1}{1-\varepsilon \cos y}$.

6.2.5. Виділити однозначні неперервні гілки оберненої функції $x = x(y)$, знайти їх похідні й побудувати графіки, якщо $y = 2x^2 - x^4$.

Відповідь: $x_1 = -\sqrt{1 + \sqrt{1 - y}}$, $y \in (-\infty; 1]$; $x_2 = -\sqrt{1 - \sqrt{1 - y}}$, $y \in [0; 1]$; $x_3 = \sqrt{1 - \sqrt{1 - y}}$, $y \in [0; 1]$; $x_4 = \sqrt{1 + \sqrt{1 - y}}$, $y \in (-\infty; 1]$; $x'_y = \frac{1}{4x(1-x^2)}$.

Знайти похідні від функцій $y = y(x)$, заданих неявно (6.2.6 - 6.2.9):

6.2.6. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Відповідь: $-\frac{b^2x}{a^2y}$.

6.2.7. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

Відповідь: $\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$.

6.2.8. $\sin(xy) + \cos(xy) = tg(x + y)$.

Відповідь: $-\frac{y\cos^2(x+y)(\cos(xy)-\sin(xy))-1}{x\cos^2(x+y)(\cos(xy)-\sin(xy))-1}$.

6.2.9. $y = x + \operatorname{arctg} y$.

Відповідь: $\frac{1+y^2}{y^2}$.

Знайти похідну y', застосовуючи спочатку логарифмування функції $y = f(x)$ (6.2.10 - 6.2.12):

6.2.10. $y = \frac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$.

Відповідь: $\frac{(x-2)^9(x^2-7x+1)}{(x-1)(x-2)(x-3)\sqrt{(x-1)^5(x-3)^4}}$.

6.2.11. $y = (\cos x)^{\sin x}$.

Відповідь: $(\cos x)^{\sin x}(\cos x \ln \cos x - \sin x \operatorname{tg} x)$.

6.2.12. $y = x^{x^x}$.

Відповідь: $x^{x^x} \cdot x^{x-1}(x \ln^2 x + x \ln x + 1)$.

6.2.13. Функція $y = y(x)$ задана рівнянням $\rho = e^{\varphi}$, $-\frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{\pi}{6}$. Знайти $y'(x_0)$, де $x_0 = 1$.

Відповідь: 1.

Знайти похідні y'_x для функцій, заданих параметрично (6.2.14 - 6.2.16):

6.2.14. $x = a\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$.

Відповідь: $-\frac{b}{a}\operatorname{tg} t$.

6.2.15. $x = \sqrt{t^2+1}$, $y = \frac{t-1}{\sqrt{t^2+1}}$.

Відповідь: $\frac{t+1}{t(t^2+1)}$.

6.2.16. $x = a\left(\ln \operatorname{tg}\frac{t}{2} + \cos t - \sin t\right)$, $y = a(\sin t + \cos t)$.

Відповідь: $\operatorname{tg} t$.

6.2.17. Яке геометричне місце точок описує годограф вектор-функції:

1) $\vec{r}(t) = a\cos t\,\vec{i} + b\sin t\,\vec{j}$; **2)** $\vec{r}(t) = a\cos^3 t\,\vec{i} + a\sin^3 \vec{j}$;

3) $\vec{r}(t) = \frac{t^2+1}{(t-1)^2}\vec{i} - \frac{2t}{(t-1)^2}\vec{j}$; **4)** $\vec{r}(t) = R\cos t\,\vec{i} + R\sin t\,\vec{j} + 3\vec{k}$?

Відповідь: 1) еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; **2) астроїда** $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$; **3)** $x+y=1$, $z=0$; **4)** $x^2+y^2=R^2$, $z=3$.

6.2.18. Знайти похідну вектор-функції: 1) $\vec{r} = t\,\vec{i} - e^t\vec{j} + \sin t\,\vec{k}$;
2) $\vec{r} = e^{\sin t}\vec{i} - \frac{1}{2}\sin t^2\,\vec{j} + t\,\vec{k}$.

Відповідь: 1) $\vec{i} - e^t\vec{j} + \cos t\,\vec{k}$; **2)** $\cos t e^{\sin t}\vec{i} - t\cos t^2\,\vec{j} + \vec{k}$.

6.2.19. Довести, що $(\vec{r_1}(t)\times\vec{r_2}(t))' = \vec{r_1'}(t)\times\vec{r_2}(t) + \vec{r_1}(t)\times\vec{r_2'}(t)$, **де** $\vec{r_1}(t)$ **і** $\vec{r_2}(t)$ **– диференційовні вектор-функції.**

6.2.20. Знайти похідну по t **від функції** $\sqrt{\vec{r}^{\,2}}$.

Відповідь: $\vec{r}\,\vec{r'} : \sqrt{\vec{r}^{\,2}}$.

6.3. Домашнє завдання.

6.3.1. **Знайти** $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$, **якщо** $x = y^3 - 4y + 1$.

Відповідь: $\frac{1}{3\mathrm{y}^2-4}$.

6.3.2. **Знайти** $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$ **через** y **і через** x, **якщо** $x = \mathrm{e}^{\arcsin \mathrm{y}}$.

Відповідь: $\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{e}^{-\arcsin \mathrm{y}}$ **та** $\frac{\cos \ln \mathrm{x}}{\mathrm{x}}$.

6.3.3. **Функція** $y = \operatorname{sh} x$ **має обернену функцію** $y = arsh\, x$. **Знайти похідну останньої функції.**

Відповідь: $\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{x}^2}}$.

6.3.4. **Показати, що існує однозначна функція** $y = y(x)$, **визначена рівнянням** $y^3 + 3y = x$, **і знайти похідну** y'_{x}.

Відповідь: $\frac{1}{3(\mathrm{y}^2+1)}$.

6.3.5. **Виділити однозначні та неперервні гілки оберненої функції** $x = x(y)$, **знайти їх похідні та побудувати графіки, якщо** $y = \frac{\mathrm{x}^2}{1+\mathrm{x}^2}$.

Відповідь: $x_1 = -\sqrt{\frac{\mathrm{y}}{1-\mathrm{y}}}$ $(0 \le y < 1)$; $x_2 = \sqrt{\frac{\mathrm{y}}{1-\mathrm{y}}}$ $(0 \le y < 1)$; $\mathrm{x}'_{\mathrm{y}} = \frac{\mathrm{x}^3}{2\mathrm{y}^2}$.

Знайти похідні від функцій $y = y(x)$, заданих неявно (6.3.6 - 6.3.9.):

6.3.6. $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$.

Відповідь: $-\sqrt{\frac{y}{x}}$.

6.3.7. $y^2 - 2xy + b^2 = 0$.

Відповідь: $\frac{y}{y-x}$.

6.3.8. $x\sin y - \cos y + \cos 2y = 0$.

Відповідь: $\frac{\sin y}{2\sin 2y-\sin y-x\cos y}$.

6.3.9. $x - y = arc\sin x - arc\sin y$.

Відповідь: $\frac{\sqrt{1-y^2}(1-\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}(1-\sqrt{1-y^2})}$.

Знайти похідну y', застосовуючи спочатку логарифмування функції $y = f(x)$ (6.3.10 - 6.3.12).

6.3.10. $y = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\sqrt{(x+3)^3}}$.

Відповідь: $-\frac{5x^2+x-24}{3(x-1)^{\frac{1}{2}}(x+2)^{\frac{5}{3}}(x+3)^{\frac{5}{2}}}$.

6.3.11. $y = (\operatorname{arctg} x)^x$.

Відповідь: $(\operatorname{arctg} x)^x\left(\ln \operatorname{arctg} \boldsymbol{x} + \frac{x}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}\right)$.

6.3.12. $y = x^{e^x}$.

Відповідь: $e^x \cdot x^{e^x}\left(\frac{1}{x} + \ln \boldsymbol{x}\right)$.

6.3.13. Функція $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ **задана рівнянням** $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{a\varphi}$, $\frac{4\pi}{3} < \boldsymbol{\varphi} < \boldsymbol{2\pi}$. **Знайти** $\boldsymbol{y}'(\boldsymbol{x}_0)$, **де** $\boldsymbol{x}_0 = \mathbf{0}$.

Відповідь: $-\frac{2}{3\pi}$.

Знайти похідні y'_x **для функцій, заданих параметрично (6.3.14 - 6.3.16):**

6.3.14. $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}\cos^2 \boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}\sin^2 \boldsymbol{t}$.

Відповідь: $-\frac{b}{a}$.

6.3.15. $\boldsymbol{x} = \frac{3at}{1+t^3}$, $\boldsymbol{y} = \frac{3at^2}{1+t^3}$.

Відповідь: $\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$.

6.3.16. $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}(\cos \boldsymbol{t} + \boldsymbol{t}\sin \boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}(\sin \boldsymbol{t} - \boldsymbol{t}\cos \boldsymbol{t})$.

Відповідь: $\operatorname{tg} \boldsymbol{t}$.

6.3.17. Яке геометричне місце точок описує годограф вектор-функції:
1) $\vec{r}(t) = r\cos t\,\vec{i} + r\sin t\,\vec{j}$; 2) $\vec{r}(t) = a(t - \sin t)\,\vec{i} + a(1 - \cos t)\,\vec{j}$;
3) $\vec{r}(t) = 5\,\vec{i} - t^2\,\vec{j} + t^2\,\vec{k}$.

Відповідь: 1) коло $x^2 + y^2 = r^2$; 2) циклоїда; 3) пряма $\frac{x-5}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$.

6.3.18. Знайти похідну вектор-функції: 1) $\vec{r} = a\cos t\,\vec{i} + b\sin t\,\vec{j}$;
2) $\vec{r} = (t-1)e^t\,\vec{i} + \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\vec{j} - \operatorname{arctg} t\,\vec{k}$.

Відповідь: 1) $-a\sin t\,\vec{i} + b\cos t\,\vec{j}$; 2) $te^t\,\vec{i} + \sin^2 t\,\vec{j} - \frac{1}{1+t^2}\vec{k}$.

6.3.19. Довести, що $(\vec{r_1}(t)\cdot\vec{r_2}(t))' = \vec{r}\,'_1(t)\cdot\vec{r_2}(t) + \vec{r_1}(t)\cdot\vec{r}\,'_2(t)$, **де** $\vec{r_1}(t)$ **і** $\vec{r}_2(t)$ **– диференційовні вектор-функції.**

6.3.20. Знайти похідну по t **від функції** $\sqrt{\vec{r}^{\,2}}$.

Відповідь: $2\vec{r}\,\vec{r}\,'$.

6.4. Завдання для самостійної роботи.

Заняття 7

Тема: Задачі на геометричний і фізичний зміст похідної. Диференціал і його застосування у наближених обчисленнях

7.1. Ознайомитися з теоретичними положеннями згідно з темою заняття.

7.2. Завдання для роботи в аудиторії.

7.2.1. Знайти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = \sqrt[3]{x-1}$ у точці з абсцисою 1.

Відповідь: $x - 1 = 0$; $y = 0$.

7.2.2. Скласти рівняння нормалі до параболи $y = x^2 + 4x + 1$, перпендикулярно до прямої, яка з'єднує початок координат з вершиною параболи.

Відповідь: $48y + 32x + 157 = 0$.

7.2.3. Знайти кут між дотичними до параболи $y = x^2 - 3x + 1$, проведеними із точки $(4; 1)$. Побудувати параболу і дотичні.

Відповідь: $\mathrm{arctg}\frac{4}{5}$.

