**Практичне заняття №14 (гр. 318, 318а)**

**Багаторазові (багатократні) вимірювання**

**1. Рівні за точністю**

**2. Різні за точністю**

**(Навчальний посібник** Новиков Г.А. Основы метрологии. Учебное пособие. — Ульяновск: УлГТУ, 2010. — 182 с. (с. 13 – 182), вільний інтернет-ресурс <https://www.twirpx.com/file/339205/>), с.123 – 154). Або будь-який інший.

**Завдання.**

Отримано 3 вибірки результатів багаторазових вимірювань однієї фізичної величини (електричного опору) в різних умовах. Потрібно за результатами спостережень оцінити дійсне значення ФВ у вигляді точкової та інтервальної оцінок (середнє арифметичне значення та довірчий інтервал, відповідно).

Для багатократних випадкових вимірювань оцінка дійсного значення розраховується за припущенням, що ці випадкові значення розподілені за нормальним законом (див. теорію у рекомендованому підручнику з п. 3.5 (с. 123) або будь-якому іншому за темою «Випадкові величини. Опис, властивості, функції розподілу випадкових величин»).

**Зверніть увагу!**

***1.В деяких варіантах кількість спостережень є різною, тобто n1 відрізняється від n2 або n3. Цю відмінність треба обов’язково (!) враховувати.***

***2. Кількість значущих цифр в оціниці САЗ (і в подальших розрахунках) при округленні повинна бути на одну цифру більшою, ніж в попередніх даних. Якщо дані відрізняються за точністю, то кількість значущих цифр обирають за потенційно найточнішими даними.***

***3. ВИБІРКИ ЗАПИСАНІ ПОСТРОКОВО!***

**Варіант завдання відповідає:**

№1– Андрюхіна А., №2 – Басов О., №3 – Білоус К., №4 – Білоусов Д.,

№5 – Завада Т., №6 – Запорожець М., №7 – Каюк В., №8 – Колесник В.,

№9 – Овчаренко К., №10 – Селівко Д.,

№11 – інші студенти гр. 318,

№12 - всі студенти гр.318а.

В Таблиці 1 наведено результати випадкових спостережень 3-х вибірок і значення довірчої вірогідності за варіантами:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| №вар. | R1 | R2 | R3 | R4 | R5 | R6 | R7 | R8 | R9 | R10 | R11 | R12 | Pдов |
| **11**  | 30,22 | 3 31,64 | 31,12 | 31,55 | 31,29 | 32,02 | 31,85 | 30,24 | - | 30,18 | 30,05 | 31,10 | 0,99 |
| 30,1 | 30,3 | 30,2 | 30,0 | 30,1 | 30,3 | 30,5 | 30,4 | 30,2 | 30,5 | 30,1 | 30,3 |
| 30,24 | 30,25 | 30,26 | - | 30,27 | 30,23 | 30,30 | 30,24 | 30,25 | 30,23 | 30,26 | 30,25 |
| **12** | 961 | 963 | 962 | 963 | 961 | 960 | 962 | 965 | 964 | 962 | 963 | 960 | 0,98 |
| 964 | 960 | 965 | 960 | 962 | 963 | 959 | 959 | 961 | - | 964 | 959 |
| 962,3 | 958,6 | 957,9 | 958,4 | 958,2 | 957,5 | 954,9 | 960,2 | 960,7 | 962,2 | 961,7 | 960,5 |
| **3** | 305,1 | 304,8 | 306,2 | 305,8 | 305,1 | 306,3 | 304,9 | 304,2 | 305,0 | 305,4 | 304,7 | 304,5 | 0,90 |
| 303,25 | 303,20 | 303,69 | 303,52 | 303,04 | 303,12 | 303,15 | 303,67 | 303,09 | 303,13 | - | 303,21 |
| 300,87 | 300,13 | 300,58 | 301,04 | 300,98 | 300,25 | 300,65 | 301,10 | 300,95 | 300,45 | 301,02 | 300,58 |
|  **4** | 0,256 | 0,314 | 0,289 | 0,251 | 0,292 | 0,278 | 0,269 | 0,270 | 0,218 | 0,275 | 0,270 | 0,268 | 0,99 |
| 0,300 | 0,301 | 0,290 | 0,295 | - | 0,295 | 0,292 | 0,297 | 0,301 | 0,303 | 0,298 | 0,279 |
| 0,27 | 0,25 | 0,29 | 0,26 | 0,25 | 0,28 | 0,30 | 0,27 | 0,24 | 0,25 | 0,29 | 0,24 |
|  **5** | 805,0 | 803,2 | 805,7 | 804,4 | 805,8 | 803,9 | 804,0 | 810,4 | - | 805,7 | 804,5 | 803,7 | 0,90 |
| 800,25 | 800,61 | 800,34 | 800,42 | 800,95 | 800,31 | - | 800,65 | 800,46 | 800,98 | 800,72 | 800,12 |
| 802,3 | 800,6 | 799,5 | 802,7 | 801,4 | 801,6 | 800,5 | 800,9 | 801,6 | 800,5 | 802,5 | 801,9 |
|  **6** | 9,215 | 9,265 | 9,518 | 9,629 | 9,512 | 9,045 | 9,129 | 10,027 | 10,002 | 9,217 | 9,210 | 9,216 | 0,95 |
| 10,002 | 10,020 | 10,008 | 10,005 | - | 10,008 | 10,010 | 10,004 | 10,005 | 10,010 | 10,012 | - |
| 9,51 | 9,48 | 9,54 | 9,87 | 10,03 | 10,00 | 9,23 | 9,56 | 9,28 | 9,17 | 9,30 | 10,02 |

