МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Г. А. Новиков

ОСНОВЫ МЕТРОЛОГИИ

Учебное пособие

для студентов дневной и заочной форм обучения специальности 21020165
«Проектирование и технология радиоэлектронных средств»

Ульяновск
2010

УДК 006.91 (075)
ББК 30.10 я7
Н73

Рецензенты:

Ульяновский филиал ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН (директор, д.т.н., доцент В.А. Сергеев); к.т.н., доцент кафедры А и А и РЭО УВАУ ГА С.Н. Тарасов

Утверждено редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия

Новиков, Г.А.

Н73 Основы метрологии : учебное пособие / Г.А. Новиков.– Ульяновск : УлГТУ, 2010. – 182 с.

ISBN 978-5-9795-0619-7

В учебном пособии рассмотрены физические величины и единицы их измерения; представлены группы, методы, средства и погрешности измерений физических величин; дан порядок обработки результатов измерений физических величин. Пособие включает поясняющие примеры и приложения со справочными данными.

Пособие предназначено для студентов дневной и заочной форм обучения специальности 21020165 «Проектирование и технология радиоэлектронных средств», изучающих дисциплину «Метрология, стандартизация и технические измерения». Также оно может быть использовано студентами других радио- и электротехнических специальностей при изучении дисциплин, где требуются знания основ метрологии.

Печатается в авторской редакции.

УДК 006.91 (075)
ББК 30.10 я7

ISBN 978-5-9795-0619-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

АЦП – аналого-цифровой преобразователь

ГАП – границы абсолютных погрешностей
ГИС – гибкая измерительная система
ГКМВ – Генеральная конференция по мерам и весам
ГМС – Государственная метрологическая служба
ГНМЦ – Государственный научный метрологический центр
ГОСТ – Межгосударственный стандарт, ранее Государственный стандарт Союза ССР
Госреестр – Государственный реестр РФ
Госстандарт – Государственный комитет Российской Федерации по стандартизации и метрологии
ГСВЧ – Государственная служба времени и частоты и определения параметров вращения Земли
ГСИ – Государственная система обеспечения единства измерений
ГССО – Государственная служба стандартных образцов состава и свойств веществ и материалов
ГСССД – Государственная служба стандартных справочных данных о физических константах и свойствах веществ и материалов

ЕИ – единство измерений
ЕСЕ – естественные системы единиц

ИВК – измерительно-вычислительный комплекс
ИМ – измерительный механизм
ИП – измерительный преобразователь
ИПК – издательско-полиграфический комплекс
ИС – измерительная система
ИЦ – измерительная цепь

МБМВ – Международное Бюро Мер и Весов
МВИ – методика выполнения измерений или методика измерений
МГС – Межгосударственный совет
МИ – рекомендация
МКГСС – система единиц «метр, килограмм-сила (кгс), секунда»
МКС – система единиц «метр, килограмм, секунда»
МКСА – система единиц «метр, килограмм, секунда, ампер»
МКСК – система единиц «метр, килограмм, секунда, кельвин»
МКМВ – Международный комитет мер и весов
МНК – метод наименьших квадратов
МПТШ-68 – Международная практическая температурная шкала 1968 г.
МС – метрологическая служба

МТС – система единиц «метр, тонна, секунда»
МТШ-90 – Международная температурная шкала 1990 г.
МХ – метрологические характеристики

НСИ – нестандартизованное средство измерений
НСП – неисключенная систематическая погрешность
НТД – нормативно-техническая документация
НЭ – нормальный элемент

ОЕИ – обеспечение единства измерений

ПИП – первичный измерительный преобразователь
ПРШ – практически равномерная шкала
ПУ – показывающее устройство

РМГ – рекомендации по межгосударственной стандартизации
Ростехрегулирование – Федеральные агентство по техническому регулированию и метрологии, бывший Госстандарт
РУ – регистрирующее устройство

СГС – система единиц «сантиметр, грамм, секунда»
СГСЛ – система единиц «сантиметр, грамм, секунда, люмен»
СГСМ – абсолютная электромагнитная система единиц
СГСР – система единиц «сантиметр, грамм, секунда, рентген»
СГС°С – система единиц «сантиметр, грамм, секунда, градус Цельсия»
СГСЭ – абсолютная электростатическая система единиц
СИ – средство измерений
СКО – среднее квадратическое отклонение
СНШ – существенно неравномерная шкала
СО – стандартный образец
СШ – степенная шкала

ТЭДС – термоэлектродвижущие силы

ФВ – физическая величина

ЦАП – цифро-аналоговые преобразователь

lb – английский фунт
LMT – система величин «длина L, масса M, время T»
LFT – система величин «длина L, сила F, время T»
LMTIΘNJ – система величин «длина L, масса M, время T, сила электрического тока I, температура Θ, количество вещества N, сила света J»
SI – Международная система единиц

ВВЕДЕНИЕ

Прогресс науки и техники, производство, повседневная деятельность человека связаны с проведением различных измерений физических величин. Научной основой измерений физических величин является метрология. Основоположник российской метрологии – великий русский ученый Д.И. Менделеев.

Метрология – наука об измерениях, методах и средствах обеспечения их единства и способах достижения требуемой точности. В метрологии, как и в любой науке, недопустимо произвольное толкование применяемых терминов. Терминология в области метрологии регламентируется РМГ 29–99. Метрология включает следующие разделы:

- теоретическая (фундаментальная) метрология,
- законодательная метрология,
- практическая (прикладная) метрология.

Теоретическая метрология – раздел метрологии, предметом которого является разработка фундаментальных основ метрологии.

Законодательная метрология – раздел метрологии, предметом которого является установление обязательных технических и юридических требований по применению единиц физических величин, эталонов, методов и средств измерений, направленных на обеспечение единства и необходимости точности измерений в интересах общества.

Практическая метрология – раздел метрологии, предметом которого являются вопросы практического применения разработок теоретической метрологии и положений законодательной метрологии.

Основная задача метрологии – обеспечение единства измерений. Правовые основы обеспечения единства измерений в Российской Федерации установлены принятым в 2008 г. Федеральным законом РФ от 26 июня 2008 г. № 102 «Об обеспечении единства измерений». Обеспечение единства измерений осуществляется метрологическими службами.

Единство измерений (ЕИ) – состояние измерений, характеризующееся тем, что их результаты выражаются в узаконенных единицах, размеры которых в установленных пределах равны размерам единиц, воспроизводимых первичными эталонами, а погрешности результатов измерений известны и с заданной вероятностью не выходят за установленные пределы.

Обеспечение единства измерений (ОЕИ) – деятельность метрологических служб, направленная на достижение и поддержание единства измерений в соответствии с законодательными актами, а также правилами и нормами, установленными государственными стандартами и другими нормативными документами по обеспечению единства измерений. Для ОЕИ в нашей стране создана нормативная база – Государственная система обеспечения единства измерений.

Государственная система обеспечения единства измерений (ГСИ) – комплекс нормативных документов межрегионального и межотраслевого уровней, устанавливающих правила, нормы, требования, направленные на достижение и поддержание единства измерений в стране (при требуемой точности), утверждаемых Федеральным агентством по техническому регулированию и метрологии (Ростехрегулирование, бывший Госстандарт). Ростехрегулирование находится в ведении Министерства промышленности и торговли РФ. В ГСИ выделяются основополагающие стандарты, устанавливающие общие требования, правила и нормы, а также стандарты, охватывающие какую-либо область или вид измерений. Технической основой ГСИ является эталонная база (набор эталонов) РФ.

Метрологическая служба (МС) – служба, создаваемая в соответствии с законодательством для выполнения работ по обеспечению единства измерений и для осуществления метрологического контроля и надзора. Различают следующие метрологические службы:

- Государственная метрологическая служба,
- метрологические службы государственных органов управления,
- метрологические службы юридических лиц.

- государственные службы обеспечения единства измерений, которые осуществляют межрегиональную и межотраслевую координацию работ по ОЕИ в закрепленных видах деятельности.

К последним из перечисленных метрологических служб относятся:

- Государственная служба времени и частоты и определения параметров вращения Земли (ГСВЧ),
- Государственная служба стандартных образцов состава и свойств веществ и материалов (ГССО),
- Государственная служба стандартных справочных данных о физических константах и свойствах веществ и материалов (ГСССД).

Руководство Государственной метрологической службой, ГСВЧ, ГССО и ГСССД осуществляет Ростехрегулирование.

Государственная метрологическая служба (ГМС) – метрологическая служба, выполняющая работы по обеспечению единства измерений в стране на межрегиональном и межотраслевом уровне и осуществляющая государственный метрологический контроль и надзор. ГМС включает:

- государственные научные метрологические центры,
- метрологические научно-исследовательские институты,
- органы ГМС на территориях субъектов РФ (Центры стандартизации, метрологии и сертификации).

Метрологическая служба государственного органа управления – метрологическая служба, выполняющая работы по обеспечению единства измерений и осуществляющая метрологический надзор и контроль в пределах данного министерства (ведомства). Ранее такая МС называлась *ведомственной метрологической службой*.

Метрологическая служба юридического лица – метрологическая служба, выполняющая работы по обеспечению единства измерений и осуществляющая метрологический контроль и надзор на данном предприятии (в организации). Ранее такая МС называлась *метрологической службой предприятия (организации)*.

Рассмотрим более подробно ГМС.

Государственный научный метрологический центр (ГНМЦ) – метрологический научно-исследовательский институт (как центр государственных эталонов), несущий в соответствии с законодательством страны ответственность за создание, хранение и применение государственных эталонов, разработку нормативных документов по обеспечению единства измерений в закрепленном виде измерений.

Орган ГМС – структурное подразделение Ростехрегулирования страны, осуществляющее государственный метрологический контроль и надзор на закрепленной территории. Органы ГМС известны также как *территориальные органы Ростехрегулирования страны.*

Государственный метрологический контроль и надзор осуществляет Ростехрегулирование.

Государственный метрологический контроль – деятельность, осуществляемая ГМС по утверждению типа средств измерений, поверке средств измерений (включая рабочие эталоны), по лицензированию деятельности юридических и физических лиц по изготовлению, ремонту, продаже и прокату средств измерений. *Лицензия на изготовление (ремонт, продажу, прокат) средств измерений* представляет собой документ, удостоверяющий право заниматься указанными видами деятельности и выдаваемый органом ГМС.

Государственный метрологический надзор – деятельность, осуществляемая органами ГМС по надзору за выпуском, состоянием и применением средств измерений (включая рабочие эталоны), за аттестованными методиками измерений, соблюдением метрологических правил и норм, за количеством товаров при продаже, а также за количеством фасованных товаров в упаковках любого вида при их расфасовке и продаже.

Утверждение типа средств измерений – решение (уполномоченного на это государственного органа управления) о признании типа средств измерений узаконенным для применения на основании результатов их испытаний ГНМЦ или другой специализированной организацией, аккредитованной Ростехрегулированием страны. Решение об утверждении типа принимается Ростехрегулированием страны и удостоверяется выдачей *сертификата об утверждении типа средств измерений*. Соответствие средств измерений утвержденному типу контролируют органы ГМС по месту расположения изготовителей или пользователей этих средств.

Поверка средств измерений – установление органом ГМС (или другим официально уполномоченным органом, организацией) пригодности средства измерений к применению на основании экспериментально определяемых метрологических характеристик и подтверждения их соответствия установленным обязательным требованиям.

При поверке используют эталон. Поверку проводят в соответствии с обязательными требованиями, установленными нормативными документами по поверке. Поверку проводят специально обученные специалисты, аттестованные в качестве поверителей органами ГМС. Результаты поверки средств измерений, признанных годными к применению, оформляют выдачей *свидетельства о поверке*, нанесением *поверительного клейма* или иными способами, установленными нормативными документами по поверке.

Данное учебное пособие охватывает следующие обязательные разделы дисциплины «Метрология, стандартизация и технические измерения»: задачи метрологии; теоретические основы метрологии; понятие погрешности, источники погрешностей; классификация погрешностей; алгоритмы обработки измерений; общие сведения о методах и средствах измерений; статистическая обработка экспериментальных данных.

Пособие включает четыре главы и приложения со справочными данными. Для удобства после содержания приведен список используемых сокращений.

Глава 1 посвящена физическим величинам и единицам их измерения. В ней рассмотрены физические величины, их системы и размерности, основные системы единиц физических величин и шкалы измерений.

Глава 2 содержит описание различных групп, методов и средств измерений. В ней представлена обобщенная структурная схема средств измерений и указано назначение структурных элементов. Здесь также приводится классификация измерительных приборов и преобразователей, даются перечень и определения основных метрологических характеристик средств измерений.

Глава 3 включает подробный обзор различных групп погрешностей измерений. В ней рассмотрены классы точности средств измерений и обозначения классов точности. Здесь также представлены сведения о систематических погрешностях измерений, способах их уменьшения и учета, дается справочная информация о случайных величинах, поясняется использование характеристик случайных величин для количественного описания погрешностей измерений.

Глава 4 посвящена статистической обработке результатов измерений физических величин. В ней рассмотрены задачи математической статистики, проверка гипотез, точечные и доверительные оценки, представлены оценка погрешностей измерений и их характеристики. Здесь также указаны последовательности шагов обработки результатов прямых и косвенных измерений, поясняется метод наименьших квадратов.

Определения большинства метрологических терминов сложны и громоздки. Поэтому в пособии приведено большое количество поясняющих примеров, вдумчивое рассмотрение которых является необходимым условием успешного усвоения материала.

Внимательный читатель может заметить, что в тексте часто встречаются повторения. Это не есть результат небрежности автора, а является специальным приемом, облегчающим изучение материала пособия.

ГЛАВА 1. ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ И ЕДИНИЦЫ ИХ ИЗМЕРЕНИЯ

1.1. Физические величины

Для описания свойств окружающих нас тел и явлений вводятся физические величины.

Физическая величина (ФВ) – одно из свойств физического объекта (физической системы, явления или процесса), общее в качественном отношении для многих физических объектов, но в количественном отношении индивидуальное для каждого из них.

Качественная определенность ФВ называется *родом* ФВ. Соответственно, физические величины одного рода называются *однородными*, разного рода – *неоднородными*. Так, длина и диаметр детали – однородные величины, длина и масса детали – неоднородные величины.

Количественно ФВ характеризуется размером, который выражается ее значением.

Размер ФВ – количественная определенность ФВ, присущая конкретному материальному объекту, системе, явлению или процессу. Чтобы оценить значение размера ФВ, необходимо его выразить понятным и удобным образом. Поэтому размер данной ФВ сравнивают с некоторым размером однородной с ней ФВ, принятым за единицу, т.е. вводят единицу измерения данной ФВ.

Единица измерения ФВ – ФВ фиксированного размера, которой условно присвоено числовое значение, равное 1, и применяемая для количественного выражения однородных с ней физических величин. Введение единицы измерения данной ФВ позволяет определить ее значение.

Значение ФВ – выражение размера физической величины в виде некоторого числа принятых для нее единиц. Значение ФВ включает числовое значение ФВ и единицу измерения.

Числовое значение ФВ – отвлеченное число, которое равно отношению размера данной ФВ к единице ее измерения. Поэтому при записи значения ФВ предполагается, что числовое значение умножается на соответствующую единицу измерения. Чтобы найти значение ФВ, необходимо провести измерение данной ФВ.

При измерении ФВ находятся значения ФВ опытным путем с помощью специальных технические средств (средств измерений). Соответственно, ФВ, подлежащая измерению, измеряемая или измеренная в соответствии с основной целью измерительной задачи, называется *измеряемой* ФВ. Независимо от применяемого способа всякое измерение любой ФВ сводится к экспериментальному определению отношения размера данной ФВ к единице ее измерения. Данное отношение является числовым значением ФВ.

Пример 1.1. С помощью метровой и дюймовой линеек измерена длина бруска l. Она оказалась равной: l = 2,54 м = 254 см = 100 дюймов. В данном случае измеряемая ФВ – длина. Размер длины – кратчайшее расстояние между концами бруска. Значение длины равно 2,54 м, 254 см и 100 дюймов, единицы измерения – метр, сантиметр и дюйм, соответственно. Числовое значение длины в метрах – 2,54, в сантиметрах – 254, в дюймах – 100.

При выполнении измерений возникает вопрос: как соотносится результат измерения ФВ с тем, каково на самом деле ее значение? Поэтому для оценки качества проведенных измерений вводятся понятия истинного и действительного значений ФВ.

Истинное значение ФВ – значение ФВ, которое идеальным образом характеризует в качественном и количественном отношении соответствующую ФВ. Истинное значение ФВ практически недостижимо. Оно может быть получено только в результате бесконечного процесса измерений с бесконечным совершенствованием методов и средств измерений. Иными словами истинное значение ФВ – это то недостижимое идеальное значение, которое стремятся получить при проведении измерений.

Действительное значение ФВ – значение ФВ, полученное экспериментальным путем и настолько близкое к истинному значению, что в поставленной измерительной задаче может быть использовано вместо него.

Пример 1.2. При многократных измерениях за действительное значение принимают среднеарифметическое результатов отдельных наблюдений.

Для измерения одной и той же ФВ могут применяться несколько различных единиц измерения. Поэтому необходимо уметь переходить от одних единиц к другим. Если заданный размер ФВ с помощью единицы α_1 выражается числовым значением A_1, а с помощью единицы α_2 – числовым значением A_2, то

$$A_1\alpha_1 = A_2\alpha_2 \quad \text{или} \quad A_1/A_2 = \alpha_2/\alpha_1 . \tag{1.1}$$

Таким образом, согласно (1.1) числовое значение ФВ и ее единица находятся в обратном отношении, т.е. *во сколько раз крупнее единица данной ФВ, во столько раз меньше числовое значение, которым заданный размер ФВ выражается*. В рассмотренном выше Примере 1.1 измерения длины бруска самая крупная единица – метр, самая мелкая – сантиметр, средняя – дюйм. Соответственно, самое большое числовое значение выражается в сантиметрах, самое малое – в метрах, среднее – в дюймах.

Измерение той или иной ФВ всегда сопровождается необходимостью учета значений физических величин, которые в данной измерительной задаче не измеряются. К таким физическим величинам относятся физические параметры и влияющие величины.

Физический параметр – ФВ, рассматриваемая при измерении данной ФВ как вспомогательная.

Пример 1.3. При измерении электрического напряжения в цепи переменного тока частоту силы тока рассматривают как параметр напряжения.

Замечание. При оценивании качества продукции нередко применяют выражение *измеряемые параметры*. В данном случае под параметрами, как правило, подразумевают физические величины, наилучшим образом отражающие качество изделий или процессов.

Влияющая ФВ – ФВ, оказывающая влияние на размер измеряемой величины и (или) результат измерений.

Пример 1.4. При измерении электрического напряжения с помощью вольтметра влияющими физическими величинами являются температура окружающей среды, влажность и атмосферное давление.