7.2.4. При якому співвідношені між коефіцієнтами парабола 3-го порядку $y = x^3 + px + q$ дотикається до осі OX?

Відповідь: $4p^3 + 27q^2 = 0$.

7.2.5. Знайти кути, під якими перетинаються лінії $y = \frac{x+1}{x+2}$ **і** $y = \frac{x^2+4x+8}{16}$.

Відповідь: 0; $\mathrm{arctg}\frac{18}{31}$.

7.2.6. Знайти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y^4 - 4x^4 - 6xy = 0$ **у точці** $M(1;2)$.

Відповідь: $14x - 13y + 12 = 0$; $13x + 14y - 41 = 0$.

7.2.7. Знайти рівняння дотичної до гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ **у точці** $M(x_0, y_0)$.

Відповідь: $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

7.2.8. Показати, що криві $y = 4x^2 + 2x - 8$ **і** $y = x^3 - x + 10$ **дотикаються у точці** $(3; 34)$. **Що можна сказати відносно точки** $(-2; 4)$?

7.2.9. Знайти кути, під якими перетинаються лінії $x^2 + y^2 - 4x = 1$ **і** $x^2 + y^2 + 2y = 9$.

Відповідь: 45° **і** 45°.

7.2.10. Знайти рівняння дотичної і нормалі до кривої $x = \frac{2t-1}{t^2}$, $y = \frac{3t^2-1}{t^3}$ **у точці** $M(1;2)$.

Відповідь: $3x - y - 1 = 0$; $x + 3y - 7 = 0$.

7.2.11. Знайти кути, під яким перетинаються лінії $y = x^2$ і $x = \frac{5}{3}\cos t$, $y = \frac{5}{4}\sin t$.

Відповідь: $arctg\frac{41}{2}$.

7.2.12. Скласти рівняння дотичної і нормалі площини до кривої $\overrightarrow{r}(t) = a\cos t\,\overrightarrow{i} + a\sin t\,\overrightarrow{j} + \frac{at}{2\pi}\overrightarrow{k}$, які проходять через точку, відповідну параметру $t_0 = \pi$.

Відповідь: $\frac{x+a}{0} = \frac{y}{-a} = \frac{z-\frac{a}{2}}{\frac{a}{2\pi}}$; $4\pi y - 2z + a = 0$.

7.2.13. Два пароплави одночасно виходять з гавані. Один іде на північ з швидкістю 20 км/год, а другий – на захід із швидкістю 24 км/год. З якою швидкістю змінюється відстань між пароплавами?

Відповідь: $\approx 31,2$ км/год.

7.2.14. Точка рухається по спіралі Архімеда $\rho = \alpha\varphi$ так, що кутова швидкість оберту її полярного радіуса постійна і дорівнює 6^0 в секунду. Знайти швидкість видовження полярного радіуса ρ, якщо $\alpha = 10$ м.

Відповідь: $\frac{\pi}{3}$ м/сек.

7.2.15. Знайти dy, якщо $y = 2\sqrt{x^3}(3\ln x - 2)$.

Відповідь: $9\sqrt{x}\ln x dx$.

7.2.16. Знайти диференціал функції $y = y(x)$, заданої рівнянням $x^4 + y^4 - 8x^2 - 10y^2 + 16 = 0$ у точці $(1; 3)$.

Відповідь: $\frac{1}{4}dx$.

7.2.17. Виразити диференціал складеної функції через незалежну змінну та її диференціал: 1) $z = \operatorname{arctg} v$, $v = \frac{1}{\operatorname{tg} S}$; 2) $y = \ln \operatorname{tg}\frac{u}{2}$; $u = \arcsin v$, $v = \cos 2S$.

Відповідь: 1) $-ds$; 2) $-\frac{2ds}{\cos 2S}$.

7.2.18. Замінюючи приріст функції диференціалом, знайти наближено: 1) $\sin 29^0$; 2) $\operatorname{arctg} 1,05$; 3) $\lg 11$.

Відповідь: 1) $0,4849$; 2) $0,8104$; 3) $1,043$.

7.2.19. Довести наближену формулу $\sqrt[n]{a^n + x} \approx a + \frac{x}{na^{n-1}}$, $a > 0$, $|x| << a$. За допомогою цієї формули наближено обчислити: 1) $\sqrt[4]{80}$; 2) $\sqrt[10]{1000}$.

Відповідь: 1) $2,9907$; 2) $2,9954$.

7.3 Домашнє завдання.

7.3.1. Знайти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ у точці з абсцисою -2.

Відповідь: $y - 5 = 0$; $x + 2 = 0$.

7.3.2. Скласти рівняння дотичної до параболи $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - 1$, перпендикулярної до прямої $x + 5y - 10 = 0$.

Відповідь: $5x - y - 33 = 0$.

7.3.3. Знайти рівняння дотичних до параболи $y = x^2 - 4x + 1$, які проходять через не принадлежну їй точку: 1) $A(0; 0)$; 2) $B(1; 1)$.

Відповідь: 1) $2x + y = 0$; $6x + y = 0$; 2) дотичних не існує.

7.3.4. При якому співвідношені між коефіцієнтами парабола $y = ax^2 + bx + c$ дотикається до осі OX?

Відповідь: $b^2 - 4ac = 0$.

7.3.5. При якому значенні параметра парабола $y = ax^2$ дотикається до кривої $y = \ln x$.

Відповідь: $\frac{1}{2e}$.

7.3.6. Знайти кути, під якими перетинаються лінії $y = (x-2)^2$ і $y = 4x - x^2 + 4$.

Відповідь: $\operatorname{arctg}\frac{8}{15}$.

7.3.7. Знайти рівняння дотичної і нормалі до кривої $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$ у точці $M(-1, 3)$.

Відповідь: $5x + 6y - 13 = 0$; $6x - 5y + 21 = 0$.

7.3.8. Знайти рівняння дотичної до еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}= 1$ у точці $M(x_0; y_0)$.

Відповідь: $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}= 1$.

7.3.9. Знайти кути, під якими перетинаються лінії $x^2 + y^2 = 8$ і $y^2 = 2x$.

Відповідь: $\operatorname{arctg} 3$.

7.3.10. Довести, що дотична до гіперболи $xy = a^2$ утворює з осями координат трикутник постійної площі.

7.3.11. Знайти рівняння дотичної і нормалі до кривої $x = \sqrt{2}\cos^3 t$, $y = \sqrt{2}\sin^3 t$ у точці $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Відповідь: $x + y - 1 = 0$; $x - y = 0$.

7.3.12. Знайти кути, під яким перетинаються лінії $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$ і $x = \frac{at^2}{1+t^2}$, $y = \frac{at\sqrt{3}}{1+t^2}$.

Відповідь: $30^0, 30^0$ і 0^0.

7.3.13. Скласти рівняння дотичної і нормальної площини до кривої $\overrightarrow{r}(t) = (t^3-1)\overrightarrow{i} + (t^2+1)\overrightarrow{j} + (4t^3-3t+1)\overrightarrow{k}$, які проходять через точку, відповідну параметру $t_0 = 1$.

Відповідь: $\frac{x}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{9}$; $3x + 2y + 9z - 22 = 0$.

7.3.14. Куля, випущена з швидкістю 250 м/сек під кутом 30^0 до обрію, пройшла за t сек у горизонтальному напрямі відстань $x = 125\sqrt{3}t$, а у вертикальному за t сек – $y = 125t - 4,9t^2$ (опором повітря нехтуємо). Знайти швидкість кулі у кінці п'ятої секунди.

Відповідь: $\approx 229,4$ м/сек.

7.3.15. Коло обертається так, що кут повороту пропорційний квадрату часу. Перший оберт був зроблений за 8 сек. Знайти кутову швидкість через 64 сек після початку руху.

Відповідь: 4π рад/сек.

7.3.16. Знайти dy, якщо $y = e^{-x} + ln x$.

Відповідь: $\left(\frac{1}{x} - e^{-x}\right) dx$.

7.3.17. Знайти диференціал функції $y = y(x)$, заданої рівнянням $y^3 - y = 6x^2$ у точці $(1; 2)$.

Відповідь: $\frac{12}{11} dx$.

7.3.18. Виразити диференціал складеної функції через незалежну змінну та її диференціал: 1) $S = \cos^2 z$, $z = \frac{t^2-1}{4}$; 2) $S = e^z$, $z = \frac{1}{2} \ln t$, $t = 2u^2 - 3u + 1$.

Відповідь: 1) $-\frac{t}{2} \sin \frac{t^2-1}{2} dt$; 2) $\frac{4u-3}{2\sqrt{2u^2-3u+1}} du$.

7.3.19. Замінюючи приріст функції диференціалом, знайти наближено: 1) $tg 45^\circ 10'$; 2) $\arcsin 0,49$; 3) $\sqrt{\frac{(2,037)^2-3}{(2,037)^2+5}}$.

Відповідь: 1) $1,00582$; 2) $0,5120$; 3) $0,355$.

7.3.20. Довести наближену формулу $\sqrt{a^2 + x} \approx a + \frac{x}{2a}$, $a > 0$, $|x| << a$. За допомогою цієї формули наближено обчислити: 1) $\sqrt{34}$; 2) $\sqrt{120}$.

Відповідь: 1) $5,833$; 2) $10,9546$.

7.4. Завдання для самостійної роботи.

Заняття 8
Тема: Похідні та диференціали вищих порядків. Виведення формул для похідних n-го порядку. Формула Лейбніца

8.1. Познайомитися з теоретичними положеннями згідно з темою заняття.

8.2. Завдання для роботи в аудиторії.

8.2.1. Знайти похідні другого порядку для функцій:

1) $y = -\frac{1}{9}x\sin 3x - \frac{2}{27}\cos 3x$; 2) $y = x\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \sqrt{x^2 + a^2}$.

Відповідь: 1) $x\sin 3x$; 2) $\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

8.2.2. Довести, що функція $y = \sin\ln x + \cos\ln x$ **є розв'язком рівняння** $x^2y'' + xy' + y = 0$.

8.2.3. Довести, що функція $y = x + \sin 2x$ **є розв'язком рівняння** $y'' + 4y = 4x$.

8.2.4. Знайти величину сили, що діє на точку масою $m = 0,1$, **яка рухається за законом** $s(t) = t^2 - 4t^4$ **у момент часу** $t = 3$ (m, s, t **задані у системі СІ).**

Відповідь: 43 Н.

8.2.5. Знайти y'' для функції $y = f(x)$, заданої неявно:

1) $y^2 = 2px$; 2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}= 1$; 3) $y = x + \operatorname{arctg} y$; 4) $y = x + \ln y$.

Відповідь: 1) $-\frac{p^2}{y^2}$; 2) $-\frac{b^4}{a^2y^3}$; 3) $-\frac{2y^2+2}{y^5}$; 4) $\frac{y}{(1-y)^3}$.

8.2.6. Знайти y'' у точці $(1;1)$, якщо $x^2 + 5xy + y^2 - 2x + y - 6 = 0$.

Відповідь: $\frac{111}{256}$.

8.2.7. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln(1 + t^2), \end{cases}$ $\frac{d^2y}{dx^2}=?$

Відповідь: $2t^2 + 2$.

8.2.8. $\begin{cases} x = a(\sin t - t\cos t), \\ y = a(\cos t + t\sin t), \end{cases}$ $\frac{d^2y}{dx^2}=?$

Відповідь: $-\frac{1}{at\sin^3 t}$.