Таблиця 1 - Результати багаторазових спостережень (3 вибірки).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **7** | 55,26 | 55,78 | 55,65 | 55,04 | 54,12 | 55,16 | 55,12 | 55,25 | 55,81 | 55,75 | 55,23 | - | 0,90 |
| 54,132 | 55,878 | 55,123 | 54,316 | 54,912 | 54,723 | 54,112 | 54,089 | 54,690 | 54,614 | - | - |
| 53,6 | 54,1 | 55,2 | 54,8 | 54,5 | 56,9 | 55,5 | 56,3 | 53,8 | 56,2 | 56,5 | 55,4 |
| **8** | 98,34 | 99,01 | 97,23 | 97,43 | 97,63 | 98,02 | 102,03 | 99,45 | 98,68 | - | 99,03 | 99,15 | 0,95 |
| - | 99,22 | 99,33 | 99,44 | 99,55 | 99,66 | 99,77 | 99,88 | 99,99 | 100,90 | 101,99 | 102,00 |
| 96,76 | 98,12 | 98,54 | - | 98,18 | 98,42 | - | 98,14 | 98,89 | 98,37 | 98,42 | 99,07 |
|  **9** | 0,323 | 0,312 | 0,350 | 0,320 | - | 0,405 | 0,388 | 0,313 | 0,315 | 0,318 | 0,311 | 0,314 | 0,98 |
| 0,35 | 0,33 | 0,32 | 0,36 | 0,39 | 0,42 | 0,36 | 0,35 | 0,35 | 0,33 | 0,35 | 0,34 |
| 0,413 | 0,408 | 0,420 | 0,391 | 0,380 | - | 0,348 | 0,388 | 0,402 | 0,355 | 0,370 | 0,380 |
|  **10** | 1003,6 | 1004,5 | 1008,5 | 1006,6 | 1009,2 | 1010,1 | 1009,4 | - | 1008,3 | 1005,5 | 1004,2 | 1002,4 | 0,99 |
| 998,9 | 999,3 | 997,5 | 989,8 | 998,3 | 899,9 | 989,7 | 999,3 | 997,5 | 994,8 | 989,1 | 989,9 |
| 999 | 1000 | 1002 | 1005 | 998 | 998 | 1003 | 998 | 1005 | 1004 | 1003 | 1006 |
| **11** | 24,15 | 24,65 | 24,23 | 25,05 | 24,98 | 24,57 | 24,02 | 24,55 | 24,22 | 25,05 | 24,69 | 24,38 | 0,80 |
| 23,98 | 23,79 | 23,77 | 24,12 | 24,03 | 24,15 | 24,10 | 24,08 | 23,75 | 23,80 | 24,02 | 24,10 |
| 20,15 | 21,05 | 21,01 | 20,95 | 20,72 | 20,36 | 20,56 | 20,85 | 21,02 | 21,10 | 21,12 | 20,68 |
| **12** | 280,5 | 281,1 | 281,2 | 280,7 | 280,6 | 280,5 | 281,0 | 281,2 | 285,1 | 280,9 | 280,7 | 281,0 | 0,95 |
| 280,82 | 280,93 | 280,77 | 280,90 | 280,85 | - | 280,94 | 280,81 | 281,08 | 280,86 | 280,99 | 280,93 |
| 283,2 | 284,5 | 280,8 | 281,3 | 281,9 | 284,0 | 280,5 | - | - | 283,5 | 283,0 | 282,6 |