1.2. Система физических величин

Единицу измерения ФВ можно определить произвольно, причем ранее большинство единиц физических величин устанавливались, как правило, совершенно независимо друг от друга. В результате применялось большое число разнообразных единиц, что вызывало затруднения в хозяйственной и научной деятельности.

Чтобы упорядочить всю совокупность используемых единиц физических величин, необходимо систематизировать применяемые физические величины, т.е. создать систему физических величин. Затем на базе системы физических величин строится система единиц физических величин.

Система физических величин создается на основе законов и определений, которыми связаны между собой измеряемые величины. При этом выбираются несколько основных величин, из которых строятся производные величины.

Система физических величин – совокупность физических величин, образованная в соответствии с принятыми принципами, когда одни величины принимают за независимые, а другие определяют как функции независимых величин.

Основная ФВ – ФВ, входящая в систему величин и условно принятая в качестве независимой от других величин этой системы.

Производная ФВ – ФВ, входящая в систему величин и определяемая через основные величины этой системы.

В названии и обозначении системы величин применяют обобщенные символы величин, принятых за основные.

Пример 1.5. Система величин, в которой в качестве основных величин приняты длина L, масса M и время T, является системой LMT.

Система величин, в которой в качестве основных величин приняты длина L, сила F и время T, является системой LFT.

Система величин, в которой в качестве основных величин приняты длина L, масса M, время T, сила электрического тока I, температура Θ, количество вещества N и сила света J, является системой LMTIΘNJ. На базе системы LMTIΘNJ строится Международная система единиц (SI).

Связь между различными физическими величинами выражается уравнениями связи. Различают два вида таких уравнений: уравнения связи между величинами и уравнения связи между числовыми значениями.

Уравнение связи между величинами – уравнение, отражающее связь между величинами, обусловленную законами природы, в котором под буквенными символами понимают соответствующие физические величины. Такие уравнения представляют собой соотношения в общем виде, который не зависит от единиц измерения. Уравнение связи между величинами в конкретной измерительной задаче часто называют *уравнением измерений*.

Уравнение связи между числовыми значениями – уравнение, отражающее связь между величинами, обусловленную законами природы, в котором под буквенными символами понимают значения соответствующих физических величин.

Пример 1.6. Единицы длины и площади можно выбрать совершенно независимо друг от друга. Однако существует зависимость между размером площади геометрической фигуры и ее линейными размерами, которая позволяет связать единицы площади с единицами длины, т.е. сделать единицу площади производной от единицы длины, а последнюю считать основной. Данная зависимость устанавливается теоремой: *отношение площадей геометрически подобных фигур равно второй степени отношения их соответственных линейных размеров*. Если S_1 и S_2 – площади геометрически подобных фигур 1 и 2, l_1 и l_2 – их соответственные линейные размеры, то

$$S_1/S_2 = (l_1/l_2)^2. \qquad (1.2)$$

Формула (1.2) является уравнением связи между величинами, поскольку вид соотношения не зависит от выбора единиц площади и длины.

Если символы, входящие в формулу (1.2), считать значениями физических величин, то ее можно представить в виде

$$S_1/l_1^2 = S_2/l_2^2 \,. \tag{1.3}$$

Таким образом, для геометрически подобных фигур отношение числа, выражающего площадь фигуры, ко второй степени числа, выражающего соответствующий линейный размер фигуры, есть величина постоянная. Обозначая эту постоянную через K, получим

$$S = Kl^2, \tag{1.4}$$

где коэффициент K зависит от формы измеряемой геометрической фигуры и от выбора единиц длины и площади. Формула (1.4) является уравнением связи между числовыми значениями, которая позволяет связать единицы длины и площади.

Отметим, что основные величины не имеют каких-то принципиальных преимуществ перед производными величинами. Величины, которые при одном выборе приняты за основные, при другом выборе могут быть производными, и наоборот. Установленные производные величины могут быть далее использованы для введения новых производных величин. Поэтому в уравнения связи наряду с основными величинами могут входить и производные величины, установленные ранее.

1.3. Система единиц физических величин

Как уже упоминалось, на базе системы физических величин строится система единиц физических величин.

Система единиц физических величин – совокупность основных и производных единиц физических величин, образованная в соответствии с принципами для заданной системы физических величин.

Пример 1.7. Международная система единиц SI, принятая в 1960 г. XI Генеральной конференции по мерам и весам (ГКМВ) и уточненная на последующих ГКМВ.

Основная единица системы единиц физических величин – единица основной ФВ в данной системе единиц.

<u>Пример 1.8.</u> Основные единицы SI: метр (м), килограмм (кг), секунда (с), ампер (А), кельвин (К), моль (моль) и кандела (кд).

Производная единица системы единиц физических величин – единица производной ФВ системы единиц, образованная в соответствии с уравнением, связывающим ее с основными единицами или с основными и уже определенными производными.

Для установления размера производных единиц используются уравнения связи между числовыми значениями, которые в этом случае называются также *определяющими уравнениями*.

<u>Пример 1.9.</u> Определим с помощью (1.4) производную единицу площади, полагая, что основной единицей является единица длины метр. В качестве единицы площади нужно принять площадь определенной фигуры. Как правило, за единицу площади принимают площадь квадрата, сторона которого равна метру. Эта единица площади называется «квадратный метр» (кв. м). Полагая в (1.4) $l = 1$ м, получим

$$1 \text{ кв. м} = K(1 \text{ м})^2, \quad (1.5)$$

откуда

$$K = 1 \text{ кв. м/м}^2. \quad (1.6)$$

Тогда формулу (1.4) можно представить в виде

$$S[\text{кв. м}] = 1 \text{ кв. м/м}^2 \, (l[\text{м}])^2. \quad (1.7)$$

При тех же выбранных единицах длины и площади для круга получим (l – длина диаметра круга)

$$S[\text{кв. м}] = \pi/4 \text{ кв. м/м}^2 \, (l[\text{м}])^2. \quad (1.8)$$

В этом случае

$$K = \pi/4 \text{ кв. м/м}^2. \quad (1.9)$$

Обычно при записи формул обозначение коэффициентов пропорциональности опускается, так что формулы (1.7) и (1.8) приобретают вид

$$S = l^2 \quad (1.10)$$

для квадрата и

$$S = \pi/4 l^2 \quad (1.11)$$

для круга.

Установим единицы скорости и ускорения, полагая в качестве основных единиц единицы длины и времени – метр и секунду. Воспользуемся определением скорости равномерного движения тела

$$\mathrm{v} = K\Delta l/\Delta t\,, \tag{1.12}$$

где, как и в (1.4), K – коэффициент, зависящий от выбора единиц длины, времени и скорости, Δl – длина пути, пройденного телом за промежуток времени Δt. Полагая коэффициент K равным единице, единица скорости – метр в секунду – определяется как скорость такого равномерного движения, при котором тело за одну секунду проходит путь, равный одному метру. Тогда

$$K = 1\ (\text{м/с})\cdot\text{с/м} \quad \text{и} \quad \mathrm{v} = \Delta l/\Delta t\,. \tag{1.13}$$

Единица ускорения может быть установлена с помощью формулы, определяющей ускорение равноускоренного прямолинейного движения тела

$$a = K\,\Delta\mathrm{v}/\Delta t\,, \tag{1.14}$$

где $\Delta\mathrm{v}$ – приращение скорости тела за время промежуток времени Δt. Полагая $K = 1$, получим единицу ускорения – метр на секунду в квадрате – как ускорение такого прямолинейного равноускоренного движения, при котором за одну секунду скорость возрастает на один метр в секунду. В этом случае

$$K = 1\ (\text{м/с}^2)\cdot\text{с}^2/\text{м} \quad \text{и} \quad a = \Delta\mathrm{v}/\Delta t\,. \tag{1.15}$$

Итак, для установления производной единицы необходимо

1) выбрать основные величины,
2) установить размер основных единиц,
3) выбрать определяющее уравнение, связывающее величины, измеряемые основными единицами, с величиной, для которой устанавливается данная производная единица,
4) приравнять единице (или другому постоянному числу) коэффициент пропорциональности, входящий в определяющее уравнение.

Наименование и обозначение производной единицы строится путем группирования по обычным алгебраическим правилам единиц, на которых основано ее определение.

Пример 1.10. Единица площади: наименование – квадратный метр, обозначение – м^2. Единица скорости: наименование – метр в секунду, обозначение – м/с.

Некоторым производным единицам присвоены собственные наименования и обозначения.

Пример 1.11. Единица силы – ньютон (Н). Единица давления – паскаль (Па). Наименование и обозначение таких производных единиц наряду с наименованием и обозначением производных единиц могут входить в наименование и обозначение какой-либо производной единицы. Так, единица момента силы – ньютон-метр (Н·м), единица градиента давления – Па/м.

По отношению к выбранной системе единиц физических величин единицы величин подразделяются на системные и внесистемные единицы.

Системная единица ФВ – единица ФВ, входящая в принятую систему единиц. Основные, производные, кратные и дольные единицы SI являются системными.

Пример 1.12. 1 м, 1 м/с, 1 км, 1 нм – системные единицы SI.

Внесистемная единица ФВ – единица ФВ, не входящая в принятую систему единиц. Внесистемные единицы по отношению к единицам SI подразделяются на четыре группы:

1 – допускаемые наравне с единицами SI;

2 – допускаемые к применению в специальных областях;

3 – временно допускаемые;

4 – устаревшие (недопускаемые).

Пример 1.13. 1 дюйм, 1 миля, 1 кВт·ч – внесистемные единицы SI.

Многие из внесистемных единиц используются ввиду удобства их применения, другие сохранились в силу исторических традиций.

В общем случае внесистемные единицы подразделяются на три группы. К первой группе относятся десятичные кратные и дольные единицы. Наименования этих единиц образуется с помощью соответствующих приставок, перечень и обозначения которых для системы SI представлены в Приложении А.

Вторую группу образуют внесистемные единицы, построенные из основных единиц системы не по десятичному принципу. К ним относятся единицы времени минута, час.

Третью группу образуют внесистемные единицы, не связанные с какой-либо системой единиц. К ним относятся все устаревшие национальные единицы: русские аршин, сажень, золотник, пуд; английские дюйм, фут, ярд, фунт и т.п. Часть из этих единиц используются и в настоящее время: дюйм, миля, карат и др.

Когерентная производная единица ФВ – производная единица ФВ, связанная с другими единицами системы единиц определяющим уравнением, в котором числовой коэффициент принят равным 1.

Пример 1.14. Производные единицы площади, скорости и ускорения, установленные выше с помощью определяющих уравнений (1.10), (1.13) и (1.15), являются когерентными.

Когерентная система единиц физических величин – система единиц физических величин, состоящая из основных единиц и когерентных производных единиц. Кратные и дольные единицы от системных единиц не входят в когерентную систему.

Пример 1.15. Когерентными системами единиц физических величин являются SI, СГС (основные единицы – сантиметр, грамм, секунда), МТС (метр, тонна, секунда), МКГСС (метр, килограмм-сила (кгс), секунда).

Кратная единица ФВ – единица ФВ, в целое число раз большая системной или внесистемной единицы.

Пример 1.16. Единица длины 1 км = 10^3 м, т.е. кратная метру; единица частоты 1 МГц (мегагерц) = 10^6 Гц, кратная герцу.

Дольная единица ФВ – единица ФВ, в целое число раз меньшая системной или внесистемной единицы.

Пример 1.17. Единица длины 1 нм (нанометр) = 10^{-9} м и единица времени 1 мкс = 10^{-6} с являются дольными соответственно от метра и секунды.

На практике широко применяется понятие узаконенные единицы.

Узаконенные единицы – система единиц и (или) отдельные единицы, установленные для применения в стране в соответствии с законодательными актами. В России узаконенными единицами являются единицы SI.

1.4. Построение систем единиц физических величин

Для построения системы единиц следует выбрать несколько основных единиц и установить с помощью определяющих уравнений (уравнений связи между числовыми значениями) производные единицы всех остальных интересующих нас величин. Определяющие уравнения подразделяются на законы и определения. Такое деление уравнений не является абсолютным и зависит от подхода к данному конкретному вопросу. Законы выражают обнаруженную экспериментально или теоретически связь между исследуемыми величинами.

С помощью определений вводятся новые величины. К первому типу определяющих уравнений относятся закон всемирного тяготения, закон Кулона о взаимодействии электрических зарядов. Выражения для скорости (1.13) и ускорения (1.15) являются определениями.

При построении системы единиц возникает вопрос о свободе выбора основных единиц, определяющих уравнений и коэффициентов пропорциональности.

Размеры основных единиц могут быть выбраны произвольно. Действительно, существуют системы единиц, в которых основными единицами длины являются метр или сантиметр, основными единицами массы – килограмм или грамм.

Полная свобода существует и в выборе коэффициентов пропорциональности в определяющих уравнениях.

Пример 1.18. При рассмотрении зависимости площади геометрической фигуры от ее линейного размеры мы в качестве единицы площади приняли квадратный метр – площадь квадрата со стороной, равной метру. Такой способ установления производной единицы площади является удобным, но необязательным. Можно за единицу площади принять площадь круга, диаметр которого равен одному метру, и назвать ее «круглый метр» (кр. м). Тогда коэффициенты пропорциональности в формулах (1.7) и (1.8) изменятся и станут равными

$$K = 4/\pi \text{ кр. м/м}^2 \tag{1.16}$$

для квадрата и

$$K = 1 \text{ кр. м/м}^2. \tag{1.17}$$

для круга. Соответственно, формулы для площадей квадрата и круга примут вид

$$S = 4/\pi\, l^2 \tag{1.18}$$

для квадрата и

$$S = l^2 \tag{1.19}$$

для круга.

Причем независимо от того как определена производная единица площади (квадратный или круглый метр), ее обозначение будет м^2. Таким образом, обозначение производной единицы, включающее в себя обозначения основных единиц, не несет информации о размере этой производной единицы.

Возможность выбора существует также и при использовании различных определяющих уравнений для установления производной единицы.

Пример 1.19. Производную единицу силы можно установить, используя 2-й закон Ньютона: ускорение тела a, движущегося под действием силы F, прямо пропорционально силе и обратно пропорционально массе m тела. Поэтому определяющее уравнение имеет вид

$$F = K_i m a, \tag{1.20}$$

где K_i – инерционная постоянная. Во всех применяемых на практике системах единиц коэффициент пропорциональности K_i полагают равным единице. Если единицы длины, времени и массы являются метр, секунда и килограмм, соответственно, а за производную единицей силы принимается ньютон, то

$$K_i = 1 \text{ Н}\cdot\text{с}^2/(\text{кг}\cdot\text{м}) \tag{1.21}$$

и выражение 2-го закона Ньютона принимает привычный вид

$$F = ma. \tag{1.22}$$

Согласно закону всемирного тяготения любые две материальные точки притягиваются друг к другу с силой F, прямо пропорциональной массам m_1 и m_2 этих точек и обратно пропорциональной квадрату расстояния r между ними, т.е.

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}. \qquad (1.23)$$

где G – гравитационная постоянная, числовое значение которой зависит от выбора единиц. Опыт показал, что если в качестве основных единиц принять метр, секунду и килограмм, а производную единицу силы (ньютон) определить из 2-го закона Ньютона, то гравитационная постоянная оказывается равной

$$G = 6{,}67\cdot10^{-11}\ \text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{кг}^2. \qquad (1.24)$$

Однако при тех же основных единицах (метр, секунда и килограмм) можно в качестве определяющего уравнения выбрать закон всемирного тяготения (1.23), положить G, равную единице, и установить гравитационную единицу силы (грав. ед. силы). Тогда гравитационная постоянная

$$G = 1\ \text{грав. ед. силы}\cdot\text{м}^2/\text{кг}^2. \qquad (1.25)$$

В этом случае, необходимо в выражении 2-го закона Ньютона (1.20) сохранить инерционную постоянную, отличную от единицы:

$$K_i = 1{,}5\cdot10^{10}\ \text{грав. ед. силы с}^2/(\text{кг}\cdot\text{м}), \qquad (1.26)$$

так что

$$1\ \text{грав. ед. силы} = 6{,}67\cdot10^{-11}\ \text{Н}. \qquad (1.27)$$

Таким образом, в выборе размера основных единиц, определяющих уравнений и числовых коэффициентов в определяющих уравнениях не существует жестких ограничений. Главный вопрос – это вопрос о количестве основных единиц.

Единицы физических величин представляют собой вспомогательный аппарат для изучения окружающего нас мира. Законы природы никак не изменят своего объективного характера при замене одних единиц другими. Поэтому основное требование, которое предъявляется к системе единиц, заключается в том, что система должна быть как можно более удобной для практических целей. В этом отношении число основных единиц не может быть произвольным. Здесь нужно иметь в виду следующее.

Число основных единиц тесно связано с числом коэффициентов пропорциональности, стоящих в определяющих уравнениях. Числовые значения данных коэффициентов пропорциональности зависят от выбора основных единиц. Подходящим подбором основных единиц можно приравнять коэффициенты пропорциональности к каким-либо постоянным числам (чаще всего единице). Но коэффициенты пропорциональности фигурируют и в выражениях, которые не используются в качестве определяющих уравнений.

Пример 1.20. Если для установления производной единицы силы используется в качестве определяющего уравнения 2-й закон Ньютона (1.22) и инерционная постоянная полагается равной единице, то в выражении закона всемирного тяготения (1.23) фигурирует гравитационная постоянная (см. (1.24)).

Особенностью коэффициентов пропорциональности, подобных гравитационной постоянной, состоит в том, что их числовые значения зависят не только от выбора основных единиц и определяющих уравнений, но и от размера основных единиц (см. п. 1.5). Такие коэффициенты пропорциональности называются *фундаментальными или мировыми постоянными*. Значения некоторых фундаментальных постоянных представлены в Приложении Б.

Чем больше основных единиц принято, тем больше фундаментальных постоянных будет стоять в формулах, выражающих закономерности между физическими величинами. Использование большого числа фундаментальных постоянных в формулах затрудняет запоминание выражений и удлиняет вычисления. Кроме того, потребовалась бы огромная работа по установлению эталонов всех основных единиц. С другой стороны, слишком малое число основных единиц ограничивает возможности построения производных единиц, так что многие из последних неизбежно оказываются либо слишком крупными, либо слишком мелкими, а потому неудобными для практики.

Отсюда, целесообразно строить системы единиц, пригодные для различных областей науки и техники, в которых число основных единиц составляет пять-семь. К таким системам единиц относятся Международная система единиц SI и с некоторыми дополнениями СГС.

Следующий вопрос, возникающий при построении системы единиц, – какие именно нужно выбрать величины, единицы которых принимаются за основные? В универсальной системе единиц, которая пригодна для различных измерений в науке и технике, величины, единицы которых принимаются за основные, должны отражать наиболее общие свойства материи. Число основных единиц такой системы достигло в настоящее время семи – это единицы длины, массы, времени, температуры, силы тока, силы света и количества вещества.

Выбрав основные единицы, нужно определиться с их размерами.

Размер единицы ФВ – количественная определенность единицы ФВ, воспроизводимой или хранимой средством измерений.