8.2.9. Довести, що функція $y = y(x)$, задана параметрично: $x = e^t \cos t$; $y = e^t \sin t$ $\left(-\frac{\pi}{4} < t < \frac{\pi}{4}\right)$, є розв'язком рівняння $(x-y)^2 y'' = 2(xy' - y)$.

8.2.10. Знаючи рівняння руху точки, назвати, яку лінію являє її траєкторія, і знайти швидкість і прискорення цієї точки:
1) $\vec{r} = 2\cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{k}$; 2) $\vec{r} = a\sin\omega t\,\vec{i} + a\cos\omega t\,\vec{j} + bt\,\vec{k}$.

Відповідь: 1) еліпс $\frac{x^2}{4} + z^2 = 1$, $y = 0$; $\vec{v} = -2\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{k}$; $\vec{\omega} = -2\cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{k}$; 2) циліндрична гвинтова лінія $x = a\sin\omega t, y = a\cos\omega t$, $z = bt$; $\vec{v} = a\omega\cos\omega t\,\vec{i} - a\omega\sin\omega t\,\vec{j} + b\,\vec{k}$; $\vec{\omega} = -a\omega^2\sin\omega t\,\vec{i} - a\omega^2\cos\omega t\,\vec{j}$.

8.2.11. $y = (x^2 + x + 1)e^{-x}$, $\quad d^2y = ?$

Відповідь: $(x^2 - 3x + 1)e^{-x}dx^2$.

8.2.12. $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$, $\quad d^2y(1;1) = ?$

Відповідь: $-\frac{1}{3}dx^2$.

8.2.13. $y = \ln\frac{1-x^2}{1+x^2}$; $x = \operatorname{tg} t$; **знайти d^2y через: 1) x і dx; 2) t і dt.**

Відповідь: 1) $\frac{4x}{x^4-1}d^2x - \frac{4(1+3x^4)}{(x^4-1)^2}dx^2$; **2)** $-\frac{4}{\cos^2 2t}dt^2$.

8.2.14. Знайти $y^{(n)}$ для функції: 1) $y = \cos 2x$; 2) $y = \sin^2 x$; 3) $y = \frac{1}{x^2-3x+2}$; 4) $x = \cos t$; $y = \cos nt$, $n \in N$.

Відповідь: 1) $2^n \cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)$; **2)** $2^{n-1} \sin\left(2x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)$; **3)** $(-1)^n n! \left(\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right)$; **4)** $2^{n-1} n!$.

8.2.15. Застосовуючи формулу Лейбніца, знайти: 1) $y = \frac{x^2}{1-x}$; $y^{(8)} = ?$; 2) $y = x \operatorname{sh} x$; $y^{(100)} = ?$; 3) $y = x^3 \ln x$; $y^{(n)} = ?$.

Відповідь: 1) $\frac{8!}{(1-x)^9}$; **2)** $x \operatorname{sh} x + 100 \operatorname{ch} x$; **3)** $\frac{(-1)^n 6(n-4)!}{x^{n-3}}$, **коли** $n \geq 4$.

8.3. Домашнє завдання.

8.3.1. Знайти похідні другого порядку для функції:
1) $y = \frac{1}{4}x^2(2\ln x - 3)$; 2) $y = \frac{1}{3}x^2\sqrt{1 - x^2} + \frac{2}{3}\sqrt{1 - x^2} + x \arcsin x$.

Відповідь: 1) $\ln x$; 2) $2\sqrt{1 - x^2}$.

8.3.2. Довести, що функція $y = e^{-x}\sin x$ є розв'язком рівняння $y'' + 2y' + 2y = 0$.

8.3.3. Довести, що функція $y = \sqrt{2x - x^2}$ є розв'язком рівняння $y^3y'' + 1 = 0$.

8.3.4. По колу радіусом 5 м рухається точка з постійною кутовою швидкістю 2 рад/сек. Знайти величину прискорення точки.

Відповідь: 20 м/сек^2.

8.3.5 Точка рухається прямолінійно так, що її швидкість змінюється пропорційно квадратному кореню з пройденого шляху. Показати, що рух відбувається під дією постійної сили.

8.3.6. Знайти y'' для функції $y = f(x)$, заданої неявно:
1) $x^2 - y^2 = a^2$; **2)** $e^{x-y} = x + y$;
3) $y - x \operatorname{tg} \ln \sqrt{x^2 + y^2} = 0$; **4)** $y^3 + x^3 - 3axy = 0$.

Відповідь: 1) $-\frac{a^2}{y^3}$; 2) $\frac{4(x+y)}{(x+y+1)^3}$; 3) $\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$; 4) $-\frac{2a^3xy}{(y^2-ax)^3}$.

8.3.7. Знайти y'' у точці $(0; 1)$, якщо $x^4 - xy + y^4 = 1$.

Відповідь: $-\frac{1}{16}$.

8.3.8. $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \sqrt{1 - t^2}, \end{cases}$ $\frac{d^2y}{dx^2} = ?$

Відповідь: $-\sqrt{1 - t^2}$.

8.3.9. $\begin{cases} x = a\left(\cos t - \ln \operatorname{ctg} \frac{t}{2}\right), \\ y = a \sin t, \end{cases}$ $\frac{d^3y}{dx^3} = ?$

Відповідь: $\frac{\sin t(1+3\sin^2 t)}{a^2 \cos^7 t}$.

8.3.10. Довести, що функція $y = y(x)$, задана параметрично: $x = t^3 + t$, $y = \frac{3}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^2 + 1$, є розв'язком рівняння $y''(1 + 3y'^2) = 1$.

8.3.11. Знаючи рівняння руху точки, назвати, яку лінію являє її траєкторія, і знайти швидкість і прискорення цієї точки:

1) $\vec{r} = (3t - 2)\vec{i} - 4t\vec{j}$; 2) $\vec{r} = (2t^2 - 3)\vec{i} - 3t^2\vec{j} + (4t^2 - 5)\vec{k}$.

Відповідь: 1) $4x + 3y + 8 = 0$; $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$; $\vec{\omega} = \vec{0}$; 2) $\frac{x+3}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+5}{4}$; $\vec{v} = 4t\vec{i} - 6t\vec{j} + 8t\vec{k}$; $\vec{\omega} = 4\vec{i} - 6\vec{j} + 8\vec{k}$.

8.3.12. $y = x^x$, $d^2y = ?$

Відповідь: $(x(1 + \ln x)^2 + 1)x^{x-1}dx^2$.

8.3.13. $x^2y + \arcsin(y - x) = 0$, $d^2y(1; 1) = ?$

Відповідь: 0.

8.3.14. $y = \sin z$, $z = a^x$, $x = t^3$; знайти d^2y через:

1) z і dz; 2) x і dx; 3) t і dt.

Відповідь: 3) $a^{t^3}\ln a(\cos a^{t^3}(6t + 9t^4\ln a) - a^{t^3}\sin a^{t^3} 9t^4\ln a)dt^2$.

8.3.15. Знайти $y^{(n)}$ для функції:
1) $y = \sin x$; **2)** $y = e^{-3x}$; **3)** $\cos^3 x$; **4)** $y = \frac{1}{x(1-x)}$; **5)** $y = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$.

Відповідь: 1) $\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$; **2)** $(-1)^n 3^n e^{-3x}$;
3) $\frac{3}{4}\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{3^n}{4}\cos\left(3x + n\frac{\pi}{2}\right)$; **4)** $(-1)^n n!\left(\frac{1}{x^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right)$;
5) $\frac{(2n-1)!!}{(1-2x)^{n+\frac{1}{2}}}$.

8.3.16. Застосовуючи формулу Лейбніца, знайти:
1) $y = x^2 e^{2x}$, $y^{(20)} = ?$ **2)** $y = x^2 \sin 2x$, $y^{(50)} = ?$

Відповідь: 1) $2^{20} e^{2x}(x^2 + 20x + 95)$; **2)** $2^{50}\left(-x^2 \sin 2x + 50x \cos 2x + \frac{1225}{2}\sin 2x\right)$.

8.4. Завдання для самостійної роботи.

Заняття 9

Тема: Правило Лопіталя.Кривизна та радіус кривизни кривої

9.1. Познайомитися з теоретичними положеннями згідно з темою заняття.

9.2. Завдання для роботи в аудиторії.

Знайти границі (9.2.1 - 9.2.21):

9.2.1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2}$.

Відповідь: 1.

9.2.2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3 \operatorname{tg} 4x - 12 \operatorname{tg} x}{3 \sin 4x - 12 \sin x}$.

Відповідь: -2.

9.2.3. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}$.

Відповідь: $\frac{1}{3}$.

9.2.4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}$.

Відповідь: $\frac{1}{6}$.

9.2.5. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2}$.

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

9.2.6. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{5x^3 - x} - 2x}{\sqrt[5]{x^2} - 1}$.

Відповідь: $\frac{15}{4}$.

9.2.7. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^5 - 3x^2 + 7x - 5}{x^4 - 5x + 4}$.

Відповідь: -6.

9.2.8. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^x - 1}{\ln x}$.

Відповідь: 1.

9.2.9. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \arcsin x^2}{x \cos x - \sin x}$.

Відповідь: -3.

9.2.10. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{50}-50x+49}{x^{100}-100x+99}$.

Відповідь: $\frac{49}{198}$.

9.2.11. $\lim\limits_{x\to +0}\frac{\ln\sin x}{\operatorname{ctg} x}$.

Відповідь: 0.

9.2.12. $\lim\limits_{x\to +0}\frac{\ln(1-\cos x)}{\ln\operatorname{tg} x}$.

Відповідь: 2.

9.2.13. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt[3]{x}\ln\ln x}{\sqrt[3]{2x+3}\sqrt{\ln x}}$.

Відповідь: 0.

9.2.14. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\boldsymbol{x}\ln\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\boldsymbol{x}\right)\right)$.

Відповідь: $-\frac{2}{\pi}$.

9.2.15. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin\boldsymbol{x}\ln\operatorname{ctg}\boldsymbol{x})$.

Відповідь: 0.

9.2.16. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$.

Відповідь: 0.

9.2.17. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^{x}-1}\right)$.

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

9.2.18. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^{x}$.

Відповідь: $e^{-\frac{2}{\pi}}$.

9.2.19. $\lim\limits_{x\to +0}\left(\arcsin x\right)^{\operatorname{tg} x}$.

Відповідь: 1.

9.2.20. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-0}\left(\operatorname{tg} x\right)^{\cos x}$.

Відповідь: 1.

9.2.21. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Відповідь: $e^{-\frac{1}{3}}$.

9.2.22. **При якому виборі коефіцієнтів a, b, c парабола $y = ax^2 + bx + c$ має у точці $x = x_0$ дотик 2-го порядку з кривою $y = e^x$?**

Відповідь: $a = \frac{1}{2}e^{x_0}$; $b = e^{x_0}(1 - x_0)$; $c = e^{x_0}\left(1 - x_0 + \frac{x_0^2}{2}\right)$.

9.2.23. **Який порядок дотику з віссю OX має у точці $x = 0$ крива:**

1) $y = 1 - \cos x$; 2) $y = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$.

Відповідь: 1) перший; 2) другий.

9.2.24. **Обчислити кривизну кривої в указаній точці:**

1) $x^2 + xy + y^2 = 3$, $(1;1)$; 2) $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$, $t = 1$; 3) $\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi$, у вершинах $\varphi = 0, \varphi = \pi$.

Відповідь: 1) $\frac{1}{3\sqrt{2}}$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) $\frac{3}{a\sqrt{2}}$.

9.2.25. **Знайти радіуси кривизни (у будь-якій точці) даних ліній:**

1) $y = x^3$; 2) $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

Відповідь: $\frac{(1+9x^4)^{\frac{3}{2}}}{6|x|}$; 2) $\frac{4}{3}a\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|$, $a > 0$.