**МЕТОДИКА РОЗРАХУНКУ**

1. Визначити оцінку дійсного значення результатів спостережень кожної вибірки як середнє арифметичне значення (САЗ) випадкових величин ,:

  (1)

де n – кількість спостережень в ряду (n = 10…12), j - кількість вибірок (m = 3).

2) Найти випадкові відхилення результатів спостереження від САЗ та їх квадратичні значення:

 ****, (2)

де *i* – результат у вибірці, *j* = 3 – кількість вибірок.

Результати записати в табл. 2 і табл. 3.

Таблиця 2. Випадкові відхилення

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № виб. | ν1 | ν2 | ν3 | ν4 | ν5 | ν6 | ν7 | ν8 | ν9 | ν10 | ν11 | ν12 |
| 1 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Таблиця 3. Квадрати випадкових відхилень

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № виб. | ν12 | ν22 | ν32 | ν42 | ν52 | ν62 | ν72 | ν82 | ν92 | ν102 | ν112 | ν122 |
| 1 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

3) Визначити оцінку середнього квадратичного відхилення (СКВ) результатів спостережень S(R1), S(R2), S(R3):

 *S(Rj) = +*  (3)

4) Перевірити вибірки на наявність грубих помилок (промахів) в кожній вибірці за критерієм Граббса.

За критерієм Граббса порівнюють співвідношення випадкової похибки максимального значення, поділене на СКВ, з допустимим значенням. Для цього необхідно взяти найбільше за значенням (по модулю) випадкове відхилення і розділити на значення СКВ відповідної вибірки, а потім порівняти з допустимим значенням , яке потрібно обрати із таблиці статистики Граббса (таблиця 4) у відповідності до рівня значимості *q* (визначається по заданій довірчій вірогідності *Рдов* , їх сума складає 1) та числа спостережень *nі* .

  (4)

***Якщо виявлено промах, то такий результат є недостовірним або помилковим, його треба вилучити з вибірки та повторити обрахування за п.п. 1) – 3). При цьому повторно перевіряти на наявність промахів не треба.***

5) Визначити оцінку СКВ результату багатократних вимірювань ,,:

  (5)

6) Перевірити оцінки САЗ вибірок на рівноточність.

Так як вибіркові значення в кожному ряду отримані за різними умовами, то потрібно перевірити вибірки на рівноточність (або підтвердити нерівноточність). Для цього застосовують критерій Фішера, за яким оцінюють рівнорозсіюваність дисперсій результатів вимірювань. За критерієм Фішера порівнюють 2 (дві) вибіркові дисперсії – найбільшу та найменшу за значеннями. В чисельник треба поставити більшу за значенням дисперсію, а в знаменник – меншу (із трьох обрахованих).

Якщо дисперсії будуть оцінені як рівні за характеристикою розсіювання, то оцінки САЗ будуть вважатися рівними за точністю.