Пример 1.21. В Приложении В представлены определения основных единиц SI.

Основные единицы устанавливаются двумя способами: по прототипам и по измерению естественных величин. Первый способ основан на установлении единицы с помощью некоторого тела (гиря, линейка). Такими узаконенными образцами при введении метрической системы мер были прототипы килограммы и метра. Прототип килограмма сохранился и до нашего времени. Второй способ предполагает проведение некоторой процедуры измерения. Для ее осуществления необходимо использовать сложную аппаратуру, совершенство которой в конечном счете определяет точность установления единицы. Вторым способом устанавливается единица времени секунда.

Для практических измерений обычно создаются эталоны, обеспечивающие воспроизведение единиц, основных и производных, с наивысшей возможной точностью. При этом эталоны основной единицы не обязательно являются мерой самой единицы, а могут определять значения других величин, по которым возможно вычисление основной единицы.

Пример 1.22. Для определения единицы силы тока в качестве эталонов изготовляются стандартные гальванические элементы и резисторы, а сила тока определяется по закону Ома.

Размер единицы, хранимой подчиненными эталонами или рабочими средствами измерений (см. п. 2.3), может быть установлен по отношению к национальному первичному эталону. При этом может быть несколько ступеней сравнения (через вторичные и рабочие эталоны).

Отметим, что некоторые основные единицы оказываются связанными с другими единицами, а потому не являются самостоятельными.

<u>Пример 1.23.</u> Для современного определения метра нужна единица времени секунда, для определения ампера – единица силы.

Поэтому для обеспечения точности и воспроизводимости измерений, можно считать основными одни величины, а при построении систем единиц – другие.

1.5. Размерности физических величин

Наличие различных систем ставит задачу перевода одних единиц в другие. Всякое изменение основных единиц изменяет соответственно производную единицу. Поэтому необходимо найти такое соотношение, которое позволяло бы определить зависимость производной единицы от изменения основных единиц. Для этого было введено понятие «размерность», согласно которому если при изменении основной единицы в n раз производная единица изменяется в n^p раз, то производная единица обладает размерностью p по отношению к соответствующей основной единице.

Пусть единицы длины, массы и времени являются основными. Если производная единица величины A изменяется пропорционально степени p изменения единицы длины, пропорционально степени q изменения единицы массы и степени r изменения единицы времени, то единица величины A обладает размерностью p относительно единицы длины, размерностью q относительно единицы массы и размерностью r относительно единицы времени. Символически данная зависимость записывается в виде

$$\dim A = \mathrm{L}^p \mathrm{M}^q \mathrm{T}^r, \tag{1.28}$$

где знак dim (dimension – размер) перед символом ФВ означает размерность единицы величины A относительно единиц длины, массы и времени, а символы L, M и T представляют обобщенные единицы этих величин, без указания конкретного размера единиц. Размерность единицы ФВ обозначается также квадратными скобками, в которые заключен символ величины, т.е. в (1.28) вместо dim$A$ можно использовать [A].

При образовании размерностей производных единиц используются уравнения связи между числовыми значениями и следующие три теоремы.

1. Если числовое значение величины C равно произведению числовых значений величин A и B, то размерность единицы C равна произведению размерностей A и B:

$$\dim C = \dim A \cdot \dim B. \tag{1.29}$$

2. Если числовое значение величины C равно отношению числовых значений величин A и B, то размерность единицы C равна отношению размерностей A и B:

$$\dim C = \dim A / \dim B. \tag{1.30}$$

3. Если числовое значение величины C равно степени n числового значения величины A, то размерность единицы C равна степени n размерности A:

$$\dim C = \dim A^n = (\dim A)^n. \tag{1.31}$$

Иными словами, если

$$\dim A = \mathrm{L}^p \mathrm{M}^q \mathrm{T}^r \quad \text{и} \quad \dim B = \mathrm{L}^l \mathrm{M}^m \mathrm{T}^t, \tag{1.32}$$

то когда $C = AB$

$$\dim C = \mathrm{L}^{p+l} \mathrm{M}^{q+m} \mathrm{T}^{r+t}, \tag{1.33}$$

когда $C = A/B$

$$\dim C = \mathrm{L}^{p-l} \mathrm{M}^{q-m} \mathrm{T}^{r-t}, \tag{1.34}$$

когда $C = A^n$

$$\dim C = \mathrm{L}^{pn} \mathrm{M}^{qn} \mathrm{T}^{rn}. \tag{1.35}$$

Вместо выражения «размерность единицы ФВ» используется более краткий термин «размерность ФВ». Он является распространенным и узаконенным. Поэтому под размерностью величины мы будем понимать размерность единицы ФВ. Приведем строгое определение размерности ФВ.

Размерность ФВ – выражение в форме степенного одночлена, составленного из произведений символов основных физических величин в различных степенях и отражающее связь данной физической величины с физическими величинами, принятыми в данной системе величин за основные с коэффициентом пропорциональности, равным 1.

Степени символов основных величин, входящих в одночлен, в зависимости от связи рассматриваемой физической величины с основными, могут быть целыми, дробными, положительными и отрицательными. Размерность основной величины в отношении самой себя равна единице, т.е. формула размерности основной величины совпадает с ее символом.

Пример 1.24. В системе единиц, основанной на системе величин LMT, размерности величин пути, массы, времени, скорости, ускорения и силы равны (см. (1.13), (1.15) и (1.22)):

$$\dim l = \mathrm{L}, \quad \dim m = \mathrm{M}, \quad \dim t = \mathrm{T}, \tag{1.36}$$

$$\dim v = \dim\Delta l/\dim\Delta t = \mathrm{LT}^{-1}, \quad \dim a = \dim\Delta \mathrm{v}/\dim\Delta t = \mathrm{LT}^{-2}, \tag{1.37}$$

$$\dim F = \dim m \cdot \dim a = \mathrm{LMT}^{-2}. \tag{1.38}$$

Показатель размерности ФВ – показатель степени, в которую возведена размерность основной ФВ, входящая в размерность производной ФВ. Показатель размерности основной ФВ в отношении самой себя равен единице.

Пример 1.25. Показатели степени p, q и r в формуле (1.28) являются показателями размерности производной ФВ A.

Показателями размерности длины, массы и времени в (1.36) являются (1, 0, 0), (0, 1, 0) и (0, 0, 1), соответственно.

Показателями размерности скорости и ускорения в (1.37), силы в (1.38) являются (1, 0, -1), (1, 0, -2) и (1, 1, -2), соответственно.

Среди физических величин выделяют размерные и безразмерные величины.

Размерная ФВ – ФВ, в размерности которой хотя бы одна из основных физических величин возведена в степень, не равную нулю.

Пример 1.26. Путь, масса, время, скорость, ускорение и сила в системе величин LMT являются размерными физическими величинами (см. (1.36) и (1.37)).

Безразмерная ФВ – ФВ, в размерность которой основные физические величины входят в степени, равной нулю.

Пример 1.27. Плоский и телесный углы – величины безразмерные.

Безразмерная ФВ в одной системе величин может быть размерной в другой системе. Так, электрическая постоянная ε_0 в системе СГС – безразмерная величина, а в SI имеет размерность $\dim \varepsilon_0 = \mathrm{L}^{-3}\mathrm{M}^{-1}\mathrm{T}^4\mathrm{I}^2$.

Формулы (1.36), (1.37) и (1.38) для размерностей величин были получены для случая, когда уравнения связи являлись степенными многочленами. Однако многие физические законы выражаются трансцендентными функциями, которые нельзя свести к степенному многочлену.

Пример 1.28. Временная зависимость силы тока I разряда конденсатора емкости C через резистор с сопротивлением R имеет экспоненциальный вид:

$$I = \frac{\Delta\varphi}{R}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right), \tag{1.39}$$

где $\Delta\varphi$ – начальная разность потенциалов на обкладках конденсатора.

В таких случаях выражения строят таким образом, чтобы величины, входящих в аргументы трансцендентных функций, составляли безразмерную комбинацию, т.е. не изменялись при любом изменении основных единиц. Так, произведение RC обладает размерностью времени. Поэтому выражение под знаком экспоненты в (1.39) безразмерно.

Когда единицы величин, входящих в аргументы трансцендентных функций, не образуют безразмерную комбинацию, вводят имеющие размерности постоянные величины.

Пример 1.29. Барометрическая формула, выражающая зависимость давления воздуха от высоты, имеет вид:

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{mgh}{k_{\text{Б}}T}\right), \tag{1.40}$$

где h – высота, m – масса молекулы, g – ускорение свободного падения, T – температура. В (1.40) размерная постоянная величина $k_{\text{Б}}$ –постоянная Больцмана.

Напомним, что при построении производной единицы используется коэффициент пропорциональности K в определяющем уравнении, связывающем производные и основные величины. K полагают равным единице или другому постоянному числу, не зависящему от размера основных единиц величин, причем уславливаются считать, что этот коэффициент является безразмерным (см. (1.7), (1.13), (1.15), (1.21)).

Выше упоминалось, что чем больше основных единиц используется для построения системы единиц, тем больше фундаментальных постоянных фигурируют в уравнениях связи, которые не являются определяющими уравнениями для других величин. С введением размерности можно дать следующее определение для фундаментальных постоянных.

Фундаментальные постоянные – размерные константы, фигурирующие в уравнениях связи, которые не являются определяющими уравнениями.

Наименование и символическое обозначение производной единицы часто определяет ее размерность (см. Пример 1.10).

Размерности могут служить одним из критериев для проверки правильности уравнений, выражающих физические закономерности: все члены правой и левой частей уравнения должны иметь одинаковую размерность. Но совпадение размерностей само по себе еще не является гарантией того, что уравнение является корректным.

1.6. Перевод размерностей

Если определяющие уравнения в обеих системах одинаковы, а основные величины различны, то для перевода размерности какой-либо величины из одной системы единиц в другую следует заменить размерность основной величины на размерность, выраженную в другой системе.

Далее, для краткости, будем заменять выражение «система единиц, основанная на системе величин (обозначение системы величин)» выражением «система (обозначение системы величин)».

Пример 1.30. Переведем размерность работы из системы LMT в систему LFT, где основными величинами являются величины длины, силы и времени. Размерность работы в LMT:

$$\mathrm{dim}A = \mathrm{L}^2\mathrm{M}\mathrm{T}^{-2}. \quad (1.41)$$

В системе LFT единица массы является производной с размерностью

$$\mathrm{dim}m = \mathrm{L}^{-1}\mathrm{F}\mathrm{T}^2. \quad (1.42)$$

Подставляя (1.42) в (1.41), получим размерность работы в LFT:

$$\mathrm{dim}A = \mathrm{L}^2\mathrm{L}^{-1}\mathrm{F}\mathrm{T}^2\mathrm{T}^{-2} = \mathrm{LF}. \quad (1.43)$$

Если основные величины в обеих системах единиц одинаковы, а определяющие уравнения различны, то коэффициенты пропорциональности в определяющих уравнениях при переходе от одной системы в другую систему могут

1) оставаясь безразмерными, изменять свою величину,
2) изменять свою величину и приобретать размерность.

Пример 1.31.

1) Если для определения единицы площади пользоваться квадратным метром, то коэффициент пропорциональности в формуле площади квадрата (1.10) является безразмерным и равным единице (см. (1.6)). Когда в качестве единицы площади выбран круглый метр, то коэффициент пропорциональности в формуле площади квадрата (1.18) также является безразмерным, но равным $4/\pi$.

2) Если в системе LMT для определения единицы силы используется 2-й закон Ньютона, то (см. (1.20), (1.21), (1.22)) коэффициент пропорциональности в (1.20) является безразмерным и равным единице, причем

$$\mathrm{dim}F = \mathrm{LMT}^{-2}. \quad (1.44)$$

Подставив размерность силы в выражение для закона всемирного тяготения (1.23), получим размерность гравитационной постоянной:

$$\mathrm{dim}G = \mathrm{L}^3\mathrm{M}^{-1}\mathrm{T}^{-2}. \quad (1.45)$$

Наличие размерности у гравитационной постоянной означает, что ее числовое значение зависит от размеров основных единиц. При основных единицах метре, килограмме и секунде гравитационная постоянная численно равна $6{,}67\cdot10^{-11}$. Если основные единицы – сантиметр, грамм и секунда, числовое значение гравитационной постоянной составляет $6{,}67\cdot10^{-8}$.

Если в системе LMT для определения единицы силы используется не 2-й закон Ньютона, а закон всемирного тяготения, то гравитационная постоянная оказывается безразмерной и равной единице. В этом случае размерность силы станет равной

$$\dim F = L^{-2}T^{-2}, \tag{1.46}$$

и инерционная постоянная K_i в (1.20), которая ранее принималась равной единице и лишенной размерности, приобретает размерность

$$\dim K_i = L^{-3}MT^{-2}. \tag{1.47}$$

При основных единицах метре, килограмме и секунде $K_i = 1{,}5\cdot 10^{10}$.

В общем случае, когда разные системы, имеющие различные основные величины, отличаются набором определяющих уравнений, необходимо учитывать, что коэффициенты пропорциональности, которые в одной системе безразмерны и равны постоянному числу (обычно единице), в другой системе приобретают размерность и некоторое числовое значение. Поэтому для перевода размерности какой-либо величины из одной системы в другую следует заменить безразмерный коэффициент размерным или наоборот. Рассмотрим три важных частных случая.

1. Обе системы единиц построены на одинаковых определяющих уравнениях и на одних и тех же основных величинах, так что основные единицы отличаются только размером. Поскольку размерности производной единицы в обеих системах оказываются одинаковыми, то при переводе единиц достаточно подставить в размерность отношения размеров основных единиц, которые должны быть заданы либо определением, либо опытным путем, либо сравнением эталонов соответствующих единиц.

Пример 1.32. Установим соотношение двух единиц силы, определенных на основании 2-го закона Ньютона, при основных единицах метр, килограмм, секунда и сантиметр, грамм, секунда. По определению соотношения основных единиц следующие

$$1\ \text{м} = 100\ \text{см}, \quad 1\ \text{кг} = 1000\ \text{г}. \tag{1.48}$$

На основании размерности силы (1.44) определим соотношение единиц силы:

$$\frac{\text{ед. силы системы «м, кг, с»}}{\text{ед. силы системы «см, г, с»}} = \left(\frac{\text{м}}{\text{см}}\right)\left(\frac{\text{кг}}{\text{г}}\right)\left(\frac{\text{с}}{\text{с}}\right)^{-2} = . \tag{1.49}$$

$$= 100 \cdot 1000 \cdot 1 = 10^5$$

Поскольку единица силы в системы «м, кг, с» – ньютон, а единица силы в системы «см, г, с» – дин, то

$$1 \text{ Н} = 10^5 \text{ дин.} \tag{1.50}$$

Установим соотношение двух единиц силы при том же определяющем уравнении, когда основные единицы – метр, килограмм, секунда и фут, фунт, минута. Посредством сравнения соответствующих эталонов установлено, что

$$1 \text{ м} = 3{,}281 \text{ фута}, \quad 1 \text{ кг} = 2{,}442 \text{ фунта.} \tag{1.51}$$

По определению

$$1 \text{ мин} = 60 \text{ с.} \tag{1.52}$$

Соотношение единиц силы следующее:

$$\frac{\text{Н}}{\text{ед. силы системы « фут, фунт, час »}} = \left(\frac{\text{м}}{\text{фут}}\right)\left(\frac{\text{кг}}{\text{фунт}}\right)\left(\frac{\text{с}}{\text{мин}}\right)^{-2} = . \tag{1.53}$$
$$= 3{,}281 \cdot 2{,}442 \cdot (60)^2 = 28843{,}927$$

Таким образом

$$1 \text{ Н} = 28843{,}927 \text{ ед. силы системы «фут, фунт, час».} \tag{1.54}$$

2. При одном и том же определяющем уравнении в обеих системах единиц приняты разные основные величины. Поскольку, по крайней мере, одна из величин, принятая в одной системе за основную, является в другой системе производной величиной, связь между единицами этой величины в разных системах устанавливается экспериментально. Располагая соотношениями между основными единицами двух систем, можно найти соотношения между единицами всех величин обеих систем. При этом можно пользоваться как размерностями соответствующих величин, так и непосредственно определяющими уравнениями.

Пример 1.33. Получим соотношение двух единиц работы, если единицы силы определенны на основании 2-го закона Ньютона при основных единицах метр, килограмм, секунда и метр, килограмм-сила (кгс), секунда. Первая система соответствует SI, вторая – МКГСС. В SI единица массы – основная, единица силы – производная, в системе МКГСС наоборот. Установим связь между данными единицами.

Если провести опыт, в котором сила, равная единице в одной системе, приложена к телу, масса которого равна единице в другой системе, и измерить ускорение, приобретаемое телом, то можно установить интересующую связь между единицами силы и массы. Единица кгс – это вес эталонной килограммовой гири в месте ее хранения, где ускорение свободного падения равно 9,80665 м/с^2. В SI данный вес равен 9,81 Н. Поэтому

$$1 \text{ кгс} = 9{,}81 \text{ Н}. \tag{1.55}$$

Поскольку равные силы 1 кгс и 9,81 Н обеспечивают телам одинаковое ускорение, то

$$1 \text{ ед. массы МКГСС} = 9{,}81 \text{ кг}. \tag{1.56}$$

Единицу массы МКГСС называют технической единицей массы (т. е. м.) или инертой. Обратные соотношения для единиц силы и массы:

$$1 \text{ Н} = 0{,}102 \text{ кгс}, \quad 1 \text{ кг} = 0{,}102 \text{ т. е. м.} \tag{1.57}$$

Поэтому единицы работы в SI и МКГСС связаны между собой следующим образом:

$$1 \text{ кгс}\cdot\text{м} = 9{,}81 \text{ Н}\cdot\text{м} = 9{,}81 \text{ Дж}. \tag{1.58}$$

3. В разных системах для определения производной единицы используются разные определяющие уравнения, но основные единицы в обеих системах одинаковые. Рассмотрим некоторую производную величину A, которая в двух разных системах LMT основана на разных определяющих уравнениях и имеет размерности

$$\dim A_1 = \mathrm{L}^p\mathrm{M}^q\mathrm{T}^r \quad \text{и} \quad \dim A_2 = \mathrm{L}^l\mathrm{M}^m\mathrm{T}^t. \tag{1.59}$$

Числовые значения A_1 и A_2, выражающие величину A в единицах a_1 и a_2 первой и второй систем LMT, находятся в соотношении:

$$A_1 = KA_2, \tag{1.60}$$

где K – коэффициент пропорциональности, размерность которого равна

$$\dim K = \mathrm{L}^{p-l}\mathrm{M}^{q-m}\mathrm{T}^{r-t}. \tag{1.61}$$

Так как числовые значения величин в разных единицах и единицы этих величин находятся в обратном отношении (см. (1.1)), то

$$a_1 = (1/K)a_2. \tag{1.62}$$

Поэтому знание числового значения коэффициента K в какой либо системе единиц позволяет определить его числовое значение в другой системе, а значит, и соотношение между соответствующими единицами данной величины A.