9.2.26. Знайти координати центра кривизни кривої $xy = 1$ у точці $(1; 1)$.

Відповідь: $(2; 2)$.

9.2.27. Написати рівняння кола кривизни кривої $y = x^2 - 6x + 10$ у точці $(3; 1)$.

Відповідь: $(x-3)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

9.2.28. Знайти еволюту еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Відповідь: $(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (c)^{\frac{4}{3}}$, де $c^2 = a^2 - b^2$.

9.2.29. Довести, що крива (розгортка кола) $x = a(\cos t + t\sin t)$; $y = a(\sin t - t\cos t)$ є евольвентою кола $x = a\cos t$; $y = a\sin t$.

9.3. Домашнє завдання.

Знайти границі (9.3.1 - 9.3.21):

9.3.1. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$.

Відповідь: $\frac{2}{3\sqrt[6]{a}}$.

9.3.2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x}$.

Відповідь: 0.

9.3.3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-\cos\alpha x}{e^{\beta x}-\cos\beta x}$.

Відповідь: $\frac{\alpha}{\beta}$.

9.3.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi-2\,\mathrm{arctg}\,x}{\ln(1+1/x)}$.

Відповідь: 2.

9.3.5. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$.

Відповідь: $\frac{m}{n}a^{m-n}$.

9.3.6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$.

Відповідь: -2.

9.3.7. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\cos x\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$.

Відповідь: $\cos a$.

9.3.8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

Відповідь: 2.

9.3.9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}-x-1}{\cos x+\frac{x^2}{2}-1}$.

Відповідь: 1.

9.3.10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^6 2x}$.

Відповідь: $\frac{1}{128}$.

9.3.11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln\sin x}$.

Відповідь: 1.

9.3.12. $\lim\limits_{x\to\infty}((\boldsymbol{\pi} - \mathbf{2}\,\mathrm{arctg}\,\boldsymbol{x})\ln \boldsymbol{x})$.

Відповідь: 0.

9.3.13. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$.

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

9.3.14. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 e^{\frac{1}{x^2}}\right)$.

Відповідь: ∞.

9.3.15. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\mathrm{tg}\,x)^{2x-\pi}$.

Відповідь: ∞.

9.3.16. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$.

Відповідь: 1.

9.3.17. $\lim\limits_{x\to a}\left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\mathrm{tg}\,\frac{\pi x}{2a}}$.

Відповідь: $e^{\frac{2}{\pi}}$.

9.3.18. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x}$.

Відповідь: 1.

9.3.19. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)^{1+x}}{x^2} - \frac{1}{x}\right)$.

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

9.3.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{x})(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{x})} - \boldsymbol{x}\right)$.

Відповідь: $\frac{a+b+c}{3}$.

9.3.21. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^2 + 3^x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Відповідь: 3.

9.3.22. При якому виборі коефіцієнтів k, b пряма $y = kx+b$ має дотик порядку вище першого з кривою $y = x^3 - 3x^2 + 2$?

Відповідь: $k = -3$; $b = 3$.

9.3.23. Який порядок дотику з віссю OX має у точці $x = 0$ крива $y = \operatorname{tg} x - \sin x$?

Відповідь: другий.

9.3.24. Довести, що крива $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$ при $x \neq 0$ і $y = 0$ при $x = 0$ має у точці $x = 0$ з віссю OX дотик нескінченно великого порядку.

9.3.25. Обчислити кривизну кривої в указаній точці:
1) $y = x^4 - 4x^3 - 18x^2$, $(0; 0)$; 2) $x = t^2$, $y = t^2$, $(1; 1)$; 3) $\rho^2 = a^{\varphi}$ при $\varphi = 0$.

Відповідь: 1) 36; 2) $\dfrac{6}{13\sqrt{13}}$; 3) $\dfrac{1}{\sqrt{1+\ln^2 a}}$.

9.3.26. Знайти радіуси кривизни (у будь-якій точці) даних ліній:
1) $x = \dfrac{y^2}{2} - \dfrac{\ln y}{2}$; 2) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

Відповідь: 1) $\dfrac{(y^2+1)^2}{4|y|}$; 2) $\left|\dfrac{3}{2}a\sin 2t\right|$.

9.3.27. Знайти координати центра кривизни кривої $ay^2 = x^3$ у точці $(a; a)$.

Відповідь: $\left(-\frac{11}{2}a; \frac{16}{3}a\right)$.

9.3.28. Написати рівняння кола кривизни кривої $y = e^x$ у точці $(0; 1)$.

Відповідь: $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 8$.

9.3.29. Знайти еволюту кривої $y^2 = 2px$.

Відповідь: $py^2 = \frac{8}{27}(x - p)^3$.

9.3.30. Довести, що эволютою циклоїди $x = a(t - \sin t)$; $y = a(t - \cos t)$ є зміщена циклоїда.

9.4. Завдання для самостійної роботи.

Заняття 10
Тема: Формула Тейлора. Зображення функцій за формулою Тейлора. Застосування формули Тейлора у наближених обчисленнях і для знаходження границь

10.1. Познайомитися з теоретичними положеннями згідно з темою заняття.

10.2. Завдання для роботи в аудиторії.

10.2.1. Розкласти за формулою Тейлора в околі точки $x_0 = 0$ до $o(x^n)$ функцію $y = \ln\frac{1+2x}{1-x}$.

Відповідь: $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}2^k+1}{k} x^k + o(x^n)$.

10.2.2. Розкласти за формулою Тейлора в околі точки $x_0 = 0$ до $o(x^{2n})$ функцію $y = x\,\mathrm{sh}\,3x$.

Відповідь: $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{3^{2k}}{(2k)!} x^{2k+1} + o(x^{2n})$.

10.2.3. Розкласти за формулою Тейлора в околі точки $x_0 = -2$ до $o((x-x_0)^n)$ функцію $y = \frac{x^2+4x+4}{x^2+10x+25}$.

Відповідь: $\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{3^k} (x+2)^k + o((x+2)^n)$.

10.2.4. Розкласти за формулою Тейлора в околі точки $x_0 = -1$ до $o\left((x - x_0)^{2n}\right)$ функцію $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Відповідь: $(x + 1) + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{(2k)!!}(x + 1)^{2k+1} + o\left((x + 1)^{2n}\right)$.

10.2.5. Розкласти за формулою Тейлора в околі точки $x_0 = 0$ до $o\left(x^4\right)$ функцію $y = \frac{x}{\operatorname{arctg} x}$.

Відповідь: $1 + \frac{x^2}{3} - \frac{4}{45}x^4 + o\left(x^4\right)$.

10.2.6. Зобразити функцію $f(x) = (x^3 - 8)^2$ у вигляді многочлена за степенями $x - 2$.

Відповідь: $144(x - 2)^2 + 144(x - 2)^3 + 60(x - 2)^4 + 12(x - 2)^5 + (x - 2)^6$.

10.2.7. Знайти $f^{(k)}(0)$, якщо $f(x) = \frac{1}{1-x^4}$, $k = 60$.

Відповідь: $60!$.

10.2.8. Знайти такі числа A і B, щоб при $x \to 0$ була справедлива асимптотична рівність $\sin x(A + B\cos x) = x + o\left(x^4\right)$.

Відповідь: $A = \frac{4}{3}$; $B = -\frac{1}{3}$.

10.2.9. За допомогою формули Тейлора наближено обчислити з точністю до 10^{-3}: 1) $\sqrt[5]{256}$; 2) $\operatorname{arctg} 0,8$.

Відповідь: 1) $3,017$; 2) $0,675$.

10.2.10. Оцінити за допомогою формули Тейлора абсолютну похибку наближеної формули $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$, $|x| \leq 0,1$.

Відповідь: $2 \cdot 10^{-6}$.

10.2.11. З'ясувати походження наближеної формули $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2$, $|x| < 1$ та оцінити її похибку.

Відповідь: $\frac{5}{81}\frac{x^3}{(1+\theta x)^{8/3}}$, $0 < \theta < 1$.

10.2.12. Показати, що при $|x| << a$ з точністю до $\left(\frac{x}{a}\right)^2$ має місце наближена рівність $e^{\frac{x}{a}} \approx \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$.

За допомогою формули Тейлора знайти границі (10.2.13 - 10.2.19):

10.2.13. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

Відповідь: $-\frac{1}{12}$.

10.2.14. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$.

Відповідь: $\frac{1}{3}$.

10.2.15. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5})$.

Відповідь: $\frac{1}{3}$.

10.2.16. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 + 1} \right)$.

Відповідь: $\frac{1}{6}$.

10.2.17. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\sin x - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$.

Відповідь: $\frac{19}{90}$.

10.2.18. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$.

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

10.2.19. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh}(\operatorname{tg} x) - x}{x^3}$.

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

10.3. Домашнє завдання.

10.3.1. Розкласти за формулою Тейлора в околі точки $x_0 = 0$ до $o(x^n)$ функцію $y = (x - 1)e^{x/2}$.

Відповідь: $-1+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k k!}x^k + o(x^n)$.

10.3.2. Розкласти за формулою Тейлора в околі точки $x_0 = 0$ до $o(x^{2n+1})$ функцію $y = x^2\cos^2 x$.

Відповідь: $x^2+\sum\limits_{k=2}^{n}(-1)^{k+1}\frac{2^{2k}-3}{(2k-2)!}x^{2k} + o(x^{2n+1})$.

10.3.3. Розкласти за формулою Тейлора в околі точки $x_0 = 0$ до $o((x - x_0)^{3n+1})$ функцію $y = \frac{x}{(1+x^3)^2}$.

Відповідь: $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k(k+1)x^{3k+1} + o(x^{3n+1})$.

10.3.4. Розкласти за формулою Тейлора в околі точки $x_0 = 1$ до $o((x - x_0)^{2n})$ функцію $y = \ln(x^2 - 7x + 12)$.

Відповідь: $\ln 6-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2^{-k}+3^{-k}}{k}(x-1)^k + o((x-1)^n)$.

10.3.5. **Розкласти за формулою Тейлора в околі точки $x_0 = 1$ до $o\left((x - x_0)^{2n}\right)$ функцію $y = \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$.**

Відповідь: $1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!}(x-1)^{2k} + o\left((x-1)^{2n}\right)$.

10.3.6. **Розкласти за формулою Тейлора в околі точки $x_0 = 0$ до $o\left(x^3\right)$ функцію $y = e^{\sin x}$.**

Відповідь: $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^3\right)$.

10.3.7. **Зобразити функцію $f(x) = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 17$ у вигляді многочлена за степенями $x + 2$.**

Відповідь: $1 + (x + 2)^4$.

10.3.8. **Знайти $f^{(k)}(0)$, якщо $f(x) = e^{-x^2}$, $k = 6$.**

Відповідь: -120.

10.3.9. **Знайти такі числа A і B, щоб при $x \to 0$ була справедлива асимптотична рівність $Ae^x - \frac{B}{1-x} = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}x^3 + o\left(x^3\right)$.**

Відповідь: $A = B = 1$.

10.3.10. За допомогою формули Тейлора наближено обчислити з точністю до 10^{-3}: 1) $\sqrt[3]{127}$; 2) $\ln 1,3$.

Відповідь: 1) $5,027$; 2) $0,262$.

10.3.11. Оцінити за допомогою формули Тейлора абсолютну похибку наближеної формули $\cos x \approx 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}$, $|x| \leq 0,5$.