 *F =  < F*допуст, (6)

де Fдопуст – коефіцієнт, який обирають із таблиці статистики розподілення Фішера (таблиця 5). Він залежить від заданого значення довірчої вірогідності *Рдов* тачис-ла ступенів свободи, які визначають як k1 = n1 – 1, k2 = n2 – 1 (кількість вибіркових значень n1 та n2 є характеристиками порівнювальних вибірок).

**При *F<F*допуст** дисперсії визнають як рівнорозсіяні, а результати вибірок – як рівні за точністю. Тому з метою отримання найдостовірного значення виміряної ФВ результати вибірок можна об’єднати як рівноточні.

Подальше опрацювання результатів вимірювань проводять за методикою прямих рівноточних вимірювань, тобто об’єднують достовірні результати вимірювань в одну вибірку і обраховують всі належні оцінки (САЗ, СКВ, ) для однієї вибірки розміром *(без урахування вилучених промахів)*.

**При *F>F*допуст** подальше опрацювання результатів проводять за методикою прямих нерівноточних (різних за точністю) вимірювань.

***НЕЗВАЖАЮЧИ НА ТЕ, ЯКЕ СПІВВІДНОШЕННЯ ЗА КРИТЕРІЄМ ФІШЕРА ВИ ОТРИМАЛИ, ВВАЖАТИ РЕЗУЛЬТАТИ ВИМІРЮВАНЬ – РІЗНИМИ ЗА ТОЧНІСТЮ. Методика об’єднання результатів вимірювань, різних за точністю, викладена нижче.***

7) Визначити вагові коефіцієнти кожної вибірки *Р1*, *Р2 , Р3*:

 (7)

Вагові коефіцієнти характеризують ступінь довіри до результатів вимірювань в вибірках. Чим більше значення Рj, тим більш достеменним є результат ряду вимірювань.

8) Обрахувати оцінку дійсного значення результату вимірювання опору як середнє зважене значення (СЗЗ) , яке буде найдостовірною і найвірогідною оцінкою дійсного значення опору за всіма результатами вимірювань:

 . (8)

9) Визначити оцінку середнього квадратичного відхилення середнього зваженого значення:

a) якщо кількість вимірювань в вибірках є одинаковою

 *S() =* + (9)

б) якщо кількість вимірювань у вибірках є різною

, (10)

де  - кількість вимірювань в об’єднаній вибірці;

 - ваговий коефіцієнт *j* – ї вибірки.

10) Розрахувати довірчий інтервал результату вимірювання:

  , (11)

де *tСт*  - коефіцієнт Стьюдента, який обирають за довірчою вірогідністю *Рдов* та числом ступенів свободи *K = N – m* із Таблиці 6*.*

1. Записати результат вимірювання електричного опору у вигляді:

  (12)

 *Рдов = ...; N =...*

Таблиця 4 – Статистика розподілення Граббса (*tГр*)

Для варіантів із Pдов = 0,80 брати табличні значення для Pдов = 0,90.

|  |  |
| --- | --- |
| Кількість значень n | Рівень значимості ***q*** ***(q = 1-Pдов)*** |
| ***0,1*** | ***0,05*** | ***0,02*** | ***0,01*** | ***0,001*** |
| 3 | 1,148 | 1,153 | 1,155 | 1,155 | 1,155 |
| 4 | 1,425 | 1,463 | 1,481 | 1,492 | 1,499 |
| 5 | 1,602 | 1,672 | 1,715 | 1,749 | 1,780 |
| 6 | 1,729 | 1,822 | 1,887 | 1,944 | 2,011 |
| 7 | 1,828 | 1,938 | 2,020 | 2,097 | 2,201 |
| 8 | 1,909 | 2,032 | 2,126 | 2,221 | 2,358 |
| 9 | 1,977 | 2,110 | 2,215 | 2,323 | 2,492 |
| 10 | 2,036 | 2,176 | 2,290 | 2,410 | 2,606 |
| 11 | 2,088 | 2,234 | 2,355 | 2,485 | 2,705 |
| 12 | 2,134 | 2,285 | 2,412 | 2,550 | 2,791 |
| 13 | 2,175 | 2,331 | 2,462 | 2,607 | 2,867 |
| 14 | 2,213 | 2,371 | 2,507 | 2,659 | 2,935 |
| 15 | 2,247 | 2,409 | 2,549 | 2,705 | 2,997 |
| 16 | 2,279 | 2,443 | 2,585 | 2,747 | 3,052 |
| 17 | 2,309 | 2,475 | 2,620 | 2,785 | 3,103 |
| 18 | 2,335 | 2,504 | 2,651 | 2,821 | 3,149 |
| 19 | 2,361 | 2,532 | 2,681 | 2,854 | 3,191 |
| 20 | 2,385 | 2,557 | 2,709 | 2,884 | 3,230 |
| 21 | 2,408 | 2,580 | 2,733 | 2,912 | 3,266 |