Пример 1.34. При использовании инерционной единицы силы, т.е. когда единица силы в системе LMT определена на основании 2-го закона Ньютона, закон всемирного тяготения имеет вид, представленный выражением (1.23). Выражение m_1m_2/r^2 представляет собой ту же силу всемирного тяготения, но измеренную в гравитационных единицах, т.е. когда единица силы в системе LMT определена на основании закона всемирного тяготения. Поэтому, обозначив силы, измеренные инерционной и гравитационной единицами, через F_i и F_g, получим

$$F_i = GF_g. \tag{1.63}$$

Размерности F_i и F_g указаны в (1.44) и (1.46), соответственно. Откуда с учетом (1.63) можно определить размерность гравитационной постоянной G (см. (1.45)).

Обозначим инерционную и гравитационную единицы силы через a_i и a_g. Тогда согласно (1.62)

$$a_i = (1/G)a_g. \tag{1.64}$$

При измерении массы в килограммах и длины в метрах имеем:

$$1\ \text{Н} = 1/(6{,}67\cdot 10^{-11})\ \text{грав. ед. силы} = 1{,}5\ 10^{10}\ \text{кг}^2/\text{м}^2. \tag{1.65}$$

При измерении массы в граммах и длины в сантиметрах будем иметь

$$1\ \text{дин} = 1/(6{,}67\cdot 10^{-8})\ \text{грав. ед. силы} = 1{,}7\cdot 10^{-7}\ \text{г}^2/\text{см}^2. \tag{1.66}$$

Для того чтобы всякий раз при расчетах не переводить одни единицы в другие, составляют специальные переводные таблицы, с помощью которых величину, измеренную одной единицей, можно выразить через любую другую единицу той же величины. В Приложении Г представлены переводные таблицы для единиц длины, силы, давления, работы и энергии, мощности. В них, наряду с единицами разных систем, включены также ряд наиболее употребительных внесистемных единиц, таких как дюйм, киловатт-час, лошадиная сила.

1.7. Основные системы единиц

В первых системах единиц основными единицами выбирались единицы длины и массы. В России такими единицами были приняты аршин и русский фунт, в Великобритании – фут и английский фунт (lb). Кратные и дольные единицы этих систем имели собственные наименования.

Пример 1.35. В России:

1 аршин = 16 вершкам, 1 сажень = 3 аршинам, 1 верста = 500 саженям.

1 фунт = 32 лотам, 1 лот = 3 золотникам, 1 пуд = 40 фунтам.
1 аршин = 0,7112 м, 1 фунт = 409,51 г.

В Великобритании:
1 фут = 12 дюймам, 1 ярд = 3 футам, 1 уставная миля = 1760 ярдам.
1 lb = 16 унциям, 1 унция = 16 драхмам, 1 тод = 28 lb.
1 фут = 0,3048 м, 1 lb = 453,59 г.

На основе подобных единиц длины и массы установилась сложная совокупность производных единиц. Неудобства, связанные с различием и сложностью национальных систем единиц, подтолкнули в 18 веке ученых Франции к созданию метрической системы мер.

Метрическая система мер – система единиц физических величин, основными единицами которой являются единица длины – метр и единица массы – килограмм. Метр был определен как десятимиллионная часть 1/4 длины парижского меридиана, килограмм – как масса одного кубического дециметра дистиллированой воды при 4 °С. Преимуществом метрической системы мер является то, что кратные и дольные единицы одной и той же ФВ относятся к соответствующей системной единице как целые степени десяти. Метрическая система мер узаконена в большинстве стран мира и лежит в основе построения единиц, служащих для измерения различных величин в науке, технике и быту. В России метрическая система мер допущена к применению законом от 04.06.1899, проект которого был разработан Д.И. Менделеевым.

В 1832 году К. Гаусс и В. Вебер предложили абсолютную систему единиц.

Абсолютная система единиц – система единиц физических величин, основными единицами которой являются единица длины – миллиметр, единица массы – миллиграмм и единица времени – секунда. В эту систему наряду с механическими величинами входили производные единицы всех электрических и магнитных величин, которые в то время использовались в науке и технике. Абсолютная система единиц является первой когерентной системой единиц, т.е. в ней производные единицы образовывались посредством определяющих уравнений с коэффициентами пропорциональности, равными единице.

Во второй половине 19 века Британская ассоциация по развитию наук приняла две системы единиц: абсолютную электростатическую систему единиц (СГСЭ) и абсолютную электромагнитную систему единиц (СГСМ).

СГСЭ и *СГСМ* – системы единиц физических величин, основными единицами которых являются единица длины – сантиметр, единица массы – грамм и единица времени – секунда. Отсюда первые три символа в названии систем единиц – обозначение основных единиц.

В системе СГСЭ в основе построения производных единиц электромагнитных величин лежит закон Кулона, т.е. закон взаимодействия между покоящимися зарядами:

$$F = \varepsilon_0 \frac{|q_1||q_2|}{\varepsilon r^2}, \tag{1.67}$$

где ε_0 – электрическая постоянная, r – расстояние между зарядами q_1 и q_2, ε – диэлектрическая проницаемость. Отсюда в названии системы присутствует символ «Э» (электростатическая).

В системе СГСМ в основе построения производных единиц электромагнитных величин был положен закон взаимодействия полюсов покоящихся постоянных магнитов:

$$F = K \frac{|m_1||m_2|}{\mu r^2}, \tag{1.68}$$

где K – коэффициент пропорциональности, r – расстояние между «магнитными массами» m_1 и m_2, μ – магнитная проницаемость. Отсюда в названии системы присутствует символ «М» (магнитостатическая). Позднее, когда эксперименты показали отсутствие «магнитных масс» и существование магнитного поля тока, в основу построения производных единиц электромагнитных величин положили закон взаимодействия между проводниками, по которому течет электрический ток.

Опыт показывает, что сила взаимодействия двух тонких прямолинейных параллельных проводников, приходящаяся на отрезок длины l каждого проводника, равна

$$F = \mu_0 \mu 2 \frac{|I_1||I_2| l}{b}, \tag{1.69}$$

где μ_0 – магнитная постоянная, I_1 и I_2 – силы токов в проводниках, b – расстояние между проводниками. В системах СГСЭ и СГСМ сила тока I и заряд q связаны уравнением:

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}. \tag{1.70}$$

В (1.70) коэффициент пропорциональности принимается равным единице.

В системе СГСЭ полагается $\varepsilon_0 = 1$ и из (1.67) определяется единица заряда. Поскольку ε и μ – величины безразмерные, то с учетом (1.44) и (1.70) из (1.69) можно получить, что

$$\dim \mu_0 = \mathrm{L}^{-2}\mathrm{T}^2, \tag{1.71}$$

т.е. μ_0 равен некоторой величине, обратной скорости, в квадрате. Развитая Максвеллом электромагнитная теория света показала, что

$$\mu_0 = \frac{1}{c^2}, \tag{1.72}$$

где с = $3 \cdot 10^{10}$ см/с – скорость света в вакууме. Эксперимент подтвердил данное предположение.

В системе СГСМ полагается $\mu_0 = 1$ и из (1.69) определяется единица силы тока. Тогда из (1.67) можно получить, что ε_0 оказывается размерной постоянной, причем

$$\varepsilon_0 = c^2. \tag{1.73}$$

Сравнивая выражения (1.69) в системах СГСЭ и СГСМ, принимая во внимание (1.70), получим соотношения между силами токов ($I_{\text{СГСЭ}}$, $I_{\text{СГСМ}}$) и зарядами ($q_{\text{СГСЭ}}$, $q_{\text{СГСМ}}$), измеренными единицами СГСЭ и СГСМ:

$$I_{\text{СГСМ}} = \frac{1}{c} I_{\text{СГСЭ}}, \quad q_{\text{СГСМ}} = \frac{1}{c} q_{\text{СГСЭ}}. \tag{1.74}$$

Электрические и магнитные единицы СГСЭ собственных наименований не имеют. Электрическим единицам СГСМ также не присвоено собственных наименований. Магнитные единицы СГСМ именованы.

Пример 1.36. Единица СГСМ магнитного потока – максвелл (Мкс), единица магнитной индукции – гаусс (Гс), единица напряженности магнитного поля – эрстед (Э).

В 1881 году 1-м Международным конгрессом электриков принята симметричная или гауссовская система единиц (система единиц Гаусса), обозначаемая СГС.

СГС – система единиц физических величин, основными единицами которых являются единица длины – сантиметр, единица массы – грамм и единица времени – секунда, причем постоянные $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$. В системе СГС все электрические величины измеряются в единицах СГСЭ, а все магнитные величины – в единицах СГСМ. В гауссовской системе вследствие соотношений (1.74) во все выражения, содержащие наряду с магнитными величинами силу тока I или заряд q, входит по одному множителю 1/с на каждую стоящую в формуле величину I или q. СГС является когерентной системой, применяется и в настоящее время при научных теоретических исследованиях.

На основе СГС были созданы система тепловых единиц СГС°С, система световых единиц СГСЛ, система единиц радиоактивности и ионизирующих излучений СГСР.

СГС°С, СГСЛ и *СГСР* – системы единиц физических величин, в которых помимо трех основных единиц – сантиметр, грамм, секунда – используются градус Цельсия, люмен и рентген, соответственно.

Размеры единиц СГС, как правило, неудобны для практических измерений: они или слишком малы или, наоборот, велики. Поэтому были установлены ряд других систем единиц. К ним относятся системы МКС, МТС, МКГСС, МКСК, абсолютная практическая система электрических единиц и система МКСА.

МКС и *МТС* – системы единиц механических величин с основными единицами метр, килограмм, секунда и метр, тонна, секунда, соответственно. МКС была введена в России ГОСТ 7664–55, впоследствии замененным ГОСТ 7664–61. МКС вошла как составная часть в SI.

МКГСС – система единиц механических величин с основными единицами метр, килограмм-сила (см. (2.55)), секунда. МКГСС называют также технической системой единиц, так как она широко применялась в механике и технике. МКГСС вошла в практику в конце 19 века, допущена к применению в России ОСТ ВКС 6052, ГОСТ 7664–55 и ГОСТ 7664–61. В настоящее время МКГСС не используется.

МКСК – система единиц тепловых величин с основными единицами метр, килограмм, секунда и кельвин. В системе МКСК пользуются двумя температурными шкалами: термодинамической шкалой и международной практической температурной шкалой (МПТШ-68). Наряду с кельвином для выражения термодинамической температуры применяется градус Цельсия, равный кельвину. Применение МКСК в России было установлено ГОСТ 8550–61. МКСК вошла как составная часть в SI.

Наряду с системой СГС 1-й Международный конгресс электриков установил «абсолютную практическую систему электрических единиц».

Абсолютная практическая система электрических единиц – система единиц электрических величин, построенная на основе системы СГС и в которой используются единицы, кратные соответствующим единицам СГС. Так были установлены единицы следующих величин: единица разности потенциалов (вольт) – 1 В = 10^8 ед. СГС, единица силы тока (ампер) – 1 А = 0,1 ед. СГС, единица сопротивления (Ом) – 1 Ом = 10^9 ед. СГС, единица электроемкости (фарада) – 1 Ф = 10^{-9} ед. СГС, единица работы (джоуль) – 1 Дж = 10^7 ед. СГС (эргов), единица мощности (ватт) – 1 Вт = 10^7 ед. СГС (эргов в секунду). Практическая система оказалась удобной, так что в ней проводились все электротехнические измерения и расчеты. Однако практическая система имела существенный недостаток – в ней отсутствовала единица силы. Поэтому ее невозможно было использовать для вычисления сил, действующих между заряженными телами и проводниками с токами.

В 1901 году итальянский ученый Дж. Джорджи предложил расширить практическую систему так, чтобы ее единицами можно было охватить измерения в механике, электричестве и электромагнетизме. В результате появилась система единиц МКСА (система единиц Джорджи).

МКСА – система единиц электрических и магнитных величин с основными единицами метр, килограмм, секунда и ампер. В России МКСА была введена ГОСТ 8033–56. МКСА вошла как составная часть в SI.

В 1960 году на 11-й ГКМВ была принята Международная система единиц физических величин (SI). На последующий ГКМВ SI уточнялась.

SI – система единиц физических величин, основными единицами которых являются единица длины – метр, единица массы – килограмм, единица времени – секунда, единица силы электрического тока – ампер, единица термодинамической температуры – кельвин, единица силы света – кандела, единица количества вещества – моль. В Приложении В представлены наименования и обозначения основных и некоторых производных единиц SI.

В SI при ее принятии входило три класса единиц: основные, производные и дополнительные. Дополнительными единицами являлись радиан и стерадиан.

Дополнительная единица системы единиц физических величин – безразмерная производная единица SI, которая может быть использована или не использована в выражениях для других производных единиц (по необходимости). В целях устранения двусмысленности в 1995 г. XX ГКМВ (Резолюция 8) упразднила понятие «дополнительные единицы».

В России SI введена с 1961 года (ГОСТ 9867–61). С 1982 года после внесения соответствующих дополнений применение единиц SI регламентировал ГОСТ 8.417–81. С 2003 года введен стандарт ГОСТ 8.417–2002, который определяет

- основные и наиболее употребительные производные единицы SI,
- единицы, допускаемые к применению наравне с единицами SI,
- временно допускаемые единицы, срок изъятия которых будет установлен в соответствии с международными соглашениями.

SI – когерентная система единиц. Основным достоинством SI является ее универсальность, так как ее единицами охватываются все отрасли науки и техники. Первые три основные единицы (метр, килограмм, секунда) позволяют образовывать согласованные производные единицы механических величин. Остальные основные единицы добавлены для образования единиц величин, не сводимых к механическим величинам: ампер – для единиц электрических и магнитных величин, кельвин – для единиц тепловых величин, кандела – для единиц световых величин, моль – для единиц величин в области молекулярной физики и химии.

Наряду с практическими системами единиц в физике применяются естественные системы единиц.

Естественные системы единиц – системы, в которых за основные единицы приняты фундаментальные физические константы, такие как гравитационная постоянная G, скорость света в вакууме c, постоянная Планка h, постоянная Больцмана $k_{Б}$, число Авогадро $N_{А}$, заряд электрона e, масса покоя электрона m_e. Естественные системы единиц (ЕСЕ) принципиально отличаются от других систем единиц тем, что в них размер основных единиц определяется явлениями природы, а не требованиями практики измерений. К ЕСЕ относятся системы единиц Планка, Льюиса, Дирака, Хартри. Применение ЕСЕ оказывается неудобным для практических измерений. Однако в теоретической физике использование ЕСЕ позволяет упростить уравнения и дает ряд других преимуществ.

<u>Пример 1.37.</u> Использование системы единиц Хартри позволяет упростить запись уравнений квантовой механики.

1.8. Шкалы измерений

Различные свойства объектов измерений (тел, веществ, явлений, процессов) подлежат измерениям. Свойства объектов измерения проявляются как количественно, так и качественно.

Пример 1.38. Длина, масса, температура – количественные проявления свойств объектов. Качественные проявления свойств объектов, такие как цвет, запах, вкус и др., не имеют количественного выражения. Для них бессмысленны сравнения типа: «красный цвет больше (меньше) синего», «запах или вкус какого-то объекта больше (меньше) запаха или вкуса другого объекта».

Многообразие (количественное или качественное) проявлений любого свойства образует множества. Чтобы использовать и исследовать свойство необходимо множества его проявлений выразить в чем-то понятном и удобном для применения. Поэтому элементам указанных множеств сопоставляется некая система условных знаков.

Пример 1.39. Множеству цветов объекта сопоставляется система знаков в виде множества обозначений (названий) цветов.

Множеству значений напряжения (силы тока) сопоставляется система знаков в виде множества действительных чисел, выражающих значения в вольтах (амперах).

К системам знаков относятся также множество баллов оценки свойств объектов, множество названий состояния объекта, совокупность классификационных символов или понятий и т.п.

Множества проявлений свойства объекта измерения, отображенные на систему условных знаков, образуют шкалу измерения данного свойства.

Шкала измерения (шкала) – отображение множества различных проявлений (реализаций) качественного или количественного свойства на принятое упорядоченное множество чисел или другую систему логически связанных знаков (обозначений). Не следует путать шкалу измерения со шкалами, нанесенными на циферблаты приборов со стрелочными или световыми указателями.

Элементы множеств проявления свойств объекта находятся в определенных логических соотношениях между собой и тем самым определяют типы шкал измерений, соответствующих множествам. Такими соотношениями могут быть «эквивалентность» (равенство) или «сходство» (близость) этих элементов, количественная различимость элементов («больше», «меньше»), допустимость выполнения математических операций сложения, вычитания, умножения деления с элементами множеств и т.д.

Согласно МИ 2365–96 различают пять основных типов шкал измерений: шкалы наименований, шкалы порядка (ранга), шкалы разностей (интервалов), шкалы отношений и абсолютные шкалы. Шкалы разностей и отношений объединяют термином «метрические шкалы». Выделяют также логарифмические, биофизические, одномерные и многомерные шкалы измерений.

Шкала наименований – шкала измерений качественного свойства, характеризующаяся только соотношением эквивалентности различных проявлений этого свойства. В шкалах наименований не вводят понятия нуля (начальной точки шкалы), единицы измерений и размерности.

Пример 1.40. Шкала классификации (оценки) цвета объектов по наименованиям (красный, оранжевый, желтый, зеленый и т.д.), опирающаяся на стандартизованные атласы цветов, систематизированные по сходству. В таких атласах цвета могут обозначаться условными номерами (координатами цветами). Измерения в шкале цветов выполняются путем сравнения при определенном освещении образцов цвета из атласа с цветом исследуемого объекта и установления эквивалентности их цветов.

Шкала порядка (рангов) – шкала количественного свойства, характеризующаяся соотношениями эквивалентности и порядка по возрастанию (убыванию) различных проявлений свойства. В шкалах порядка нельзя ввести понятия единицы измерений и размерности, в них может быть или отсутствовать нулевой элемент.

Пример 1.41. Существующие шкалы чисел твердости тел (шкалы Бринелля, Виккерса, Роквелла), шкалы баллов землетрясений (шкала Рихтера), шкалы баллов ветра (шкала Бофорта).

Шкала разностей (интервалов) – шкала измерений количественного свойства, характеризующаяся соотношениями эквивалентности, порядка, суммирования интервалов различных проявлений свойства. В шкалах разностей можно установить единицы измерений и нули, опирающиеся на опорные точки (реперы), а также применить понятие размерности.

Пример 1.42. Шкала интервалов времени. Можно складывать и вычитать отдельные интервалы времени, но складывать (вычитать) моменты времени (даты каких-либо событий) бессмысленно.

К шкалам разностей относятся также шкалы температур по Цельсию, Фаренгейту, Реомюру.