Відповідь: $\frac{1}{2^8 \cdot 8!}$.

10.3.12. З'ясувати походження наближеної формули $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$, $|x| < 1$ і оцінити її похибку.

Відповідь: $\frac{1}{16}\frac{x^3}{(1+\theta x)^{5/2}}$, $0 < \theta < 1$.

10.3.13. Важка нитка під дією власної ваги провисає по ланцюговій лінії $y = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$. Показати, що для малих $|x|$ форма нитки наближено виражається параболою $y = a+\frac{x^2}{2a}$.

За допомогою формули Тейлора знайти границі (10.3.14 - 10.3.19).

10.3.14. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - 1 - \frac{x^2}{2}}{x^4}$.

Відповідь: $\frac{1}{24}$.

10.3.15. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[5]{1+2x} - 1}{\sqrt[4]{1+x} - \sqrt{1-x}}$.

Відповідь: $\frac{8}{15}$.

10.3.16. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 + x\cos x - \sqrt{1+2x}}{\ln(1+x) - x}$.

Відповідь: -1.

10.3.17. $\lim\limits_{x \to \infty} x\left(1 - x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$.

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

10.3.18. $\lim\limits_{x \to \infty} ((x^3 + x)\sin\frac{1}{x} - \sqrt[3]{x^6 - 3x^4 + 1})$.

Відповідь: $\frac{11}{6}$.

10.3.19. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} \left(\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\operatorname{tg} x\right)^{\operatorname{tg} x}$.

Відповідь: 1.

10.4. Завдання для самостійної роботи.

Заняття 11

Тема: Дослідження функції (монотонність, екстремум, найбільше та найменше значення на проміжку, опуклість і угнутість, перегин). Доведення нерівностей. Знаходження асимптот

11.1. Познайомитися з теоретичними положеннями згідно з темою заняття.

11.2. Завдання для роботи в аудиторії.

Дослідити функції на монотонність (11.2.1 - 11.2.3):

11.2.1. 1) $y = (x-2)^5(2x+1)^4$; 2) $y = \frac{10}{4x^3-9x^2+6x}$.

Відповідь: 1) $(-\infty; -0,5)$, $\left(\frac{11}{18}, \infty\right)$ – зростає, $\left(-0,5; \frac{11}{18}\right)$ – спадає; 2) $(-\infty; 0)$, $(0; 0,5)$, $(1; +\infty)$ – спадає; $(0,5; 1)$ – зростає.

11.2.2. 1) $y = \sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2}$ $(a > 0)$; 2) $y = x\sqrt{ax - x^2}$ $(a > 0)$.

Відповідь: 1) $\left(-\infty; \frac{2}{3}a\right)$, $(1; +\infty)$ – зростає, $\left(\frac{2}{3}a; a\right)$ – спадає; 2) $\left(0; \frac{3}{4}a\right)$ – зростає, $\left(\frac{3}{4}a; a\right)$ – спадає.

11.2.3. 1) $y = \frac{x}{\ln x}$; 2) $y = 2x^2 - \ln x$.

Відповідь: 1) $(0; 1)$, $(1; e)$ – спадає, $(e; +\infty)$ – зростає; 2) $(0; 0,5)$ – спадає; $(0,5; +\infty)$ – зростає.

Дослідити на екстремум функції (11.2.4 - 11.2.5):

11.2.4. 1) $y = 2x^3 - 3x^2$; 2) $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$.

Відповідь: 1) максимум $y = 0$ при $x = 0$; мінімум $y = -1$ при $x = 1$; 2) максимум $y = 4$ при $x = 0$; мінімум $\frac{8}{3}$ при $x = -2$.

11.2.5. 1) $y = \frac{2}{3}x^2\sqrt[3]{6x-7}$; 2) $y = x - \ln(1+x^2)$.

Відповідь: 1) максимум $y = 0$ при $x = 0$; мінімум $y = -\frac{2}{3}$ при $x = 1$; 2) немає.

11.2.6. Знайти екстремуми функції, використовуючи другу похідну: 1) $y = x\sqrt{2-x^2}$; 2) $y = x^{\frac{1}{x}}$.

Відповідь: 1) максимум $y = 1$ при $x = 1$; мінімум $y = -1$ при $x = -1$; 2) максимум $y = \sqrt[e]{e}$ при $x = e$.

Знайти найбільше та найменше значення функції на проміжках (11.2.7 - 11.2.8):

11.2.7. 1) $y = \sqrt{100-x^2}$, $x \in [-6; 8]$; 2) $y = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$, $x \in [0; 1]$.

Відповідь: 1) 10; 6; 2) 1; $\frac{3}{5}$.

11.2.8. 1) $y = 2\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; 2) $y = \operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$, $x \in [0; 1]$.

Відповідь: 1) найбільше значення – 1, найменшого немає; 2) найбільше значення – $\frac{\pi}{4}$, найменше – 0.

Дослідити функції на опуклість, угнутість та перегин (11.2.9 - 11.2.12):

11.2.9. $y = \sqrt[3]{4x^3 - 12x}$.

Відповідь: $0, \ \pm\sqrt{3}$ – **точки перегину;** $(-\infty; -\sqrt{3}), \ (0; \sqrt{3})$ – **угнута;** $(-\sqrt{3}; 0)$, $(\sqrt{3}; +\infty)$ – **опукла.**

11.2.10. $y = \frac{1}{1-x^2}$.

Відповідь: точок перегину немає; $(-\infty; -1), (1; +\infty)$ – **опукла;** $(-1; 1)$ – **угнута.**

11.2.11. $y = \operatorname{arctg} x - 1$.

Відповідь: $(0; 0)$ – **точка перегину;** $(-\infty; 0)$ – **угнута;** $(0; +\infty)$ – **опукла.**

11.2.12. $y = (1 + x^2)e^x$.

Відповідь: $-3, -1$ – **точки перегину;** $(-\infty; -3), (-1; +\infty)$ – **угнута;** $(-3; -1)$ – **опукла.**

11.2.13. Довести нерівність: 1) $e^x > 1 + \ln(1 + x)$; **2)** $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$; **3)** $\operatorname{arctg} x \leq x, \ x \geq 0$.

Знайти асимптоти кривих (11.2.14 - 11.2.18):

11.2.14. 1) $y = c + \frac{a^3}{(x-b)^2}$; 2) $2y(x+1)^2 = x^3$.

Відповідь: 1) $x = b$; $y = c$; 2) $x = -1$; $y = \frac{1}{2}x - 1$.

11.2.15. 1) $y = xe^{-x}$; 2) $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ $(x > 0)$.

Відповідь: 1) $y = 0$; 2) $y = 1$.

11.2.16. 1) $y = x\ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$; 2) $y = \frac{1}{x}$.

Відповідь: 1) $x = -\frac{1}{e}$; $y = x + \frac{1}{e}$; 2) $x = 0$; $y = 0$.

11.2.17. 1) $y = 3x - \arccos\frac{1}{x}$; 2) $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} - x$.

Відповідь: 1) $y = 3x - \frac{\pi}{2}$; 2) $x = 0$; $y = -x$.

11.2.18. 1) $y = 2x - \frac{\cos x}{x}$; 2) $y = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$.

Відповідь: 1) $x = 0$; $y = 2x$; 2) $y = x - 2$.

11.3. Домашнє завдання.

Дослідити функцію на монотонність (11.3.1 - 11.3.3):

11.3.1. 1) $y = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 7$; **2)** $y = (x-1)^3(2x+3)^2$.

Відповідь: 1) $(-\infty; 0,5)$, $(3; +\infty)$ – **зростає;** $(0,5; 3)$ – **спадає; 2)** $(-\infty; -1,5)$, $(-0,5; +\infty)$ – **зростає;** $(-1,5; -0,5)$ – **спадає.**

11.3.2. 1) $y = x^2 \ln x$; **2)** $y = \operatorname{arctg} x - \ln x$.

Відповідь: 1) $\left(0; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ – **спадає;** $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right)$ – **зростає; 2)** $(0; +\infty)$ – **спадає.**

11.3.3. 1) $y = x\sqrt{(x+1)^3}$; **2)** $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

Відповідь: 1) $\left(-1; -\frac{2}{5}\right)$ – **спадає;** $\left(-\frac{2}{5}; +\infty\right)$ – **зростає; 2)** $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(\sqrt{3}; +\infty)$ – **зростає;** $(-\sqrt{3}; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; \sqrt{3})$ – **спадає.**

Дослідити на екстремум функцію (11.3.4 - 11.3.6):

11.3.4. 1) $y = (x+2)^2(x-3)^3$; **2)** $y = \frac{(x-1)^2}{x+1}$.

Відповідь: 1) мінімум $y = -108$ **при** $x = 0$; **максимум** $y = 0$ **при** $x = -2$; **2) мінімум** $y = -8$ **при** $x = -3$; **максимум** $y = 0$ **при** $x = 1$.

11.3.5. 1) $y = x^3 e^{-4x}$; **2)** $y = \sqrt{x} \ln x$.

Відповідь: 1) максимум $y = \frac{27e^{-3}}{64}$ **при** $x = \frac{3}{4}$; **2) мінімум** $y = -\frac{2}{e}$ **при** $x = e^{-2}$.

11.3.6. 1) $y = x^3\sqrt{x-1}$;   2) $y = \frac{\sin x}{2+\cos x}$.

Відповідь: 1) мінімум $y = -\frac{3\sqrt[3]{2}}{8}$ при $x = \frac{3}{4}$; 2) максимум $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$ при $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$; мінімум $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ при $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$.

11.3.7. Знайти екстремуми функції, використовуючи другу похідну:
1) $y = x^2(a-x)^2$;   2) $y = x^2e^{-x}$.

Відповідь: 1) максимум $y = \frac{a^4}{16}$ при $x = \frac{a}{2}$; мінімум $y = 0$ при $x = 0$ та $x = a$;
2) максимум $y = \frac{4}{e^2}$ при $x = 2$; мінімум $y = 0$ при $x = 0$.

Знайти найбільше та найменше значення функції на проміжку (11.3.8 - 11.3.9):

11.3.8. 1) $y = 2x^3 + 3x^2 - 120x + 100,\ x \in (-4; 5)$;   2) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$, $x \in [1; 2]$.

Відповідь: 1) найбільшого значення немає; -204;   2) 2; -10.

11.3.9. 1) $y = 2\sin x + \sin 2x,\ x \in \left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$;   2) $y = x^x$, $x \in (0; 1)$.

Відповідь: 1) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; -2; 2) 1; $\frac{1}{e^{1/e}}$.

Дослідити функції на опуклість, угнутість та перегин (11.3.10 - 11.3.13):

11.3.10. $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$.

Відповідь: $(2; 62)$, $(4; 206)$ – точки перегину; $(-\infty; 2)$, $(4; +\infty)$ – угнута; $(2; 4)$ – опукла.

11.3.11. $y = x^4(12\ln x - 7)$.

Відповідь: $(1; -7)$ – точки перегину; $(0; 1)$ – опукла; $(1; +\infty)$ – угнута.

11.3.12. $y = (x + 2)^6 + 2x + 2$.

Відповідь: точок перегину немає; графік угнутий.

11.3.13. $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

Відповідь: точок перегину немає; $(-\infty; 0)$ – опукла; $(0; +\infty)$ – угнута.

11.3.14. Довести нерівність: 1) $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$, $x > 0$; 2) $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$, $x \neq 0$; 3) $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x$, $x > 0$.

Знайти асимптоти кривої (11.3.15 - 11.3.19):

11.3.15. 1) $y = \frac{2x}{x+2}$; 2) $y = \frac{x^3}{3-x^2}$.