Таблиця 5. Статистика розподілення Фішера

За цією статистикою обирають Fдопуст по *Рдов*  та k1 і k2 :

 k1 – число ступенів свободи в першій вибірці, k1 = n1 - 1

 k2 – число ступенів свободи в другій вибірці, k2 = n2 - 1

 Для варіантів із Pдов = 0,80 брати табличні значення для Pдов = 0,75.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***k2*** | ***Pдов*** | ***k1*** |
| ***5*** | ***6*** | ***7*** | ***8*** | ***9*** | ***10*** | ***11*** | ***12*** |
| ***5*** | ***0,75******0,90******0,95******0,99*** | 1,893,455,0511,0 | 1,893,404,9510,7 | 1,893,374,8810,5 | 1,893,344,8210,3 | 1,893,324,7710,2 | 1,893,304,7410,1 | 1,893,284,719,96 | 1,893,274,689,98 |
| ***6*** | ***0,75******0,90******0,95******0,99*** | 1,793,114,398,75 | 1,783,054,288,47 | 1,783,014,218,26 | 1,772,984,158,10 | 1,772,964,107,98 | 1,772,944,067,87 | 1,772,924,037,79 | 1,772,904,007,72 |
| ***7*** | ***0,75******0,90******0,95******0,99*** | 1,712,883,977,46 | 1,712,833,877,19 | 1,702,783,796,99 | 1,702,753,736,84 | 1,692,723,686,72 | 1,692,703,646,62 | 1,692,683,606,54 | 1,682,673,576,47 |
| ***8*** | ***0,75******0,90******0,95******0,99*** | 1,662,733,696,63 | 1,652,673,586,37 | 1,642,623,506,18 | 1,642,593,446,03 | 1,642,563,395,91 | 1,632,543,355,81 | 1,632,523,315,73 | 1,622,503,285,67 |
| ***9*** | ***0,75******0,90******0,95******0,99*** | 1,622,613,486,06 | 1,612,553,375,80 | 1,602,513,295,61 | 1,602,473,235,47 | 1,592,443,185,35 | 1,592,423,145,26 | 1,582,403,105,18 | 1,582,383,075,11 |
| ***10*** | ***0,75******0,90******0,95******0,99*** | 1,592,523,335,64 | 1,582,463,225,39 | 1,572,413,145,20 | 1,562,383,075,06 | 1,562,353,024,94 | 1,552,322,984,85 | 1,552,302,944,77 | 1,542,282,914,71 |
| ***11*** | ***0,75******0,90******0,95******0,99*** | 1,562,453,205,32 | 1,552,393,095,07 | 1,542,343,014,89 | 1,532,302,954,74 | 1,532,272,904,63 | 1,522,252,854,54 | 1,522,232,824,46 | 1,512,212,794,40 |
| ***12*** | ***0,75******0,90******0,95******0,99*** | 1,542,393,115,06 | 1,532,333,004,82 | 1,522,282,914,64 | 1,512,242,854,50 | 1,512,212,804,39 | 1,502,192,754,30 | 1,502,172,724,22 | 1,492,152,694,16 |

Таблиця 6 – Статистика розподілення Стьюдента (*tСт*)

Число ступенів свободи: k = n – 1 (для рівноточних),

K = N - m (для нерівноточних).