Шкала отношений – шкала измерений количественного свойства, характеризующаяся соотношениями эквивалентности, порядка, пропорциональности (допускающими в ряде случаев операцию суммирования) различных проявлений свойства. В шкалах отношений вводятся единицы, существуют естественные нули и применяется понятие размерности.

Естественный нуль шкалы – начальная точка шкалы, соответствующая стремящемуся к нулю количественному проявлению измеряемого свойства.

Шкалы отношений, в которых не имеет смысла операция суммирования, называются *пропорциональными шкалами отношений или шкалами отношений 1-го рода*, шкалы, в которых операция суммирования имеет смысл, называют *аддитивными шкалами отношений или шкалами отношений 2-го рода*.

Пример 1.43. Шкала термодинамических температур является пропорциональной шкалой отношений, шкала масс – аддитивной шкалой отношений.

Абсолютная шкала – шкала отношений (пропорциональная или аддитивная) безразмерной величины.

Абсолютная ограниченная шкала – абсолютная шкала, диапазон значений которой находится в пределах от нуля до единицы (или некоторого другого конечного предельного значения).

В абсолютных шкалах устанавливаются естественные (не зависящие от принятой системы единиц) нули и безразмерные единицы измерений. Такие шкалы используются для измерений относительных величии (отношений одноименных величин): коэффициентов усиления, ослабления, КПД, коэффициентов отражений и поглощений, амплитудной модуляции и т.д. Результаты измерений в абсолютных шкалах могут выражаться не только в неименованных безразмерных единицах, но и в именованных относительных единицах (процентах, промиллях) и логарифмических единицах.

Разновидностью абсолютных шкал являются дискретные (целочисленные, счетные, квантованные) шкалы, в которых результат измерения выражается безразмерным числом частиц, квантов или других единичных объектов, эквивалентных по количественному проявлению измеряемого свойства.

Пример 1.44. Величина электрического заряда q квантуется и выражается числом элементарных зарядов электрона e: $q = \pm Ne$. Энергия монохроматического электромагнитного излучения определяется числом квантов (фотонов): $E = \pm Nhf$, где f – частота излучения.

Логарифмическая шкала – шкала, построенная на основе систем логарифмов. Для построения логарифмических шкал обычно используются системы десятичных или натуральных логарифмов, а также система логарифмов с основанием два. Результаты измерений в логарифмических шкалах выражаются логарифмическими единицами измерений (бел (Б), децибел (дБ), лог, децилог, непер (Нп), байт и др).

Величина L, выраженная в белах, равна

$$L = \lg\frac{P_1}{P_2} = 2\lg\frac{F_1}{F_2}, \tag{1.75}$$

величина L, выраженная в неперах, равна

$$L = \frac{1}{2}\ln\frac{P_1}{P_2} = \ln\frac{F_1}{F_2}, \tag{1.76}$$

где $P_{1,2}$ – одноименные энергетические величины (энергия, мощность, интенсивность), $F_{1,2}$ – одноименные «силовые» величины (напряжение, сила тока).

Логарифмические шкалы подразделяются на логарифмические шкалы разностей и логарифмические абсолютные шкалы.

Логарифмическая шкала разностей – логарифмическая шкала измерений, получаемая при логарифмическом преобразовании величины, описываемой шкалами отношений или интервала, т.е. шкала, определяемая зависимостью $L = \log(X/X_0)$, где X – текущее, а X_0 – принятое по соглашению опорное значение преобразуемой величины. Выбор значения X_0 определяет нулевую точку логарифмической шкалы разностей. В радиотехнике в качестве опорного принимают значения 1 мВт, 1 В, 1 мкВ; в акустике – 20 мкПа и др.

К этим шкалам в общем случае нельзя прямо применять ни одно арифметическое действие. Сложение и вычитание величин, выраженных в значениях таких шкал, должно проводиться путем нахождения их антилогарифмов, выполнения необходимых арифметических операций и повторного логарифмирования результата.

Пример 1.45. Шкала уровня громкости звука L в дБ определяется зависимостью: $L = 10\lg(I/I_0)$, где I – интенсивность воспроизводимой звуковой волны ($\dim I$=Вт/м^2), I_0 (порог слышимости) – минимальная интенсивность звуковых волн, воспринимаемая человеческим ухом при частоте $f = 1$ кГц.

Логарифмическая абсолютная шкала – логарифмическая шкала измерений, получаемая логарифмическим преобразованием абсолютных шкал, т.е. шкала, определяемая зависимостью $L = \log X$, где X – безразмерная величина X, описываемая абсолютной шкалой. Для значений величин, выраженных в абсолютных логарифмических шкалах, допустимы операции сложения и вычитания. Такие шкалы называются также логарифмическими шкалами с плавающим нулем, т.к. в них не фиксируется опорное значение.

Пример 1.46. Шкала усиления (ослабления) сигнала в дБ, шкала затухания в Нп.

Биофизическая шкала – шкала измерений свойств физического фактора (стимула), модифицированная таким образом, чтобы по результатам измерений этих свойств можно было прогнозировать уровень или характер реакции биологического объекта на действие этого фактора. К таким шкалам относятся шкалы световых и цветовых измерений, шкалы восприятия звуков, шкалы эквивалентных доз ионизирующих излучений и др.

Одномерная шкала – шкала, используемая для измерений свойства объекта, характеризуемого одним параметром. Результаты измерений в такой шкале выражаются одним числом или знаком (обозначением). Большинство свойств описываются одномерными шкалами.

Многомерная шкала – шкала, используемая для измерений свойства объекта, характеризуемая двумя или более параметрами. Результаты измерений в такой шкале выражаются двумя или более числами или знаками (обозначениями).

Пример 1.47. Трехмерные шкалы цвета в колориметрии, двухмерные шкалы электрических импедансов и комплексных коэффициентов отражения и др.

Многомерные шкалы могут быть образованы сочетанием шкал различных типов. Такие шкалы используются в библиотечном и архивном делах.

Пример 1.48. Чтобы систематизировать литературу, можно ввести алфавитную шкалу наименований книг, где под каждой буквой понимать подкласс авторов изданий, чьи фамилии начинаются с данной буквы. Внутри каждого подкласса каждому автору можно присвоить некоторый номер, т.е. ввести еще одну шкалу наименований – шкалу условных номеров. Каждому условному номеру из выбранного подкласса можно сопоставить количество книг, т.е. ввести абсолютную шкалу количества книг данного автора. Построенная таким образом шкала будет трехмерной.

Шкала измерений вводится для практического использования путем определения ее спецификации.

Спецификация шкалы измерений – принятый документ, в котором дано определение шкалы и (или) описание правил и процедур воспроизведения данной шкалы (или единицы шкалы, если она (единица) существует).

Если свойства объекта измерения проявляются качественно, то производится оценка данного свойства.

Оценка свойства – нахождение местоположения качественного свойства конкретного объекта деятельности на соответствующей шкале наименований.

Если свойства объекта измерения проявляются количественно, то вводится соответствующая ФВ и единица ее измерения. Чтобы определить значение данной ФВ также учитывается диапазон возможных ее значений, т.е. перед измерением ФВ устанавливается ее шкала.

Шкала ФВ – шкала измерений количественного свойства: упорядоченная совокупность значений ФВ, служащая исходной основой для измерений данной величины.

Пример 1.49. Для измерения температуры тел введена Международная температурная шкала 1990 г. (МТШ-90), предназначенная служить исходной основой для измерений температуры и состоящая из ряда реперных точек, значения которых приняты по соглашению между странами Метрической Конвенции и установлены на основании точных измерений. Основные реперные точки МТШ-90 представлены в Приложении Д.

Измерения физических величин не всегда носят однозначный характер. Измерения являются однозначными только для величин, которые удовлетворяют условию абсолютного значения относительного количества.

Условие абсолютного значения относительного количества – условие независимости отношения размеров двух однородных физических величин от единицы измерения этих величин. Большинство физических величин удовлетворяют этому условию, для них можно ввести понятие размерности. Однако встречаются такие свойства, которые не удается выразить величинами, подходящими под указанные требования. В этом случае для физических величин устанавливаются условные единицы измерения и условные шкалы.

Условная единица измерения – числовая характеристика, с помощью которой располагают в порядке возрастания (убывания) проявления свойств объектов.

Условная шкала ФВ – шкала ФВ, исходные значения которой выражены в условных единицах. Условные шкалы называют также *неметрическими шкалами*. К ним относятся шкалы порядка.

Пример 1.50. Шкала твердости минералов Моса, шкалы твердости металлов (Бринелля, Виккерса, Роквелла и др.).

При рассмотрении метрических шкал указывалось, что в них не всегда можно проводить операцию суммирования проявлений свойства. Соответственно, различают аддитивные и неаддитивные ФВ.

Аддитивная ФВ – ФВ, разные значения которой могут быть суммированы, умножены на числовой коэффициент, разделены друг на друга.

Пример 1.51. Длина, масса, сила, давление, скорость – аддитивные физические величины.

Неаддитивная ФВ – ФВ, для которой суммирование, умножение на числовой коэффициент или деление друг на друга ее значений не имеет физического смысла.

Пример 1.52. Термодинамическая температура, время – неаддитивные физические величины.

ГЛАВА 2. ИЗМЕРЕНИЯ, МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЙ И СРЕДСТВА ИЗМЕРЕНИЙ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

2.1. Измерения физических величин

Чтобы проводить количественные исследования окружающего нас мира необходимо выбрать объекты измерения, поставить измерительную задачу и определить значения соответствующих физических величин.

Объект измерения – тело (физическая система, процесс, явление и т.д.), которое характеризуется одной или несколькими измеряемыми физическими величинами.

<u>Пример 2.1.</u> Объектами измерения являются:

1) коленчатый вал, у которого измеряют диаметр;
2) технологический процесс, во время которого измеряют температуру;
3) спутник Земли, координаты которого измеряются;
4) участок цепи, на котором измеряют напряжение и силу тока.

Измерительная задача – задача, заключающаяся в измерении ФВ с требуемой точностью в данных условиях измерений.

Измерение ФВ – совокупность операций по применению технического средства (средства измерений), хранящего единицу ФВ, обеспечивающих нахождение соотношения (в явном или неявном виде) измеряемой величины с ее единицей и получение значения этой величины. Значение ФВ находится посредством отсчета показаний средства измерений и последующей обработки результата измерений.

Отсчет показаний средства измерений осуществляется путем фиксация значения ФВ или числа по показывающему устройству средства измерений в заданный момент времени.

<u>Пример 2.2.</u> При измерении линейного размера какой-либо детали применяется средство измерений – линейка, снабженная шкалой с делениями. Прикладывая линейку к детали, сравнивают размер детали с единицей, хранимой линейкой, и, произведя отсчет показаний по шкале, получают значение ФВ (длины, высоты, толщины детали и т.д.).

При измерении напряжения или силы тока применяется средство измерений – аналоговый измерительный прибор. Посредством прибора сравнивают размер ФВ (напряжения или силы тока), преобразованной в перемещение указателя, с единицей, хранимой шкалой этого прибора, производят отсчет показаний и находят значение ФВ.

В процессе измерений физических величин используются измерительные сигналы, содержащие измерительную информацию.

Измерительный сигнал – сигнал, содержащий количественную информацию об измеряемой ФВ.

Измерительная информация – информация о значениях физических величин.

В Примере 2.2 при измерении линейного размера детали измерительным сигналом является отраженный от шкалы линейки свет, поступающий в глаза экспериментатора, измерительной информацией – полученное значение ФВ (длины, высоты, толщины детали и т.д.). При измерении напряжения или силы тока посредством прибора измерительными сигналами являются электрический ток, проходящий через измерительную цепь прибора, и отраженный от шкалы прибора свет, поступающий в глаза экспериментатора, измерительной информацией – полученное значение напряжения или силы тока.

Когда невозможно выполнить измерение (не выделена величина как физическая или не определена единица измерений ФВ), проводится *оценивание* величин по шкалам наименований и условным шкалам.

Классификация разных типов измерений представлена в таблице 2.1. Рассмотрим типы измерений по признакам классификации.

По точности

Равноточные измерения – ряд измерений какой-либо ФВ, выполненных одинаковыми по точности средствами измерений в одних и тех же условиях.

Неравноточные измерения – ряд измерений какой-либо ФВ, выполненных различающимися по точности средствами измерений и (или) в разных условиях.

Прежде чем обрабатывать ряд измерений, необходимо определить какими по точности являются данные измерения. Ряд неравноточных измерений обрабатывают с учетом веса отдельных измерений, входящих в ряд.

Таблица 2.1

Классификация типов измерений

Признак классификации	Типы измерений
по точности	равноточные измерения неравноточные измерения
по числу наблюдений	однократное измерение многократное измерение
по отношению к изменению измеряемой величины	статическое измерение динамическое измерение
по способу получения измерительной информации	прямое измерение косвенное измерение совокупные измерения совместные измерения
по выражению результата измерений	абсолютные измерения относительные измерения
по метрологическому назначению	технические измерения метрологические измерения

По числу наблюдений

Наблюдение при измерении – операции, проводимые при измерении и имеющие целью своевременно и правильно произвести отсчет. Не следует заменять термин «измерение» термином «наблюдение», так как измерение включает в себя как составную часть наблюдение.

Однократное измерение или измерение с однократным наблюдением – измерение, выполненное один раз. Во многих случаях на практике выполняются именно однократные измерения.

Пример 2.3. Измерение конкретного момента времени по часам обычно производится один раз. Измерение количества потребленной электроэнергии с помощью бытового электрического счетчика в выбранный момент времени также проводится однократно.

Многократное измерение или измерение с многократными наблюдениями – измерение ФВ одного и того же размера, результат которого получен из нескольких следующих друг за другом измерений, т.е. состоящее из ряда однократных измерений.

По отношению к изменению измеряемой величины

Статическое измерение – измерение ФВ, принимаемой в соответствии с конкретной измерительной задачей за неизменную на протяжении времени измерения.

Динамическое измерение – измерение изменяющейся по размеру ФВ.

Строго говоря, все физические величины подвержены тем или иным изменениям во времени. В этом убеждает применение все более и более чувствительных средств измерений, которые дают возможность обнаруживать изменение величин, ранее считавшихся постоянными. Поэтому разделение измерений на динамические и статические является условным.

Пример 2.4. Измерение длины детали при нормальной температуре, измерение размеров земельного участка, измерение напряжения или силы тока в цепи постоянного тока являются статическими измерениями. Измерение напряжения или силы тока в цепи переменного тока, измерение скорости равноускоренного движущегося тела – динамическими измерениями.

Динамические измерения подразделятся на непрерывные и дискретные измерения.

Непрерывное измерение – измерение, при котором значения измеряемой ФВ фиксируются непрерывно. Фразу «фиксируются непрерывно» нужно понимать в следующем смысле. Для того, чтобы получить значение ФВ необходимо произвести отсчет показаний прибора. Отсчет показаний прибора невозможно осуществить мгновенно. Так для стрелочного прибора требуется некоторое время на отклонение стрелки и ее установления в положении равновесия. Поэтому для измерения значения ФВ нужно затратить определенное время, называемое временем измерения. При непрерывных измерениях значения измеряемой ФВ фиксируются в моменты времени, разделенные временем измерения прибора. К таким измерениям относятся измерения величин с помощью аналоговых приборов.

Дискретное измерение – измерение, при котором значения измеряемой ФВ фиксируются в отдельные моменты времени. В этом случае отдельные моменты времени превышают время измерения прибора. К дискретным измерениям относятся измерения величин с помощью цифровых приборов.

По способу получения измерительной информации.

Прямое измерение – измерение, при котором искомое значение ФВ получают непосредственно из опытных данных.

Косвенное измерение – определение искомого значения ФВ на основании результатов прямых измерений других физических величин, функционально связанных с искомой величиной.

Пример 2.5. Измерение длины детали микрометром, измерение силы тока амперметром, измерение массы на весах являются прямыми измерениями.

К косвенным измерениям относятся 1) измерением мощности $P = IU$ цепи постоянного тока, если амперметром и вольтметром прямо измерены сила тока I и напряжение U, 2) определение плотности тела $\rho = 4m/(\pi d^2 h)$ цилиндрической формы по результатам прямых измерений массы m, высоты h и диаметра d цилиндра.

Отметим, что в большинстве случаев прямые измерения многих величин в скрытом виде являются косвенными. Действительно, различные стрелочные приборы (часы, весы, амперметры, вольтметры, ваттметры, термометры, манометры и т.д.) снабжены шкалами. При измерении величин посредством приборов происходит считывание показания в делениях шкалы, так что непосредственно измеряются линейные или угловые перемещения стрелки. В свою очередь отклонение стрелки связано с измеряемой величиной рядом промежуточных соотношений.

Такое сведение измерения разных величин к линейным или угловым измерениям не случайно. Действительно, наиболее развитым из наших органов чувств является зрение и нам очень удобно сравнивать пространственные величины (углы и длины), непосредственно воспринимаемые глазами.

Поскольку при косвенных измерениях значение искомой ФВ определяются по значениям других связанных с ней величин, существует возможность установить экспериментально связь между единицами измерения величин. Поэтому соотношения и закономерности, которые определяют условия косвенных измерений, позволяют строить системы единиц физических величин.

Обобщением косвенных измерений являются совокупные и косвенные измерения.

Совокупные измерения – проводимые одновременно измерения нескольких одноименных величин, при которых искомые значения величин определяют путем решения системы уравнений, получаемых при измерениях этих величин в различных сочетаниях. Для определения значений искомых величин число уравнений должно быть не меньше числа величин. Совокупные измерения проводят в том случае, когда нет возможности непосредственно измерить одноименные величины, но можно найти значения различных комбинаций данных величин.

<u>Пример 2.6.</u> Определим с помощью рычажных весов значения масс m_2, m_3 и m_4 для набора, состоящего из 4-х разных гирь, если масса 1-й гири известна: m_1 = 1 кг. Поскольку непосредственно взвесить гири невозможно, то чтобы найти значения m_2, m_3 и m_4, необходимо выполнить сравнения масс разных сочетаний гирь и получить три уравнения, связывающие m_1 m_2, m_3 и m_4. В результате измерений оказалось, что

$$m_1 + m_2 = m_3, \quad m_1 + m_3 = m_4, \quad m_1 + m_4 = m_2 + m_3. \qquad (2.1)$$

Тогда решение системы уравнений (2.1) дает, что m_2 = 2 кг, m_3 = 3 кг, m_4 = 4 кг.

Совместные измерения – проводимые одновременно измерения двух или нескольких разноименных величин для определения зависимости между ними. К таким измерениям относятся экспериментальное определение температурных зависимостей значений сопротивления проводника или емкости конденсатора.

Пример 2.7. На рис. 2.1 представлена экспериментально установленная зависимость значения сопротивления резистора от значения температуры. Данная зависимость близка к линейной и поэтому может быть аппроксимирована линейной функцией.