Відповідь: 1) $x = -2$, $y = 2$; 2) $x = \pm\sqrt{3}$, $y = -x$.

11.3.16. 1) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$; 2) $y = 2x + \operatorname{arctg}\frac{x}{2}$.

Відповідь: 1) $y = \pm\frac{2}{5}x$; 2) $y = 2x \pm \frac{\pi}{2}$.

11.3.17. 1) $y = e^{\frac{1}{x}}$; 2) $y = xe^{\frac{1}{x}}$.

Відповідь: 1) $x = 0$, $y = 1$; 2) $x = 0$, $y = x + 1$.

11.3.18. 1) $y = \frac{\sin x}{x}$; 2) $y = \ln(1 + x)$.

Відповідь: 1) $y = 0$; 2) $x = -1$.

11.3.19. 1) $y = \frac{\ln^2 x}{x} - 3x$; 2) $y = -x \operatorname{arctg} x$.

Відповідь: 1) $x = 0$, $y = -3x$; 2) $y = \pm\frac{\pi}{2}x + 1$.

11.4. Завдання для самостійної роботи.

Заняття 12
Тема: Побудова явно заданих функцій у декартовій системі координат

12.1.Познайомитися з теоретичними положеннями згідно з темою заняття.

12.2. Завдання для роботи в аудиторії.

Виконавши повне дослідження, побудувати графік функції (12.2.1 - 12.2.8):

12.2.1. $y = (x-1)^2(x+2)$.

Відповідь: мінімум $y = 0$ при $x = 1$; максимум $y = 4$ при $x = -1$; $(0;2)$ – точка перегину.

12.2.2. $y = \frac{x^3}{x^2-1}$.

Відповідь: $y = x; x = \pm 1$ – асимптоти; мінімум $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ при $x = \sqrt{3}$; максимум $y = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ при $x = -\sqrt{3}$; $(0;0)$ – точка перегину.

12.2.3. $y = \sqrt[3]{x^2(3 - x)}$.

Відповідь: $y = 1 - x$ **– асимптота; мінімум** $y = 0$ **при** $x = 0$**; максимум** $y = \sqrt[3]{4}$ **при** $x = 2$**;** $(3; 0)$ **– точка перегину.**

12.2.4. $y = xe^{-2x}$.

Відповідь: $y = 0$ **– асимптота; максимум** $y = \frac{1}{2e}$ **при** $x = \frac{1}{2}$**;** $(1; e^{-2})$ **– точка перегину.**

12.2.5. $y = (x-2)e^{-\frac{1}{x}}$.

Відповідь: $y = x - 3$, $x = 0$ – асимптоти; мінімум $y = -\frac{1}{e}$ при $x = 1$; максимум $y = -4\sqrt{e}$ при $x = -2$; $\left(\frac{2}{5}; -\frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}}\right)$ – точка перегину.

12.2.6. $y = \frac{\ln x}{x}$.

Відповідь: $y = 0$, $x = 0$ – асимптоти; максимум $y = \frac{1}{e}$ при $x = e$; $\left(e^{1,5}; 1,5e^{-1,5}\right)$ – точка перегину.

12.2.7. $\boldsymbol{y = x^2 \ln x}$**.**

Відповідь: мінімум $\boldsymbol{y = -e \ln 2}$ **при** $\boldsymbol{x = \sqrt{e}}$**;** $\left(e^{-1,5}; -\dfrac{3}{2e^3}\right)$ **– точка перегину.**

12.2.8. $\boldsymbol{y =} \dfrac{\cos 2x}{\cos x}$**.**

Відповідь: $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} + \pi n}$ $(\boldsymbol{n \in Z})$ **– асимптоти; період** $\boldsymbol{2\pi}$**; на інтервалі** $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right)$ **мінімум** $\boldsymbol{y = -1}$ **при** $\boldsymbol{x = \pi}$**, максимум** $\boldsymbol{y = 1}$ **при** $\boldsymbol{x = 0}$**.**

12.3. Домашнє завдання.

Виконавши повне дослідження, побудувати графік функції (12.3.1 - 12.3.8):

12.3.1. $y = (x+2)^2(x-1)^2$.

Відповідь: мінімум $y = 0$ при $x = -2$; максимум $y = \frac{81}{16}$ при $x = -\frac{1}{2}$; $(0; 4)$, $(-1; 4)$ – точка перегину.

12.3.2. $y = \frac{x^3+2x^2}{(x-1)^2}$.

Відповідь: $y = x + 4$; $x = 1$ – асимптоти; мінімуми $y = 0$ при $x = 0$ та $y = \frac{32}{3}$ при $x = 4$; максимум $y = \frac{1}{4}$ при $x = -1$; $\left(-\frac{2}{7}; \frac{16}{189}\right)$ – точка перегину.

12.3.3. $y = \sqrt[3]{x^3 - 4x}$.

Відповідь: $y = x$ – **асимптота; мінімум** $y = -\frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}$ **при** $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$; **максимум** $y = \frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}$ **при** $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$; $0, \pm 2$ – **точки перегину.**

12.3.4. $y = x^2 e^{-x}$.

Відповідь: $y = 0$ – **асимптота; мінімум** $y = 0$ **при** $x = 0$; **максимум** $y = 4e^{-2}$ **при** $x = 2$; $\sqrt{3} - 1, \sqrt{3} + 1$ – **точки перегину.**

12.3.5. $y = \frac{x^2+2x-3}{x} e^{\frac{1}{x}}$.

Відповідь: $y = x+3$, $x = 0$ – **асимптоти; максимум** $y = \frac{4}{e}$ **при** $x = -1$; $-5 \pm \sqrt{22}$ – **точки перегину.**

12.3.6. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Відповідь: $y = 0$, $x = 0$ – **асимптоти; максимум** $y = \frac{2}{e}$ **при** $x = e^2$; $e^{8/3}$ – **точка перегину.**

12.3.7. $y = x\ln^2 x$.

Відповідь: мінімум $y = 0$ **при** $x = 1$; **максимум** $y = \frac{4}{e^2}$ **при** $x = \frac{1}{e^2}$; $\frac{1}{e}$ **– точка перегину.**

12.3.8. $y = \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin x}$.

Відповідь: період – π; $x = \pi n \quad (n \in Z)$ **– асимптоти;** $\frac{\pi}{2} + \pi n \ (n \in Z)$ **– точки перегину.**

12.4. Завдання для самостійної роботи.

Заняття 13

Тема: Побудова графіків параметрично заданих функцій. Побудова графіків у полярній системі координат. Задачі на екстремум змістовного характеру

13.1. Познайомитися з теоретичними положеннями згідно з темою заняття.

13.2. Завдання для роботи в аудиторії.

Побудувати лінії (13.2.1 - 13.2.2):

13.2.1. $x = t^3 + 2t^2 + t; \quad y = -2 + 3t - t^3.$

Відповідь: $(0, -4)$ – точка повернення.

13.2.2. $x = \frac{1}{t(t+1)}$; $y = \frac{(t+1)^2}{t}$.

Відповідь: $y = x + 3,\ y = 0,\ x = 0$ – асимптоти.

Побудувати криві (13.2.3 - 13.2.8):

13.2.3. $\boldsymbol{\rho} = \cos \mathbf{3}\boldsymbol{\varphi}$.

13.2.4. $\boldsymbol{\rho} = \dfrac{1}{\sqrt{\sin 3\varphi}}$.

13.2.5. $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{1} + \cos \boldsymbol{\varphi}$.

13.2.6. $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{1} - \mathbf{2} \cos \boldsymbol{\varphi}$.

13.2.7. $\rho = 1 + \operatorname{tg}\varphi$.

13.2.8. $\rho = \frac{\varphi}{\varphi - 1}$.

Перейшовши до полярних координат, побудувати криву (13.2.9 - 13.2.10):
13.2.9. $(x^2 + y^2)^2 = xy$.

13.2.10. $(x^2 + y^2 - 2x)^2 = x^2 + y^2$.

13.2.11. Знайти сторони прямокутника найбільшого периметра, вписаного в півколо радіусом R.

Відповідь: $\frac{R}{\sqrt{5}}$, $\frac{4R}{\sqrt{5}}$.

13.2.12. Знайти сторони прямокутника найбільшої площі, вписаного в еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Відповідь: $a\sqrt{2}$, $b\sqrt{2}$.

13.2.13. У дану кулю вписати конус з найбільшим об'ємом.

Відповідь: висота конуса $\frac{4}{3}R$, **де** R **– радіус даної кулі.**

13.2.14. На якій висоті над центром круглого столу радіусом a треба розмістити електричну лампочку, щоб освітленість краю стола була найбільшою?

Відповідь: $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

13.3. Домашнє завдання.

Побудувати лінії (13.3.1 - 13.3.2):

13.3.1. $x = (t-1)^2(t-2); \quad y = (t-1)^2(t-3).$

Відповідь: $(0;0)$ – **точка повернення.**

13.3.2. $x = \frac{t^2}{t-1}; \quad y = \frac{t^2-1}{t}.$

Відповідь: $y = x-1,\ y = 0,\ x = 0$ – **асимптоти;** $(-1;1)$ – **точка самоперетину.**

Побудувати криві (13.3.3 - 13.3.8):

13.3.3. $\rho = \sin 3\varphi$.

13.3.4. $\rho = \operatorname{tg} 2\varphi$.

13.3.5. $\rho = 2 + \cos\varphi$.

13.3.6. $\rho = 1 + 2\cos\varphi$.

13.3.7. $\boldsymbol{\rho} = \dfrac{2}{\cos\varphi} - \mathbf{1}$.

13.3.8. $\boldsymbol{\rho} = \dfrac{\varphi-1}{\varphi+1}$.

Перейшовши до полярних координат, побудувати криві (13.3.9 - 13.3.10):
13.3.9. $\boldsymbol{x}^4 + \boldsymbol{y}^4 = \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2$.

13.3.10. $(\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 - \boldsymbol{x})^2 = 4(\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2)$.

13.3.11. Вікно має форму прямокутника, завершеного півкругом. Периметр дорівнює P. Які повинні бути розміри вікна, щоб воно пропускало найбільшу кількість світла?

Відповідь: основа вікна $a = \frac{2P}{4+\pi}$.

13.3.12. Знайти найменшу можливу площу трикутника, утвореного дотичною до еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ і осями координат.

Відповідь: ab.

13.3.13. У дану кулю вписати циліндр з найбільшою бічною поверхнею.

Відповідь: висота циліндра $R\sqrt{2}$, де R – радіус даної кулі.

13.3.14. На відрізку, що з'єднує два джерела світла силою I_1 та I_2, знайти найменше освітлену точку.

Відповідь: відстань l ділиться шуканою точкою у відношенні $\sqrt[3]{I_1} : \sqrt[3]{I_2}$.

13.4. Завдання для самостійної роботи.

Заняття 14

Тема: Частинні похідні. Повний диференціал. Похідні складених та неявних функцій

14.1. Познайомитися з теоретичними положеннями згідно теми заняття.

Приклади

14.1.1. Знайти частинні похідні функції $z = x^5 + 3x^2y - y^4$.

Розв'язання

$\frac{\partial z}{\partial x} = 5x^4 + 6xy$; $\quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 - 8y^3$.

14.1.2. Знайти повний диференціал функції $z = \mathrm{e}^{x+2y}$.