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***k/Pдов*** | ***0.80*** | ***0.90*** | ***0.95*** | ***0.98*** | ***0.99*** | ***0.995*** | ***0.999*** |
| ***1*** | 3.08 | 6.31 | 12.71 | 31.82 | 63.66 | 127.32 | 636.62 |
| ***2*** | 1.89 | 2.92 | 4.30 | 6.93 | 9.53 | 14.09 | 31.60 |
| ***3*** | 1.64 | 2.35 | 3.18 | 4.54 | 5.84 | 7.45 | 12.94 |
| ***4*** | 1.53 | 2.13 | 2.78 | 3.75 | 4.60 | 5.60 | 8.61 |
| ***5*** | 1.48 | 2.02 | 2.57 | 3.37 | 4.03 | 4.77 | 6.86 |
| ***6*** | 1.44 | 1.94 | 2.45 | 3.14 | 3.71 | 4.32 | 5.96 |
| ***7*** | 1.42 | 1.90 | 2.37 | 3.00 | 3.50 | 4.03 | 5.41 |
| ***8*** | 1.40 | 1.86 | 2.31 | 2.90 | 3.36 | 3.83 | 5.04 |
| ***9*** | 1.38 | 1.83 | 2.26 | 2.82 | 3.25 | 3.69 | 4.78 |
| ***10*** | 1.37 | 1.81 | 2.23 | 2.76 | 3.17 | 3.58 | 4.59 |
| ***11*** | 1.36 | 1.80 | 2.20 | 2.72 | 3.11 | 3.50 | 4.44 |
| ***12*** | 1.36 | 1.78 | 2.18 | 2.68 | 3.06 | 3.43 | 4.32 |
| ***13*** | 1.35 | 1.77 | 2.16 | 2.65 | 3.01 | 3.37 | 4.22 |
| ***14*** | 1.34 | 1.76 | 2.15 | 2.62 | 2.98 | 3.33 | 4.14 |
| ***15*** | 1.34 | 1.75 | 2.13 | 2.60 | 2.95 | 3.29 | 4.07 |
| ***16*** | 1.34 | 1.75 | 2.12 | 2.58 | 2.92 | 3.25 | 4.02 |
| ***17*** | 1.33 | 1.74 | *2.*11 | 2.57 | 2.90 | 3.22 | 3.97 |
| ***18*** | 1.33 | 1.73 | 2.10 | 2.55 | 2.88 | 3.20 | 3.92 |
| ***19*** | 1.33 | 1.73 | 2.09 | 2.54 | 2.86 | 3.17 | 3.88 |
| ***20*** | 1.33 | 1.73 | 2.09 | 2.53 | 2.85 | 3.15 | 3.85 |
| ***21*** | 1.32 | 1.72 | 2.08 | 2.52 | 2.83 | 3.14 | 3.82 |
| ***22*** | 1.32 | 1.72 | 2.07 | 2.51 | 2.82 | 3.12 | 3.79 |
| ***23*** | 1.32 | 1.71 | 2.07 | 2.50 | 2.81 | 3.10 | 3.77 |
| ***24*** | 1.32 | 1.71 | 2.06 | 2.49 | 2.80 | 3.09 | 3.75 |
| ***25*** | 1.32 | 1.71 | 2.06 | 2.48 | 2.79 | 3.08 | 3.73 |
| ***26*** | 1.32 | 1.71 | 2.06 | 2.48 | 2.78 | 3.07 | 3.71 |
| ***27*** | 1.31 | 1.70 | 2.05 | 2.47 | 2.77 | 3.06 | 3.69 |
| ***28*** | 1.31 | 1.70 | 2.04 | 2.46 | 2.76 | 3.05 | 3.67 |
| ***29*** | 1.31 | 1.70 | 2.04 | 2.46 | 2.76 | 3.04 | 3.66 |
| ***30*** | 1.31 | 1.70 | 2.04 | 2.46 | 2.75 | 3.03 | 3.65 |