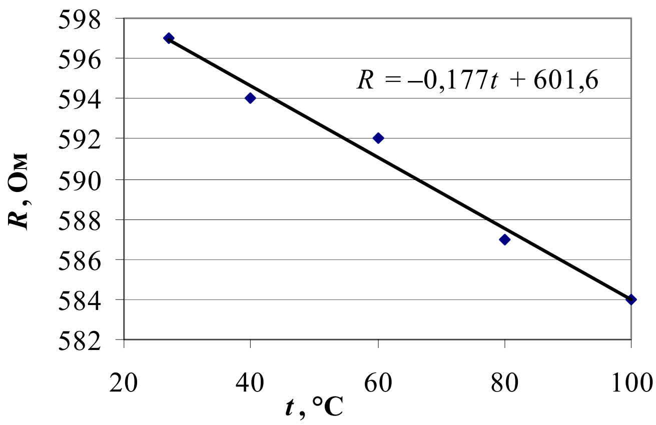


Рис. 2.1. Температурная зависимость значения сопротивления резистора

По выражению результата измерений

Абсолютное измерение – измерение ФВ, основанное на прямых измерениях одной или нескольких основных величин и (или) использовании значений физических констант. На практике в основном выполняются именно абсолютные измерения величин, так как полученные значения величин выражаются непосредственно в их единицах.

Пример 2.8. Измерение силы тяжести $F = mg$ основано на измерении основной величины – массы m – и использовании физической постоянной g (в точке измерения массы). В SI значение силы тяжести выражается непосредственно в ньютонах.

Относительное измерение – измерение отношения величины к одноименной величине, играющей роль единицы, или измерение изменения величины по отношению к одноименной величине, принимаемой за исходную. Полученные в результате относительных измерений значения величин выражаются в безразмерных единицах (процентах, промиллях, децибелах, неперах и т.д.).

Пример 2.9. При относительных измерениях напряжения измеряются отношения напряжений U/U_0, где U_0 – некоторое опорное значение напряжения, играющее роль единицы, U – значение напряжение на участке цепи. Единица напряжения (вольт) – размерная единица, отношение U/U_0 является безразмерной величиной, которое можно выразить безразмерным числом, числом в процентах или промиллях. На практике вольтметрами в децибелах измеряется логарифмическая величина

$$L = 20\lg\frac{U}{U_0}, \tag{2.2}$$

где $U_0 = 1$ В.

При относительных измерениях напряжения измеряются также отношения $\Delta U/U_0$, где U_0 – некоторое опорное (исходное) значение напряжения, $\Delta U = (U - U_0)$ – изменение напряжения U на участке цепи по отношению к U_0. Отношения $\Delta U/U_0$ измеряются при калибровке и поверке вольтметров, когда сравниваются показания U_0 высокоточного вольтметра с показаниями U калибруемого или поверяемого вольтметра.

Технические и метрологические измерения рассмотрены в п. 2.3. Различные измерения группируют по областям измерений, где дополнительно выделяют виды и подвиды измерений.

Область измерений – совокупность измерений физических величин, свойственных какой-либо области науки или техники и выделяющихся своей спецификой.

Пример 2.10. Областями измерений являются механические, электромагнитные, акустические измерения, измерения ионизирующих излучений и др.

Вид измерений – часть области измерений, имеющая свои особенности и отличающаяся однородностью измеряемых величин.

Пример 2.11. В области электромагнитных измерений видами измерений могут являться измерения электрического сопротивления, электродвижущей силы, электрического напряжения, магнитной индукции и др.

Подвид измерений – часть вида измерений, выделяющаяся особенностями измерений однородной величины (по диапазону, по размеру величины и др.).

<u>Пример 2.12.</u> При измерении длины выделяют измерения больших длин (в десятках, сотнях, тысячах километров) или измерения сверхмалых длин – толщин пленок.

2.2. Методы измерений

Любые измерения физических величин базируются на определенных принципах.

Принцип измерений – физическое явление или эффект, положенное в основу измерений.

В Примере 2.2 принципом измерений линейного размера детали является явление отражение света от поверхностей детали и линейки. Принципом измерений напряжения или силы тока посредством стрелочного прибора выступает явление взаимодействия электромагнитных полей, созданных в подвижной и неподвижной частях измерительного механизма прибора. Принцип измерений скорости звука – эффект Доплера. Принцип измерений при взвешивании тел – явление притяжения тел к Земле.

Измерение ФВ включает получение экспериментальных данных и последующую их обработку. Получение экспериментальных данных осуществляется с помощью метода измерений.

Метод измерений – прием или совокупность приемов сравнения измеряемой ФВ с ее единицей в соответствии с реализованным принципом измерений. Классификация различных видов методов измерений представлена в таблице 2.2. Выбор метода измерений обычно обусловлен устройством применяемых средств измерений.

По способу получения значения ФВ

Метод непосредственной оценки или метод прямого преобразования – метод измерений, при котором значение величины определяют непосредственно по показывающему средству измерений. Метод непосредственной оценки применяется при выполнении прямых измерений (Пример 2.5).

Метод сравнения с мерой или метод сравнения – метод измерений, в котором измеряемую величину сравнивают с однородной величиной, заданное значение которой воспроизводится мерой. По способу реализации метод сравнения подразделяется на нулевой или компенсационный метод, дифференциальный метод, метод замещения, метод дополнения и метод совпадения.

Таблица 2.2

Классификация методов измерений

Признак классификации	методы измерений
по способу получения значения ФВ	метод непосредственной оценки метод сравнения с мерой: нулевой метод дифференциальный метод метод замещения метод дополнения метод совпадения
по соприкосновению чувствительного элемента прибора с объектом измерения	контактный метод измерений бесконтактный метод измерений

Нулевой или компенсационный метод измерений – метод сравнения с мерой, в котором результирующий эффект воздействия измеряемой величины и меры на прибор сравнения доводят до нуля.

Пример 2.13. Нулевой метод реализуется при измерении массы тела путем взвешивания на рычажных весах с использованием гирь. Гири являются мерами, которые воспроизводят известные значения масс тел. На одну чашку весов помещают тело неизвестной массы, на другую – одну или несколько гирь. Массу тела определяют как сумму масс гирь при условии, что весы уравновешены, т.е. стрелка весов установилась напротив указателя нуля.

Нулевой метод реализуется также при измерении ЭДС или напряжения в цепи постоянного тока. В этом случае используется компенсатор, и сравниваются измеряемые ЭДС или напряжение на участке цепи с известной ЭДС нормального элемента (НЭ). Компенсатор является вольтметром, в котором реализуется нулевой метод измерений. НЭ – это батарея, величина ЭДС которой известна с высокой точностью. Однако НЭ обладает малой емкостью, т. е. быстро разряжается, и длительное сравнение величины ЭДС НЭ с величинами неизвестных ЭДС или напряжения невозможно. Поэтому компенсатор дополняется вспомогательным источником ЭДС $E_б$ большой емкости.

Схема простейшего компенсатора представлена на рис. 2.2, а. Она включает три замкнутые цепи: 1) цепь НЭ, 2) цепь измеряемых (неизвестных) ЭДС E_x или напряжения U_x, 3) компенсационная цепь. На схеме $E_{нэ}$ – ЭДС НЭ, $R_н$ – образцовый резистор, включенный в цепь НЭ, $R_{рег}$ – регулировочный резистор, R – высокоточный переменный резистор, $Г$ – гальванометр (высокочувствительный амперметр), $E_б$ – вспомогательный источник ЭДС, K – ключ. Измерения с помощью компенсатора проводятся в два этапа.

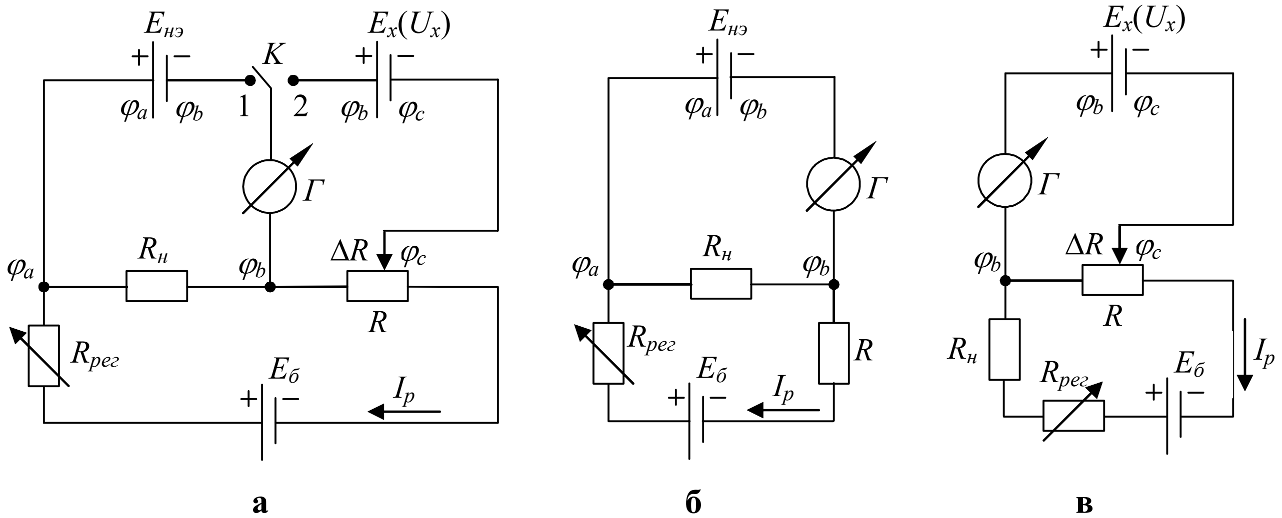


Рис. 2.2. а – схема простейшего компенсатора, б и в – схемы первого и второго этапа измерений, соответственно

Цель первого этапа – выставить в компенсационной цепи такую величину силы рабочего тока $I_р$, чтобы на резисторе $R_н$ получить $\varphi_a - \varphi_b = E_{нэ}$.

Для этого ключ K переводят в положение 1 и получают измерительную цепь, схема которой показана на рис. 2.2, б. Путем изменения сопротивления резистора $R_{рег}$ добиваются нулевого показания $Г$. В этом случае ток в цепи НЭ не протекает, т. е. потенциалы анода φ_a и катода φ_b НЭ равны соответствующим потенциалам на выводах резистора $R_н$. Тогда, согласно закону Ома для замкнутой цепи и участка цепи получим:

$$I_p = \frac{E_б}{R_{рег} + R_н + R}, \quad \varphi_a - \varphi_b = I_p R_н = E_{нэ}. \qquad (2.3)$$

Цель второго этапа – измерение неизвестных E_x или U_x.

Для этого ключ *К* переводят в положение 2 и получают измерительную цепь, схема которой показана на рис. 2.2, в. При этом сила тока I_p остается постоянной, так как постоянны величины $E_б$ и сопротивлений резисторов $R_{рег}$, $R_н$ и R. Путем изменения величины сопротивления ΔR резистора R вновь добиваются нулевого показания *Г*. В этом случае ток в цепи неизвестных E_x или U_x не протекает. Это означает, что потенциалы анода φ_b и катода φ_c источника E_x (положительного и отрицательного полюсов U_x) совпадают с соответствующими потенциалами на неподвижном и подвижном выводах резистора R. Таким образом, на части резистора ΔR воспроизведены (измерены) E_x или U_x. Действительно:

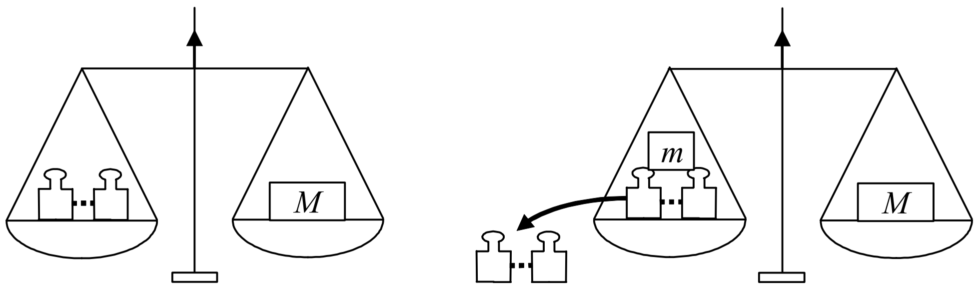
$$I_p = const, \quad \varphi_b - \varphi_c = I_p \Delta R = E_x \quad \text{или} \quad \varphi_b - \varphi_c = I_p \Delta R = U_x. \qquad (2.4)$$

Дифференциальный метод измерений – метод измерений, при котором измеряемая величина сравнивается с однородной величиной, имеющей известное значение, незначительно отличающееся от значения измеряемой величины, и при котором измеряется разность между этими двумя величинами.

Поскольку в переводе с английского языка «difference» – разность, то дифференциальный метод измерений буквально означает разностный метод измерений. Нулевой метод измерений является частным случаем дифференциального метода, когда разность между значениями измеряемой и известной величин равна нулю. Дифференциальный метод позволяет провести измерение величины с более высокой точностью по сравнению с нулевым методом, так как контролировать изменение конечной величины (разности) проще, чем изменение величины, значение которой близко к нулю.

Метод измерений замещением или метод замещения – метод сравнения с мерой, в котором измеряемую величину замещают мерой с известным значением величины.

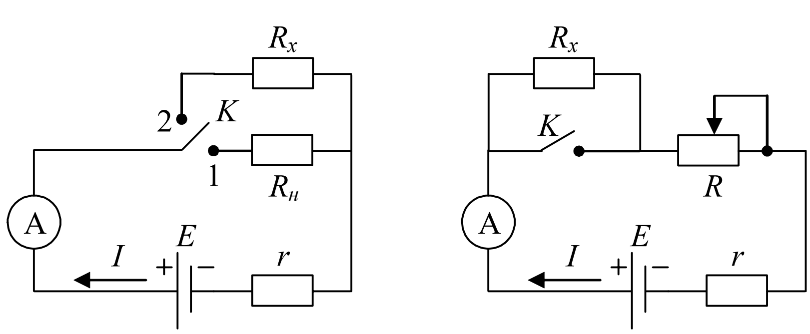
Пример 2.14. Метод замещения может быть использован при взвешивании с поочередным помещением измеряемой массы и гирь на одну и ту же чашку рычажных весов. Для реализации метода замещения необходимо располагать весами, находящимися в уравновешенном состоянии (рис. 2.3, а). При этом на одной чашке весов находятся несколько гирь с общей массой *M*, на другой – одно или несколько тел (на рис. 2.3, а изображено одно тело). Для того чтобы определить массу *m* какого-либо тела при условии, что $m < M$, тело помещают на чашку весов с гирями. Равновесие весов нарушается. Убрав часть гирь с чашки весов, вновь добиваются равновесия (рис. 2.3, б). Масса тела *m* равна массе снятых с чашки весов гирь. Таким образом, при взвешивании тело было замещено равными по суммарной массе гирями.



а **б**

Рис. 2.3. Весы в уравновешенном состоянии: а – до и б – после помещения тела массы *m* на чашку весов с гирями

Метод замещения может быть также использован при измерении сопротивления резистора. Схема измерения, в которой мерой является высокоточный постоянный резистор $R_н$, представлена на рис. 2.4, а, где R_x – резистор с неизвестным сопротивлением, *r* – внутреннее сопротивление источника ЭДС *E*, А – амперметр с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением.



а **б**

Рис. 2.4. Измерение сопротивления резистора: а – методом замещения, б – методом дополнения

При переключении ключа K в положение 1 через резистор $R_н$ будет протекать постоянный ток. Сила тока $I_н$ измеряется амперметром. Согласно закону Ома $I_н$ равна:

$$I_н = \frac{E}{r + R_н}. \qquad (2.5)$$

В положении 2 ключа ток протекает через резистор R_x. Сила тока I_x измеряется амперметром. Она равна:

$$I_x = \frac{E}{r + R_x}. \qquad (2.6)$$

Из (2.6) с учетом (2.5) получим, что

$$R_x = \frac{E}{I_x} - r = \frac{I_н}{I_x}\left(r + R_н\right) - r. \qquad (2.7)$$

Таким образом, для нахождения значения сопротивления резистора методом замещения резистор замещается (заменяется) в замкнутой цепи другими резисторами с известными сопротивлениями.

Метод измерений дополнением или метод дополнения – метод сравнения с мерой, в котором значение измеряемой величины дополняется мерой этой же величины с таким расчетом, чтобы на прибор сравнения воздействовала их сумма, равная заранее заданному значению.

Пример 2.15. Схема измерения сопротивления резистора R_x методом дополнения, где в качестве меры используется высокоточный переменный резистор R ($R > R_x$), представлена на рис. 2.4, б. Отметим, что под R понимается максимальное сопротивление переменного резистора. В замкнутом положении ключа K ток протекает через резистор R. Амперметром А измеряется сила тока I в цепи при некотором сопротивлении R_1 переменного резистора. Сила тока I равна:

$$I = \frac{E}{r + R_1}. \qquad (2.8)$$

В разомкнутом положении ключа сила тока, протекающего через резисторы R_x и R, уменьшается. Уменьшая сопротивление переменного резистора до значения R_2, вновь добиваются прежнего показания амперметра. В этом случае сила тока I равна:

$$I = \frac{E}{r + R_2 + R_x}. \qquad (2.9)$$

Из (2.8) и (2.9) получим, что

$$R_x = R_1 - R_2. \qquad (2.10)$$

Измерить сопротивление резистора R_x можно иначе: сначала выставить некоторое значение силы тока в разомкнутом положении ключа, затем получить выбранное значение силы тока в замкнутом положении ключа и по разности значений сопротивлений переменного резистора R_1 и R_2 определить R_x.

Метод совпадения – метод сравнения с мерой, при котором равенство или разность значений измеряемой величины и величины, воспроизводимой мерой, фиксируются по совпадению отметок шкалы, сигналов и другим признакам.

Пример 2.16. Метод совпадения используется при измерении

- линейных размеров тел с помощью линейки, штангенциркуля, микрометра,
- плоских углов с помощью транспортира.

По соприкосновению чувствительного элемента прибора с объектом измерения

Контактный метод измерений – метод измерений, основанный на том, что чувствительный элемент прибора приводится в контакт с объектом измерения.

Пример 2.17. Контактный метод измерений используется

- при измерении диаметра вала измерительной скобой или его контроле проходным и непроходным калибрами,
- при измерении температуры тела термометром.

Бесконтактный метод измерений – метод измерений, основанный на том, что чувствительный элемент средства измерений не приводится в контакт с объектом измерения.

Пример 2.18. Бесконтактный метод измерений применяется при измерении

- расстояния до объекта радиолокатором,
- температуры в доменной печи пирометром.

До выполнения измерений необходимо не только выбрать подходящий метод измерения, но и указать четкую последовательность действий, которые нужно осуществить, чтобы получить результат измерений. Поэтому составляется методика выполнения измерений.

Методика выполнения измерений или методика измерений (МВИ) – установленная совокупность операций и правил при измерении, выполнение которых обеспечивает получение результатов измерений с гарантированной точностью в соответствии с принятым методом. МВИ регламентируется какой-либо нормативно-технической документацией (НТД).