Розв'язання

$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \mathrm{e}^{x+2y}dx + 2\mathrm{e}^{x+2y}dy.$

14.1.3. $z = x^3y^2 + xy^4$, $x = u\sin v$, $y = \cos u\,\mathrm{e}^{v}$. Знайти $\frac{\partial z}{\partial u}$.

Розв'язання

$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = (3x^2y^2 + y^4)\sin v + (2x^3y + 4xy^3)(-\sin u)\mathrm{e}^{v}.$

14.1.4. Знайти частинні похідні та повний диференціал функції $z = f(x, y)$, якщо $F(x, y, z) = z^3 + zx + x^3 + y^3 = 0$.

Розв'язання

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{z+2x}{3z^2+x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2y}{3z^2+x}$$

звідки

$$dz = -\frac{z+2x}{3z^2+x}dx - \frac{2y}{3z^2+x}dy.$$

14.1.5. Неявні функції $y(x)$ та $z(x)$ визначаються системою рівнянь $\begin{cases} x^3 + xy + y^3 + xz + z^3 = 0, \\ x^4 + xy^2 + y^3z + yz^4 = 0. \end{cases}$ Знайти y'_x та z'_x.

Розв'язання

Продиференціюємо обидва рівняння системи відносно змінної x.

$$\begin{cases} 3x^2 + y + xy'_x + 3y^2y'_x + z + xz'_x + 3z^2z'_x = 0, \\ 4x^2 + y^2 + 2xyy'_x + 3y^2y'_xz + y^3z'_x + y'_xz^4 + 4z^3yz'_x = 0. \end{cases}$$

Зводячи подібні, отримаємо систему

$$\begin{cases} (x + 3y^2)y'_x + (x + 3z^2)z'_x = -3x^2 - y - z, \\ (2xy + 3y^2z + z^4)y'_x + (y^3 + 4z^3y)z'_x = -x^3 - y^2, \end{cases}$$

звідки

$$y'_x = -\frac{\begin{vmatrix} 3x^2 + y + z; & x + 3z^2 \\ 4x^3 + y^2; & y^3 + 4z^3y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x + 3y^2; & 3x^2 + y + z \\ 2xy + 3y^z + z^4; & y^3 + 4^3y \end{vmatrix}},$$

$$z'_x = -\frac{\begin{vmatrix} x+3y^2; & 3x^2+y+z \\ 2xy+3y^2z+z^4; & 4x^3+y^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x+3y^2; & x+2z^2 \\ 2xy+3y^z+z^4; & y^3+4^3y \end{vmatrix}}.$$

14.2. Завдання для роботи в аудиторії.

Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ (14.2.1 -14.2.5)

14.2.1. $\boldsymbol{z} = \operatorname{tg}\frac{y}{x}$.

$\frac{\partial z}{\partial x}=$

$\frac{\partial z}{\partial y}=$

14.2.2. $\boldsymbol{z} = \ln(\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^3)$.

$\frac{\partial z}{\partial x}=$

$\frac{\partial z}{\partial y}=$

14.2.3. $\boldsymbol{z} = \operatorname{arctg}\frac{x}{x+2y}$.

$\frac{\partial z}{\partial x}=$

$\frac{\partial z}{\partial y}=$

14.2.4. $\mathrm{z} = \mathrm{e}^{\sin^3 \mathrm{x} \cos^2 \mathrm{y}}$**.**

$\frac{\partial z}{\partial x}=$

$\frac{\partial z}{\partial y}=$

14.2.5. $\boldsymbol{z} = \arcsin(\boldsymbol{x}^2\boldsymbol{y}^3 + \boldsymbol{x}^3\boldsymbol{y}^4)$**.**

$\frac{\partial z}{\partial x}=$

$\frac{\partial z}{\partial y}=$

Знайти частинні похідні $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$ **(14.2.6 -14.2.7).**

14.2.6. $\boldsymbol{w} = \frac{xy+y^2z^3}{x+2y+3z}$**.**

$\frac{\partial w}{\partial x}=$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=$$

14.2.7. $\boldsymbol{w} = \frac{1}{\ln(2^x+3^y+5^z)}$.

$$\frac{\partial w}{\partial x}=$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=$$

Знайти повний диференціал функції (14.2.8 - 14.2.10).
14.2.8. $\boldsymbol{z} = \frac{x+2y}{2x+3y}$.

14.2.9. $z = e^{2x}\cos^3 y$.

14.2.10. $w = e^{x}\ln(2x+y)\cos(3y+4z)$.

14.2.11. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, **якщо** $z = x^3y^2 + xy^4$; $x = u^2 + v^2$; $y = \dfrac{u}{v}$.

14.2.12. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial t}$, $\dfrac{\partial s}{\partial v}$, **якщо** $z = e^{xy} + \ln(x^2 + y^2)$; $x = t + sins$; $y = t^2 + \cos^3 s$.

14.2.13. Знайти z'_t**, якщо** $\boldsymbol{z = x^2 + y^2}$; $\boldsymbol{x} = e^t \sin \boldsymbol{t}$; $\boldsymbol{y} = e^t \cos \boldsymbol{t}$**.**

14.2.14. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$**, якщо** $\boldsymbol{z^4 + z^3 + z^2y^2 + x^3 + y^3 = 5}$**.**

14.2.15. Знайти $\boldsymbol{dz}$**, якщо** $e^z + \boldsymbol{z + x^2 + y^3 = 0}$**.**

14.2.16. Знайти x'_t, y'_t, **якщо** $\begin{cases} \boldsymbol{x}^3 + \boldsymbol{xy} + \boldsymbol{t}^3 = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{x}^2 + e^{x+y} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{t}^5 = \mathbf{0}. \end{cases}$

14.2.17. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, **якщо** $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}^3 + \boldsymbol{y}^5$; $\boldsymbol{x}^4 + \boldsymbol{xy} + \boldsymbol{y}^3 = \boldsymbol{u}^2 + \boldsymbol{v}^2$; $e^{x+y} + \boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} = \boldsymbol{uv}$.

14.3. Домашнє завдання.

Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ (14.3.1 - 14.3.4).

14.3.1. $\mathrm{z} = \mathrm{e}^{\mathrm{x}\sin \mathrm{y}}$.

$\frac{\partial z}{\partial x}=$

$\frac{\partial z}{\partial y}=$

14.3.2. $\boldsymbol{z} = \ln(\operatorname{ctg} \boldsymbol{x} + \arccos \boldsymbol{y})$.

$\frac{\partial z}{\partial x}=$

$\frac{\partial z}{\partial y}=$

14.3.3. $\boldsymbol{z} = \frac{\cos(x+2y)}{\ln(x+y)+x^2y^4}$.

$\frac{\partial z}{\partial x}=$

$\frac{\partial z}{\partial y}=$

14.3.4. $\mathrm{z} = \mathrm{y}^{\mathrm{x}}$.

$\frac{\partial z}{\partial x}=$

$\frac{\partial z}{\partial y}=$

Знайти частинні похідні $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial z}$ (14.3.5 - 14.3.6).

14.3.5. $\mathrm{w} = \mathrm{x}^{(\mathrm{y}^2\mathrm{z}+\mathrm{yz}^3)}$.

$\frac{\partial w}{\partial x}=$

$\frac{\partial w}{\partial y}=$

$\frac{\partial w}{\partial z}=$

14.3.6. $\boldsymbol{w} = \frac{x+2y+3z}{x^2+y^3+z^4}$.

$\frac{\partial w}{\partial x}=$

$\frac{\partial w}{\partial y}=$

$\frac{\partial w}{\partial z}=$

14.3.7. $\mathrm{w}=\mathrm{x}^{\mathrm{y}^{\mathrm{z}}}$**.**

$\frac{\partial w}{\partial x}=$

$\frac{\partial w}{\partial y}=$

$\frac{\partial w}{\partial z}=$

Знайти повний диференціал функції (14.3.8 - 14.3.9).

14.3.8. $\mathrm{z}=\mathrm{e}^{\mathrm{x}^2}\cos\frac{y}{x}$**.**

14.3.9. $\mathrm{z}=\mathrm{x}^{\mathrm{x}^2\mathrm{y}}$**.**

14.3.10. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, якщо $z = x^3 + xy + y^3$; $x + \ln x = u - v$; $e^y + y = \dfrac{u^2}{u+v}$.

14.3.11. Знайти повний диференціал dz, якщо $e^{x+y+z} + x + 2y + 3z = 5$.

14.3.12. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, якщо $\dfrac{x+y}{x+2y+3z} + z^2 = 6$.

14.3.13. Знайти z'_t, якщо $z = e^x + \mathrm{tg}(x^2 + y^2)$; $x = t^2 + \frac{1}{t}$; $y = \sin t + \cos t$.

14.4. Завдання для самостійної роботи.

Заняття 15.

Тема: Градієнт. Похідна за напрямком. Дотична площина та нормальна пряма. Похідні та диференціали вищих порядків. Формула Тейлора для функцій багатьох змінних

15.1. Познайомитися з теоретичними положеннями згідно теми заняття.

15.2. Завдання для роботи в аудиторії.

15.2.1. Знайти похідну функції $z = 3x^2 + 4xy + y^3$ у точці $A(1,1)$ за напрямом до точки $B(2,3)$.

Відповідь: $\frac{24}{\sqrt{5}}$.

15.2.2. Знайти похідну функції $w = xyz + y^3 + z^3$ у точці $A(1,2,1)$ за напрямом $\vec{l} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

Відповідь: $\frac{38}{3}$.

15.2.3. Знайти рівняння дотичної площини та нормальної прямої до поверхні $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ у точці $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{3}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Відповідь: $18x + 15y + 2\sqrt{2}z = 36$, $\frac{x - \frac{1}{2}}{18} = \frac{y - \frac{5}{3}}{15} = \frac{z - \frac{1}{\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}$.

15.2.4. Знайти рівняння дотичної площини до поверхні $z = \ln(x^2 + y^2)$ у точці $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$.

Відповідь: $z = \sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 2$.

15.2.5. Знайти d^2z, якщо $z = x^3 + 2xy^2 + y^5$.

Відповідь: $6xdx^2 + 8ydxdy + (4x + 20y^3)dy^2$.

15.2.6. Знайти d^2z у точці $A(1, 1, 1)$, якщо $x^2 + y^2 + z^2 + z^3 = 2$.

Відповідь: $-\frac{2}{125}(41dx^2 + 32dxdy + 41dy^2)$.

15.2.7. Знайти d^3z, якщо $z = e^{2x}\cos 3y$.

Відповідь: $8e^{2x}\cos 3y dx^3 - 36e^{2x}\sin 3y d^2x dy - 54e^{2x}\cos 3y dx d^2y +$
$+27e^{2x}\sin 3y dy^3$.

15.2.8. Розкласти функцію $z = e^{x+y+xy}$ за формулою Тейлора у точці $(0,0)$ до членів четвертого степеня включно.

Відповідь: $1 + x + y + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} + 2xy + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3}{2}x^2y + \dfrac{3}{2}xy^2 + \dfrac{1}{24}x^4 + \dfrac{1}{24}y^4 +$
$+\dfrac{4}{6}x^3y + \dfrac{4}{6}xy^3 + \dfrac{7}{4}x^2y^2 + o((x^2+y^2)^2)$.

15.2.9. Розкласти функцію $z = x^y$ за формулою Тейлора у точці $(1, 1)$ до членів другого степеня включно.

Відповідь: $1 + x + xy + o((x-1)^2 + (y-1)^2)$.

15.2.10. $u = \ln \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. **Перевірити, що** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

15.3. Домашнє завдання.

15.3.1. Знайти похідну функції $z = x^4 + 3x^2y^2 + y^4$ у точці$A(1, 0)$ за напрямом $\vec{l} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$.

Відповідь: $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$.

15.3.2. Знайти похідну функції $w = x^3 + xy^2 + y^4 + y^2z^2 + z^5$ у точці $A(0, 1, 1)$ за напрямом до точки $B(1, 3, 5)$.

Відповідь: $\dfrac{14}{\sqrt{21}}$.

15.3.3. Знайти рівняння дотичної площини та нормальної прямої до поверхні $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ у точці $(1, 1, 1)$.

Відповідь: $x + y - z = 1,\ x - 1 = y - 1 = \dfrac{z - 1}{-1}$.

15.3.4. Знайти рівняння дотичної площини до поверхні $z = \mathrm{e}^{-x^2 - xy - y^2}$ у точці $(1, 2, \mathrm{e}^{-7})$.

Відповідь: $z - \mathrm{e}^{-7} = \mathrm{e}^{-7}(9 - 4x - 5y)$.

15.3.5. Знайти $d^2 z$, якщо $z = x^4 + 3x^2 y + y^6$.

Відповідь: $d^2 z = (12x^2 + 6y)dx^2 + 12x dx dy + 30y^4 dy^2$.

15.3.6. Знайти d^2z у точці $A(1,1,1)$, якщо $z^4+z+xy^2=3$.

Відповідь: $d^2z|_A = -\dfrac{1}{125}(12dx^2+148dxdy+98dy^2)$.

15.3.7. Знайти d^3z, якщо $z=x\mathrm{e}^{y^2}$.

Відповідь: $(6+12y^2)\mathrm{e}^{y^2}dxdy^2+(12xy+8xy^3)\,\mathrm{e}^{y^2}dy^3$.

15.3.8. Розкласти функцію $z = \sin(x - y + xy)$ за формулою Тейлора у точці $(0, 0)$ до членів другого степеня включно.

Відповідь: $x - y + xy + o(x^2 + y^2)$.

15.3.9. Розкласти функцію $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$ за формулою Тейлора у точці $(1, 1)$ до членів другого степеня включно.

Відповідь: $\dfrac{\pi}{4} - x + y + \dfrac{x^2 - y^2}{4} + o((x-1)^2 + (y-1)^2)$.

15.4. Завдання для самостійної роботи.

Заняття 16

Тема: Екстремуми функцій багатьох змінних

16.1. Познайомитися з теоретичними положеннями згідно з темою заняття.

Приклади

16.1.1. Знайти екстремуми функції $z = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2y$.

Розв'язання:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 4y - 2.$$

У точках екстремуму $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ та $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Розв'язуємо систему

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0, \\ -2x + 4y - 2 = 0. \end{cases}$$

Вона має один розв'язок $x_1 = 1$, $y_1 = 1$.

Знайдемо другі частинні похідні у цій точці:
$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$; $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2$; $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4$.

Оскільки $A > 0$ і $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = 16 - 4 = 12 > 0$, то у точці $(1, 1)$ – мінімум $z_{\min} = -1$.

Відповідь: мінімум у точці $(1; 1)$.

16.1.2. Знайти екстремуми функції $w = 3x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 6xy + 2yz - 6x - 6z$.

Розв'язання:
$\frac{\partial w}{\partial x} = 6x - 6y - 6$; $\frac{\partial w}{\partial y} = 10y - 6x + 2z$; $\frac{\partial w}{\partial z} = 4z + 2y - 6$.

Станціонарні точки функції знаходимо з системи $\begin{cases} 6x - 6y - 6 = 0, \\ 10y - 6x + 2z = 0, \\ 4x + 2y - 6 = 0. \end{cases}$

Це точка $x_1 = 2$, $y_1 = 1$, $z_1 = 1$.

Знаходимо матрицю Гессе – матрицю других частинних похідних:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 \\ -6 & 10 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Знайдемо кутові мінори цієї матриці $\Delta_1 = 6 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & -6 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = 24 > 0$,
$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & -6 & 0 \\ -6 & 10 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 72 > 0$.

Тому точка $(2; 1; 1)$ – точка мінімуму. $w_{\min} = w(2; 1; 1) = -9$.

Відповідь: мінімум $w_{\min} = -9$ у точці $(2; 1; 1)$.

16.2. Завдання для роботи в аудиторії.

16.2.1. Знайти екстремуми функції $z = x^2 + xy + y^2 + y^3 + x - 22y$.

Відповідь: мінімум у точці $\left(-\frac{7}{4}; \frac{5}{2}\right)$.

16.2.2. Знайти екстремуми функції $z = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y$.

Відповідь: мінімум у точці $(1; 3)$.

16.2.3. Знайти екстремуми функції $z = e^{x-\frac{y}{2}}(2x - y + y^2)$.

Відповідь: мінімум у точці $(-1; 0)$.

16.2.4. Знайти екстремуми функції $z = xy(1 - x - y)$.

Відповідь: максимум у точці $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

16.2.5. Знайти екстремуми функції $z = z(x, y)$, заданої неявно, рівнянням $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$.

Відповідь: мінімум у точці $(-2; 0; 1)$; максимум у точці $\left(\frac{16}{7}; 0; -\frac{8}{7}\right)$.

16.2.6. Знайти екстремуми функції $u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$.

Відповідь: мінімум у точці $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; 1\right)$.

16.3. Домашнє завдання.

16.3.1. Знайти екстремуми функції $z = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$.

Відповідь: мінімум у точці $(1; 2)$.

16.3.2. Знайти екстремуми функції $u = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$.

Відповідь: мінімум у точці $(24; -144; 1)$.

16.3.3. Знайти екстремуми функції $z = e^{-x^2-y^2}(2x^2 + y^2)$.

Відповідь: мінімум у точці $(0; 0)$; максимум у точках $(1; 0)$, $(-1; 0)$.
16.3.4. Знайти екстремуми функції $z = x^3 + yx + 2x - y$.

Відповідь: екстремумів немає.

16.3.5. Знайти екстремуми функції $z = x^3 - 4xy + 2x + y^2 - 4y$.

Відповідь: мінімум у точці $\left(\frac{4+\sqrt{34}}{3}; \frac{14+2\sqrt{34}}{3}\right)$.

16.3.6. Знайти екстремуми функції $z = z(x, y)$, заданої неявно рівнянням $x^2 + 2xy + 4y^2 + 2xz + 6z^2 = 90$.

Відповідь: мінімум у точці $(-4; 1; -3)$; максимум у точці $(4; -1; 3)$.

16.4. Завдання для самостійної роботи.

Заняття 17

Тема: Умовні екстремуми

17.1. Познайомитися з теоретичними положеннями згідно з темою заняття.

Приклад

17.1.1. Знайти екстремуми функції $z = xy$ за умовою $x^2 + xy + y^2 = 1$.

Розв'язання:

Складемо функцію Лагранжа

$$L = xy + \lambda(x^2 + xy + y^2 - 1).$$

Точки екстремума повинні задовільняти систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = y + \lambda(2x + y) = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = x + \lambda(x + 2y) = 0, \qquad (*) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + xy + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Перші два рівняння перепишемо у вигляді

$$2\lambda + (1 + \lambda)y = 0,$$

$$(1 + \lambda)x + 2\lambda y = 0.$$

Це лінійна однорідна система відносно невідомих x, y при заданому λ. Оскільки при $x = y = 0$ третє рівняння системи не задовольняється, то визначник

$$\begin{vmatrix} 2\lambda & 1 + \lambda \\ 1 + \lambda & 2\lambda \end{vmatrix} = 4\lambda^2 - (1 + \lambda)^2$$

повинен дорівнювати 0.

Звідси

$$3\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0;$$

$$\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = -\frac{1}{3}.$$

При $\lambda = \lambda_1$ маємо $y = -x$ і з третього рівняння системи $(*)$ $x^2 = 1$, $x_{1,2} = \pm 1$, $y_{1,2} = \mp 1$.

При $\lambda = \lambda_2$ маємо $y = x$ і з третього рівняння системи $(*)$ $3x^2 = 1$, $x_{3,4} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, $y_{3,4} = \mp\frac{1}{3}$.

Крива $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$ є еліпсом, тобто вона є обмеженою замкненою множиною. Функція $z = xy$ неперервна, тому приймає на цьому еліпсі найбільше та найменше значення. Точки мінімуму та максимуму повинні бути розв'язками системи $(*)$. У точках $(\pm 1; \mp 1)$ $z_{1,2} = -1$, у точках $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}; \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ $z_{3,4} = \frac{1}{3}$. Тому $(x_{1,2}; y_{1,2})$ – точки мінімуму, $z_{\min} = -1$.

Точки $(x_{3,4}; y_{3,4})$ – точки максимуму, $z_{\max} = \frac{1}{3}$.

17.2. Завдання для роботи в аудиторії.

17.2.1. Знайти екстремуми функції $z = x^2 + 12xy + 2y^2$, якщо $4x^2 + y^2 = 25$.

Відповідь: мінімум у точках $(\pm 2; \mp 3)$; максимум у точках $\left(\pm\frac{3}{2}; 4\right)$.

17.2.2. Знайти екстремуми функції $z = (x + y)^2 + (x + y)^4$, якщо $x^2 + 2xy + 4y^2 = 3$.

Відповідь: мінімум у точках $(\pm 1; \mp 1)$; максимум у точках $(\pm\sqrt{3}; 0)$.

17.2.3. Знайти екстремуми функції $z = \ln(4 + x + y)$, якщо $x^2 + xy + 2y^2 = 1$.

Відповідь: мінімум у точці $\left(-\frac{3}{\sqrt{14}}; \frac{1}{\sqrt{14}}\right)$; максимум у точці $\left(\frac{3}{\sqrt{14}}; \frac{1}{\sqrt{14}}\right)$.

17.2.4. Знайти екстремуми функції $u = x - 2y + 2z$, якщо $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Відповідь: мінімум у точці $\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$; максимум у точці $\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

17.2.5. Знайти екстремуми функції $z = x^2 + 3y^2$, якщо $x^2 + xy + 2y^2 = 14$.

Відповідь: мінімум у точках $(\pm 3; \pm 1)$; максимум у точках $(\pm\sqrt{7}; \mp\sqrt{7})$.

17.3. Домашнє завдання.

17.3.1. Знайти екстремуми функції $z = e^{x+2y}$, якщо $2x^2 + 2xy + y^2 = 5$.

Відповідь: мінімум у точці $(1; -3)$; максимум у точці $(-1; 3)$.

17.3.2. Знайти екстремуми функції $z = (2x + y) - (2x + y)^3$, якщо $x^2 + xy + y^2 = 3$.

Відповідь: мінімум у точці $(-\sqrt{3}; 0)$; максимум у точці $(\sqrt{3}; 0)$.

17.3.3. Знайти екстремуми функції $z = \ln(1 + (x+y)^2)$, якщо $x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$.

Відповідь: мінімум у точках $(\pm 1; 0)$; максимум у точках $(\pm 1; \mp 1)$.

17.3.4. Знайти екстремуми функції $z = e^{x-y}$, якщо $x^4 + xy + y^4 = 1$.

Відповідь: мінімум у точці $(-1; 1)$; максимум у точці $(1; -1)$.

17.3.5. Знайти екстремуми функції $z = x^2 + 2xy + y^2$, якщо $x^2 + xy + 2y^2 = 2$.

Відповідь: мінімум у точках $(\pm 1; \mp 1)$; максимум у точках $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{18}}; \pm\frac{5}{\sqrt{18}}\right)$.

17.4. Завдання для самостійної роботи.