2.3. Средства измерительной техники

Измерения выполняются с помощью средств измерительной техники.

Средства измерительной техники или измерительная техника – технические средства, специально предназначенные для измерений. К измерительной технике относят средства измерений и их совокупности (измерительные системы, измерительные установки), измерительные устройства (составные части средств измерений), измерительные принадлежности. При оценивании свойств объекта измерения по условным шкалам «средствами измерений» этих свойств выступают сами шкалы.

Поскольку измерение ФВ сводится к экспериментальному сопоставлению размера данной ФВ с единицей ее измерения, то в средстве измерений должна быть заложена возможность хранить или воспроизводить единицу измерения ФВ, размер которой остается практически неизменным в течение некоторого промежутка времени.

Средство измерений (СИ) – техническое средство, предназначенное для измерений, воспроизводящее и (или) хранящее единицу ФВ, размер которой принимают неизменным (в пределах установленной погрешности) в течение известного интервала времени, и имеющее нормированные метрологические характеристики.

Пример 2.19. Средствами измерений являются измерительные преобразователи, приборы, установки или системы.

Если размер единицы ФВ в процессе измерений каким-либо СИ изменяется более чем установлено нормами, таким СИ нельзя получить результат с требуемой точностью. В этом случае СИ изымается из эксплуатации, ремонтируется и тестируется на соответствие заявленным метрологическим характеристикам.

Метрологическая характеристика средства измерений – характеристика одного из свойств СИ, влияющая на результат измерений и на его погрешность. К метрологическим характеристикам (МХ) относятся цена деления шкалы (для приборов со стрелочным или световым указателями), чувствительность, класс точности и т.д. МХ, устанавливаемые нормативно-техническими документами, называют *нормируемыми* МХ, а определяемые экспериментально – *действительными* МХ. Для нормируемых МХ определены допускаемые отклонения реальных характеристик от номинальных, а также допускаемые значения погрешностей.

Средства измерений снабжаются измерительными принадлежностями.

Измерительные принадлежности – вспомогательные средства, служащие для обеспечения необходимых условий для выполнения измерений с требуемой точностью.

Пример 2.20. Измерительными принадлежностями являются термостат, барокамера, тренога для установки СИ по уровню, специальные противовибрационные фундаменты, устройства, экранирующие влияние электромагнитных полей.

Выделяют различные типы и виды средств измерений.

Тип СИ – совокупность средств измерений одного и того же назначения, основанных на одном и том же принципе действия, имеющих одинаковую конструкцию и изготовленных по одной и той же технической документации. Средства измерений одного типа могут иметь различные модификации, различающиеся по значениям некоторых МХ.

Вид СИ – совокупность средств измерений, предназначенных для измерений данной ФВ. Вид средств измерений может включать несколько их типов.

Пример 2.21. Вольтметры различных типов В3-38, Ф563 и Р306 относятся к одному виду средств измерений электрического напряжения.

Средства измерений можно разделить на несколько групп. Классификация групп средств измерений представлена в таблице 2.3. Рассмотрим группы СИ по признакам классификации.

Таблица 2.3

Классификация средств измерений

Признак классификации	Средства измерений
по отношению к измеряемой ФВ	основное СИ вспомогательное СИ
по соответствию требованиям стандартов	стандартизованное СИ нестандартизованное СИ
по уровню автоматизации измерений	неавтоматизированное СИ автоматизированное СИ автоматическое СИ
по техническому назначению	мера измерительный прибор измерительный преобразователь измерительная установка измерительная система измерительно-вычислительный комплекс средство сравнения стандартный образец
по метрологическому назначению	рабочее СИ эталон

По отношению к измеряемой ФВ

Основное СИ – СИ той ФВ, значение которой необходимо получить в соответствии с измерительной задачей.

Вспомогательное СИ – СИ той ФВ, влияние которой на основное СИ или объект измерений необходимо учитывать для получения результатов измерений требуемой точности.

Пример 2.22. При измерении посредством вольтметра действующего значения напряжения в цепи переменного синусоидального тока контролируется также с помощью частотомера значение частоты напряжения. В этом случае вольтметр – основное СИ, частотомер – вспомогательное СИ.

При измерении посредством расходомера объемного расхода газа контролируется также с помощью термометра температура газа. Здесь расходомер – основное СИ, термометр – вспомогательное СИ.

По соответствию требованиям стандартов

Стандартизованное СИ – СИ, изготовленное и применяемое в соответствии с требованиями государственного или отраслевого стандарта. Средства измерений, предназначенные для серийного или массового производства, являются стандартизированными.

Нестандартизованное средство измерений (НСИ) – СИ, стандартизация требований к которому признана нецелесообразной. К нестандартизованным средствам измерений относятся

- единичные экземпляры средств измерений серийного выпуска с нормированными МХ, в конструкцию которых внесены изменения, влияющие на значения МХ или применяемые в условиях, отличающихся от условий, для которых нормированы их МХ,
- опытные образцы СИ, изготовленные для проведения экспериментальных, научно-исследовательских и опытно- конструкторских работ,
- единичные экземпляры или мелкие партии средств измерений, изготовленные для контроля технологического процесса или приобретенные по импорту и не внесенные в Государственный реестр РФ (Госреестр),
- измерительные системы, измерительно-вычислительные комплексы и их компоненты,
- эталоны.

Стандартизованные и некоторые нестандартизованные средства измерений подвергают испытаниям и вносят в Госреестр. Госреестр предназначен для регистрации средств измерений, типы которых утверждены Ростехрегулированием.

По уровню автоматизации измерений

Развитие современной измерительной техники связано с внедрением автоматизации измерений.

Автоматизация измерений – совокупность методических, технических и программных средств, применение которых освобождает человека частично или полностью от непосредственного участия в процессе измерения ФВ. Посредством автоматизации повышаются производительность труда при измерениях и точность выполняемых измерений.

Неавтоматизированное СИ – СИ, использование которого для измерения ФВ возможно только при непосредственном участии человека. Применяя неавтоматизированное СИ, оператор производит отчет и сбор показаний СИ, выполняет обработку результатов измерений и вырабатывает соответствующие решения или исполнительные команды.

Автоматизированное СИ – СИ, производящее в автоматическом режиме одну или часть измерительных операций. Использование автоматизированного СИ частично освобождает человека от непосредственного участия в процессе измерения ФВ. Применение автоматизированного СИ позволяет автоматизировать процессы отсчета и сбора показаний СИ, обработку результатов измерений. Функции оператора сводятся к выработке соответствующих решений или исполнительных команд.

Автоматическое СИ – СИ, производящее без непосредственного участия человека измерения и все операции, связанные с обработкой результатов измерений, их регистрацией, передачей данных или выработкой управляющего сигнала. Автоматическое СИ, встроенное в автоматическую технологическую линию, называют *измерительным* или *контрольным автоматом*.

Пример 2.23. Стрелочные амперметры и вольтметры являются неавтоматизированными средствами измерений; барограф (самопишущий прибор для непрерывной записи значений атмосферного давления), электрический счетчик электроэнергии (измерение и регистрация данных нарастающим итогом) – автоматизированные средства измерений, информационно-вычислительный комплекс – автоматическое СИ.

По техническому назначению

Мера ФВ – СИ, предназначенное для воспроизведения и (или) хранения ФВ одного или нескольких заданных размеров, значения которых выражены в установленных единицах и известны с необходимой точностью. Меры используются для реализации всех видов метода сравнения, так как именно с их помощью получают известные значения величин. Различают следующие виды мер: однозначные и многозначные меры, набор и магазин мер.

Однозначная мера – мера, воспроизводящая ФВ одного размера.

Пример 2.24. Однозначными мерами являются гиря какой-либо определенной массы, постоянный резистор и НЭ (Примеры 2.13 и 2.14), конденсатор постоянной емкости, катушка постоянной индуктивности.

Многозначная мера – мера, воспроизводящая ФВ разных размеров.

Пример 2.25. Многозначными мерами являются линейка, штангенциркуль, микрометр, транспортир, переменный резистор (Пример 2.15), конденсатор переменной емкости, катушка переменной индуктивности (вариометр).

Набор мер – комплект мер разного размера одной и той же ФВ, предназначенных для применения на практике, как в отдельности, так и в различных сочетаниях.

Пример 2.26. Наборами мер являются набор гирь, набор концевых мер длины.

Магазин мер – набор мер, конструктивно объединенных в единое устройство, в котором имеются приспособления для их соединения в различных комбинациях.

Пример 2.27. Магазинами мер являются магазины электрических сопротивлений, емкостей, индуктивностей.

При оценивании величин по условным (неметрическим) шкалам, имеющим реперные точки, в качестве «меры» выступают вещества или материалы с приписанными им условными значениями величин.

Пример 2.28. Для шкалы Мооса мерами твердости являются минералы различной твердости. Приписанные им значения твердости образуют ряд реперных точек условной шкалы.

Измерительный прибор – СИ, предназначенное для получения значений измеряемой ФВ в установленном диапазоне. В измерительном приборе сигнал измерительной информации вырабатывается в форме, доступной для непосредственного восприятия оператором. Поэтому прибор всегда снабжается отсчетным устройством.

Измерительный преобразователь (ИП) – СИ, служащее для преобразования измеряемой величины в другую величину или измерительный сигнал, удобный для обработки, хранения, дальнейших преобразований, индикации или передачи. В ИП сигнал измерительной информации вырабатывается в форме, недоступной для непосредственного восприятия оператором. Поэтому ИП не содержит отсчетного устройства. ИП или входит в состав какого-либо измерительного прибора (измерительной установки, измерительной системы и др.), или применяется вместе с каким-либо средством измерений.

Измерительные приборы и преобразователи представляют самую распространенную и многочисленную группу средств измерений. Их классификация представлена в п. 2.5 и 2.6.

Измерительная установка – совокупность функционально объединенных мер, измерительных приборов, измерительных преобразователей и других устройств, предназначенная для измерений одной или нескольких физических величин и расположенная в одном месте. Измерительную установку, применяемую для поверки, называют *поверочной установкой*, а измерительную установку, входящую в состав эталона, – *эталонной установкой*.

Пример 2.29. Измерительными установками являются

- совокупность средств измерений, используемых при выполнении различных лабораторных работ.
- совокупность приборов и измерительных преобразователей в автомобиле.
- совокупность средств измерений, используемых для определения удельного сопротивления электротехнических материалов,
- совокупность средств измерений, используемых для проведения испытаний магнитных материалов.

Некоторые крупногабаритные измерительные установки называют *измерительными машинами*.

Измерительная машина – измерительная установка крупных размеров, предназначенная для точных измерений физических величин, характеризующих изделие.

Пример 2.30. Измерительными машинами являются силоизмерительная машина, машина для измерения больших длин в промышленном производстве, делительная машина, координатно-измерительная машина.

Измерительная система (ИС) – совокупность функционально объединенных мер, измерительных приборов, измерительных преобразователей, ЭВМ и других технических средств, размещенных в разных точках контролируемого объекта и т.п. с целью измерений одной или нескольких физических величин, свойственных этому объекту, и выработки измерительных сигналов в разных целях. По назначению измерительные системы разделяют на *измерительные информационные, измерительные контролирующие, измерительные управляющие системы* и др. ИС, перестраиваемую в зависимости от изменения измерительной задачи, называют *гибкой измерительной системой* (ГИС).

Пример 2.31. Измерительными системами являются

- радионавигационная система для определения местоположения различных объектов,

- ИС теплоэлектростанции, содержащая сотни измерительных каналов и позволяющая получать измерительную информацию о ряде физических величин в разных энергоблоках.

В состав ИС входит измерительно-вычислительный комплекс.

Измерительно-вычислительный комплекс (ИВК) – функционально объединенная совокупность средств измерений, ЭВМ и вспомогательных устройств, предназначенная для выполнения в составе измерительной системы конкретной измерительной задачи.

Пример 2.32. В состав радионавигационной системы входит ряд измерительно-вычислительных комплексов, разнесенных в пространстве на значительное расстояние друг от друга. Каждый ИВК «несет ответственность» за определение координат объектов в указанном секторе пространства.

Средство сравнения – техническое средство или специально создаваемая среда, посредством которых возможно выполнять сравнения друг с другом мер однородных величин или показания измерительных приборов. В некоторых случаях техническое средство снабжается СИ, обеспечивающим функцию сравнения. Средство сравнения, предназначенное для сличения мер однородных величин, называется *компаратором*.

Пример 2.33. Компаратором является такое техническое средство как рычажные весы, на одну чашку которых устанавливается эталонная гиря, а на другую – поверяемая.

Средствами сравнения являются также

- *градуировочная жидкость* для сравнения показаний эталонного и рабочего ареометров, которая служит необходимой средой для градуирования рабочих ареометров,
- среда в виде температурного поля, создаваемого термостатом для сравнения показаний термометров,
- среда, давление которой создается компрессором и измеряется поверяемым и эталонным манометрами одновременно для градуирования поверяемого прибора.

Стандартный образец (СО) – образец вещества (материала) с установленными в результате метрологической аттестации значениями одной или более величин, характеризующими свойство или состав этого вещества (материала). Различают *стандартные образцы свойства* и *стандартные образцы состава*.

Стандартные образцы свойств и состава веществ (материалов) являются аналогами однозначных мер. Они могут применяться в качестве рабочих эталонов (с присвоением разряда по государственной поверочной схеме).

Пример 2.34. Стандартными образцами свойств являются: СО относительной диэлектрической проницаемости, СО высокочистой бензойной кислоты.

СО состава является СО состава углеродистой стали.

По метрологическому назначению

Рабочее СИ – СИ, предназначенное для измерений, не связанных с передачей размера единицы другим средствам измерений.

Эталон единицы ФВ *или эталон* – средство измерений (или комплекс средств измерений), предназначенное для воспроизведения и (или) хранения единицы ФВ и передачи ее размера нижестоящим по поверочной схеме средствам измерений и утвержденное в качестве эталона в установленном порядке. Конструкция эталона, его свойства и способ воспроизведения единицы определяются природой данной ФВ и уровнем развития измерительной техники в данной области измерений. Эталоны утверждаются Ростехрегулированием.

Средства измерений, широко используемые на производстве, в науке и повседневной жизни, являются рабочими средствами измерений. Эталоны –дорогостоящее оборудование, они малочисленны, хранятся и применяются в специализированных условиях.

Измерения, выполняемые с помощью рабочих средств измерений, называются *техническими измерениями*. Измерения, выполняемые с помощью эталонов, называются *метрологическими измерениями*. На практике в основном проводятся технические измерения.

Технические и метрологические измерения выполняются посредством узаконенных средств измерений.

Узаконенное СИ – СИ, признанное годным и допущенное для применения уполномоченным на то органом. Узаконенными средствами измерений являются эталоны и рабочие средства измерений, внесенные в Госреестр.

При измерениях часто используются индикаторы.

Индикатор – техническое средство или вещество, предназначенное для установления наличия какой-либо ФВ или превышения уровня ее порогового значения. Индикатор близости к нулю сигнала называют *нулевым* или *нуль-индикатором*.

Пример 2.35. Индикатором наличия (или отсутствия) измерительного сигнала может служить осциллограф. При химических реакциях в качестве индикатора применяют лакмусовую бумагу и какие-либо вещества. В области измерений ионизирующих излучений индикатором часто является устройство, которое дает световой и (или) звуковой сигнал о превышении уровнем радиации его порогового значения.

2.4. Структурные элементы средств измерений

В общем случае в состав СИ входят (рис. 2.5.) измерительная цепь (ИЦ), измерительный механизм (ИМ), показывающее устройство (ПУ) и регистрирующее устройство (РУ).

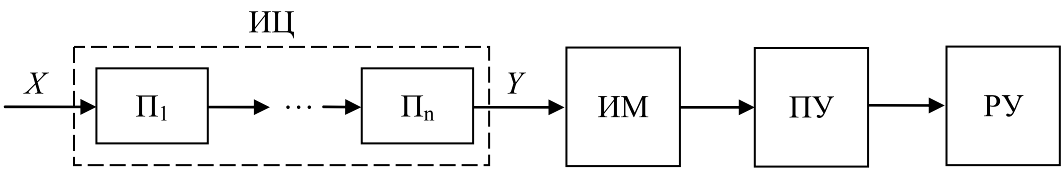


Рис. 2.5. Обобщенная структурная схема СИ

ИЦ – совокупность элементов СИ, образующих непрерывный путь прохождения измерительного сигнала одной ФВ от входа до выхода. ИЦ измерительной системы называют *измерительным каналом*. В состав СИ могут входить несколько измерительных цепей. ИЦ представляет собой набор последовательно соединенных измерительных преобразователей $П_1$, $П_2$, …, $П_n$. Входной сигнал X воздействует на *чувствительный эле-*

мент и последовательно преобразуется в преобразователях в выходной сигнал *Y*, который подается в ИМ.

Чувствительный элемент СИ – часть ИП в измерительной цепи, воспринимающая входной измерительный сигнал.

ИМ – совокупность элементов СИ, которые обеспечивают необходимое перемещение указателя (стрелки, светового пятна и т.д.).

Пример 2.36. ИМ магнитоэлектрического милливольтметра состоит из постоянного магнита и подвижной рамки.

ПУ – совокупность элементов СИ, которые обеспечивают визуальное восприятие значений измеряемой величины или связанных с ней величин. ПУ приборов называют также *отсчетным устройством*. ПУ электромеханических приборов и аналоговых электронных приборов включает указатель и циферблат, на котором нанесена шкала. ПУ цифрового измерительного прибора является *цифровое табло*.

Указатель СИ – часть ПУ, положение которой относительно отметок шкалы определяет показания СИ.

Пример 2.37. У барометра-анероида указателем является подвижная стрелка, у вольтметра Ф563 – световой «зайчик», у ртутного термометра – верхняя поверхность столбика жидкости.

Шкала СИ – часть показывающего устройства СИ, представляющая собой упорядоченный ряд отметок вместе со связанной с ними нумерацией. Отметки на шкалах могут быть нанесены равномерно или неравномерно. Соответственно, выделяют *равномерные* и *неравномерные* шкалы.

РУ – совокупность элементов СИ, которые регистрируют значение измеряемой или связанной с ней величины.

Пример 2.38. РУ измерительного прибора включает ленту для записи, лентопротяжный механизм и пишущий элемент.

Отметим, что ИМ, ПУ и РУ по существу являются выделенными измерительными цепями. В составе СИ выделяют также ряд измерительных устройств.

Измерительное устройство – часть измерительного прибора (установки или системы), связанная с измерительным сигналом и имеющая обособленную конструкцию и назначение.

Пример 2.39. Измерительными устройствами являются РУ, ИП.

Рассмотрим особенности шкал СИ. У шкал имеются отметки и нумерация.

Отметка шкалы – знак на шкале СИ (черточка, зубец, точка и др.), соответствующий некоторому значению ФВ.

Числовая отметка шкалы – отметка шкалы СИ, у которой проставлено число.

Деление шкалы – промежуток между двумя соседними отметками шкалы СИ.

Длина деления шкалы – расстояние между осями (или центрами) двух соседних отметок шкалы, измеренное вдоль воображаемой линии, проходящей через середины самых коротких отметок шкалы.

Цена деления шкалы или постоянная СИ – разность значений величины, соответствующих двум соседним отметкам шкалы СИ.

Длина шкалы – длина линии, проходящей через центры всех самых коротких отметок шкалы средства измерений и ограниченной начальной и конечной отметками. Линия может быть реальной или воображаемой, кривой или прямой. Длина шкалы выражается в единицах длины независимо от единиц, указанных на шкале.

Начальное значение шкалы – наименьшее значение измеряемой величины, которое может быть отсчитано по шкале средства измерений.

Конечное значение шкалы – наибольшее значение измеряемой величины, которое может быть отсчитано по шкале средства измерений.

Пример 2.40. На равномерной шкале вольтметра (рис. 2.6) отметки шкалы – черточки (штрихи), числовые отметки – штрихи с числами 0, 1, 2, 3, 4, 5. Шкала содержит 25 делений. Длина деления равна 2 мм. Цена деления составляет 0,2 В/дел. Длина шкалы равна длине отрезка между числовыми отметками 0 и 5, т.е. 50 мм. Начальным значением шкалы является 0 В, конечным значением шкалы – 5 В.

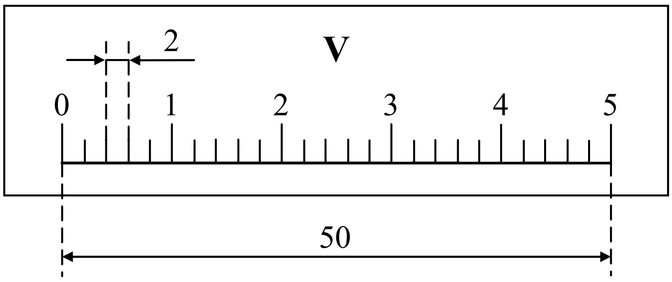


Рис. 2.6. Равномерная шкала вольтметра

2.5. Классификация измерительных приборов

Измерительные приборы можно разделить на несколько групп. Классификация групп измерительных приборов представлена в таблице 2.4. Рассмотрим группы приборов по признакам классификаций.

По реализуемому методу измерения

Приборы прямого действия – приборы, в которых реализуется одно или несколько преобразований сигнала измерительной информации в одном направлении. С помощью прибора прямого действия значение ФВ измеряется методом непосредственной оценки. Структурная схема прибора прямого действия представлена на рис. 2.5.

Приборы сравнения – приборы, в которых измеряемая ФВ сравнивается с известным значением ФВ, воспроизводимой мерой. С помощью прибора сравнения значение ФВ измеряется одним из видов метода сравнения. Схема прибора сравнения (рис. 2.7) состоит из ИЦ прямого преобразования, ИЦ обратного преобразования, меры, схемы сравнения, ИМ, ПУ и РУ. ИЦ прямого преобразования состоит из последовательно соединенных измерительных преобразователей $П_1$, $П_2$, …, $П_n$. ИЦ обратного преобразования состоит из последовательно соединенных измерительных преобразователей П`$_1$, П`$_2$, …, П`$_k$ и реализует обратную связь, которая управляет мерой.

Таблица 2.4

Классификация измерительных приборов

Признак классификации	Виды измерительных приборов
по реализуемому методу измерения	приборы прямого действия приборы сравнения
по типу показаний	аналоговые приборы цифровые приборы
по принципу действия	электромеханические приборы электронные приборы
по способу индикации значений измеряемой ФВ	показывающие приборы регистрирующие приборы
по функциональной зависимости показаний	приборы текущего значения суммирующие приборы интегрирующие приборы

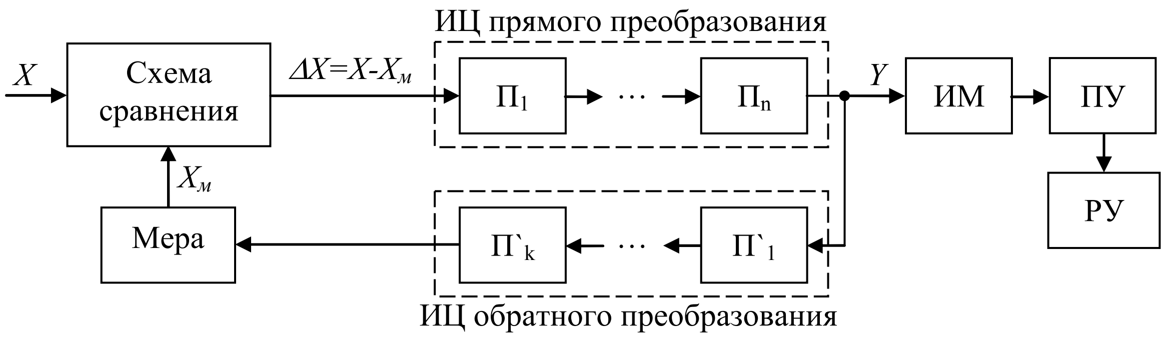


Рис. 2.7. Структурная схема прибора сравнения

Сравнение входного сигнала X с сигналом $X_м$, поступающим от меры, осуществляется в схеме сравнения. В результате сравнения X и $X_м$ образуется разностный сигнал ΔX, который по ИЦ прямого преобразования передается к ИМ и ПУ. С помощью ИЦ обратного преобразования обеспечивается изменение $X_м$ и реализуется один из видов метода сравнения. Так, при нулевом методе добиваются нулевых показаний ПУ, т. е. компенсируют X и $X_м$, при дифференциальном методе на ИМ и ПУ воздействует сигнал *Y*, определяемый *ΔX*. Приборы сравнения по сравнению с приборами прямого действия являются более сложными, но и более точными приборами.

Пример 2.41. Пружинные весы со шкалой являются прибором прямого действия. Рычажные весы с указателем нуля – прибор сравнения, с помощью которого определяется значения массы тел путем применения нулевого метода.

Вольтметр В3-38 является прибором прямого действия, потенциометр Р306 – прибор сравнения, с помощью которого определяются значения напряжения, ЭДС, силы тока и сопротивления путем применения нулевого метода.

Приборы часто имеют комбинированную структурную схему, т. е. объединяют приборы прямого преобразования и сравнения.

По типу показаний

Аналоговые приборы – приборы, показания которых или выходная величина являются непрерывными функциями изменений измеряемых величин. Соответственно, величины, являющиеся непрерывными функциями изменений измеряемых величин, называются *аналоговыми* или *непрерывными* величинами.

Цифровые приборы – приборы, в которых вырабатываются дискретные сигналы измерительной информации, а показания представляются в цифровой форме.

Как указывалось в п. 2.4 аналоговые и цифровые приборы внешне отличаются видом ПУ.

По принципу действия

Электромеханические приборы – приборы прямого действия, в которых электромагнитная энергия преобразуется в механическую энергию перемещения подвижной части прибора относительно неподвижной. Данное перемещение может быть линейным или угловым. В электромеханических приборах измеряемый сигнал не усиливается.

Электронные приборы – приборы, в которых измеряемый сигнал сначала усиливается, а затем подается на измерительное устройство. Электронные приборы включают в состав измерительные цепи, содержащие диоды, транзисторы и микросхемы. В составе электронных аналоговых приборов в качестве ПУ используются электромеханические приборы.

Пример 2.42. М265М является электромеханическим микроамперметром, В3-38 – аналоговым электронным вольтметром.

По способу индикации значений измеряемой ФВ

Показывающие приборы – приборы, которые допускают только отсчет показаний. В состав показывающего прибора не входит РУ.

Регистрирующие приборы – приборы, в которых предусмотрен отсчет и регистрация показаний. Регистрирующие приборы подразделяются на самопишущие и печатающие приборы.

Самопишущие приборы – регистрирующие приборы, в которых показания регистрируются в форме диаграмм.

Печатающие приборы – регистрирующие приборы, в которых показания регистрируются путем распечатки в цифровой форме.

Пример 2.43. Показывающими приборами являются электромеханические приборы. Самопишущие приборы – барограф (Пример 2.23) и приборы, отображающие электрокардиограмму сердечной деятельности. Печатающий прибор – электронные весы, позволяющие распечатать чек для покупателя с указанием всех параметров приобретаемого товара.

Широкое внедрение автоматизации измерений привело к тому, что в настоящее время в основном выпускаются регистрирующие приборы, в которых показания фиксируются не виде распечатки, а запоминаются в цифровой форме и по специальной линии связи могут быть переданы в персональную или специализированную ЭВМ для дальнейшей обработки, хранения и передачи.

По функциональной зависимости показаний

Приборы текущего значения – приборы, показания которых функционально связаны с одной измеряемой ФВ, воздействующей на его чувствительный элемент.

Суммирующие приборы – приборы, показания которых функционально связаны с суммой двух или нескольких величин, подводимых к приборам по различным каналам.

Интегрирующие приборы – приборы, в которых значения измеряемой ФВ интегрируются по другой независимой величине.

Пример 2.44. Вольтметр В3-38 является прибором текущего значения. Суммирующим прибором является ваттметр, предназначенный для измерения суммарной мощности нескольких генераторов. Интегрирующим прибором является счетчик электроэнергии, так как в нем активная мощность интегрируется по времени.

2.6. Классификация измерительных преобразователей

Измерительные преобразователи можно также разделить на несколько групп. Классификация групп измерительных преобразователей представлена в таблице 2.5.

Таблица 2.5

Классификация измерительных преобразователей

Признак классификации	Измерительные преобразователи
по виду преобразуемых величин	преобразователи электрических величин в электрические преобразователи неэлектрических величин в электрические
по месту в ИЦ	первичные преобразователи промежуточные преобразователи
по виду преобразования	аналоговые преобразователи аналого-цифровые преобразователи цифро-аналоговые преобразователи

Рассмотрим группы измерительных преобразователей по признакам классификации.

По виду преобразуемых величин

С помощью преобразователей электрических величин в электрические измеряются электрические величины. К таким преобразователям относятся масштабные преобразователи, преобразователь Холла и др. Применение указанных преобразователей позволяет расширить переделы измерения электрических величин (масштабные преобразователи), проводить измерения индукции магнитного поля (преобразователь Холла).

Масштабный ИП – ИП, в котором значение входной величины изменяется в заданное число раз. Масштабными преобразователями являются шунты, добавочные резисторы, измерительные трансформаторы, делители напряжения и др.

Пример 2.45. Рассмотрим резистивный делитель напряжения (рис. 2.8, а). Делитель напряжения – 4-полюсник, включающий два резистора R_1 и R_2. Сила тока

$$I = \frac{U_1}{R_1 + R_2}, \tag{2.11}$$

где U_1 – напряжение на входе. Напряжение на выходе

$$U_2 = IR_2 = U_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \tag{2.12}$$

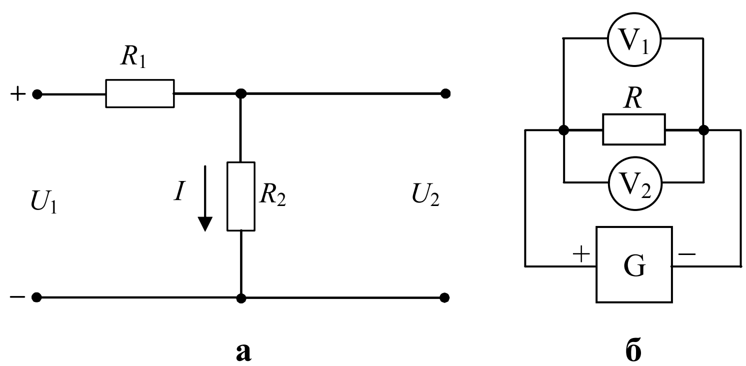


Рис. 2.8. а – резистивный делитель напряжения,
б – схема измерения для определения вариации показаний вольтметра V_1

Таким образом, если $R_1 \gg R_2$, то

$$U_2 \approx U_1 \frac{R_2}{R_1}. \quad (2.13)$$

Если R_1 = 10 кОм, R_2 = 100 Ом, то входное напряжение уменьшается в 100 раз.

С помощью преобразователей неэлектрических величин в электрические измеряются неэлектрические величины, связанные определенной функциональной зависимостью с преобразованными электрическими величинами. Выделяют параметрические и генераторные преобразователи неэлектрических величин в электрические.

Параметрические преобразователи – преобразователи, в которых выходной величиной является параметр электрической цепи (сопротивление, индуктивность, взаимная индуктивность, емкость).

Генераторные преобразователи – преобразователи, в которых выходной величиной является ЭДС или заряд.

Применение преобразователей неэлектрических величин в электрические позволяет проводить измерения

- тепловых величин (температура, количество теплоты),
- механических и геометрических величин (силы, моменты сил, механические напряжения, давление, деформации, перемещения, скорости, ускорения, размеры, расходы, уровни),
- величин, характеризующих излучения (потоки излучения, спектральный состав), и т.д.

По месту в ИЦ

Первичный измерительный преобразователь (ПИП) – ИП, на который непосредственно воздействует измеряемая ФВ, т.е. первый преобразователь в ИЦ измерительного прибора (установки, системы). В одном СИ может быть несколько первичных преобразователей.

Промежуточный ИП – ИП, который располагается в ИЦ после ПИП.

<u>Пример 2.46.</u> В цепи термоэлектрического термометра, состоящего из термопары, добавочного резистора и микроамперметра, ПИП является термопара, промежуточным ИП – добавочный резистор.

В измерительно-контролирующей системе задействуется ряд первичных преобразователей, расположенных в разных точках контролируемой среды.

Некоторые первичные измерительные преобразователи называют датчиками.

Датчик – конструктивно обособленный ПИП, от которого поступают измерительные сигналы (он «выдает» информацию). Датчик может быть вынесен на значительное расстояние от СИ, принимающего его сигналы. В области измерений ионизирующих излучений вместо датчика применяют термин *детектор*.

Пример 2.47. Датчики запущенного метеорологического радиозонда передают измерительную информацию о температуре, давлении, влажности и других параметрах атмосферы. Для измерения характеристик ядерных излучений применяются газонаполненные детекторы.

Первичные и промежуточные преобразователи могут использоваться как передающие преобразователи.

Передающий ИП – ИП, предназначенный для дистанционной передачи сигнала измерительной информации. Так, если термопара в цепи термоэлектрического термометра (Пример 2.46) может быть вынесена на значительное расстояние от добавочного резистора и микроамперметра, то термопара будет являться передающим ИП.

По виду преобразования

Аналоговый ИП – ИП, в котором входная аналоговая величина преобразуется в выходную аналоговую величину.

Пример 2.48. Аналоговым ИП является термопара, которая преобразует разность температур спаев в определенное значение ЭДС.

Аналого-цифровой преобразователь (АЦП) – ИП, в котором входная аналоговая величина преобразуется в выходной цифровой код, в соответствии с которым на табло устанавливается показание измеряемой ФВ.

Цифро-аналоговые преобразователь (ЦАП) – ИП, в котором входной цифровой код преобразуется в квантованную по уровню выходную аналоговую величину.

АЦП и ЦАП применяются как составные части цифровых приборов, так и как автономные устройства.

2.7. Метрологические характеристики средств измерений

Для каждого типа средств измерений устанавливают свои МХ. Стандартом ГОСТ 8.009−84 устанавливаются номенклатура (перечень) МХ, правила выбора комплексов нормируемых МХ для конкретных типов средств измерений и способы нормирования МХ в НТД на средства измерений. Предусмотрена следующая номенклатура МХ:

- характеристики, предназначенные для определения результатов измерений (без введения поправки),
- характеристики погрешностей средств измерений,
- характеристики чувствительности средств измерений к влияющим величинам,
- динамические характеристики средств измерений.

Рассмотрим некоторые МХ.

Показание СИ – значение величины или число на показывающем устройстве СИ.

Диапазон показаний СИ – область значений шкалы прибора, ограниченная начальным и конечным значениями шкалы. Диапазон показаний вольтметра в Примере 3.40 составляет от 0 до 5 В.

Диапазон измерений СИ – область значений величины, в пределах которой нормированы допускаемые пределы погрешности СИ. Значения величины, ограничивающие диапазон измерений снизу и сверху (слева и справа), называют соответственно *нижним пределом измерений* или *верхним пределом измерений*. Диапазон измерений всегда уже диапазона показаний.

Пример 2.49. Диапазон показаний вольтметра В3-38Б составляет от 0 до 300 В, диапазон измерений – от 0,1 мВ до 300 В.

Вариация показаний измерительного прибора – разность показаний прибора в одной и той же точке диапазона измерений при плавном подходе к этой точке со стороны меньших и больших значений измеряемой величины.

Пример 2.50. Требуется определить вариацию показаний вольтметра V_1 для значения напряжения 2 В. Диапазон измерений стрелочного вольтметра V_1, предназначенного для измерений в цепях постоянного тока, составляет от 0,2 до 4,8 В. Шкала вольтметра представлена на рис. 2.6.

Схема измерения (рис. 2.8, б) включает источник постоянного тока G, эталонный вольтметр V_2 и резистор *R*, на концах которого вольтметрами V_1 и V_2 измеряется напряжение. Плавно увеличивая напряжение на резисторе *R* от значения 1,6 В, зафиксируем значение напряжение 2 В на вольтметре V_1. При этом показание вольтметра V_2 составляет $U^- = 1{,}95$ В. Плавно уменьшая напряжение на резисторе *R* от значения 2,6 В, вновь зафиксируем значение напряжение 2 В на вольтметре V_1. При этом показание вольтметра V_2 составляет $U^+ = 2{,}05$ В. Таким образом, вариация показаний вольтметра V_1 для значения напряжения 2 В равна $\Delta U = \left|U^- - U^+\right| = 0{,}1$ В.

В высокочувствительных (особенно в электронных) измерительных приборах вариация имеет иной смысл и понимается как колебание показаний прибора около среднего значения (показание «дышит»).

Номинальное значение меры – значение величины, приписанное мере или партии мер при изготовлении. Номинальное значение меры указывают на корпусе меры и (или) в НТД.

Действительное значение меры – значение величины, приписанное мере на основании ее калибровки или поверки.

Пример 2.51. В состав государственного эталона единицы массы входит платиноиридиевая гиря с номинальным значением массы 1 кг, тогда как действительное значение ее массы составляет 1,000000087 кг, полученное в результате калибровки, т.е. путем международных сличений с международным эталоном килограмма, хранящимся в Международном Бюро Мер и Весов (МБМВ).

Чувствительность СИ – свойство СИ, определяемое отношением изменения выходного сигнала этого СИ к вызывающему его изменению измеряемой величины. Данное определение чувствительности не распространяется на интегрирующие и цифровые приборы. Различают абсолютную и относительную чувствительности.

Абсолютная чувствительность S и *относительная чувствительность* S_0 определяются по формулам

$$S = \frac{\Delta l}{\Delta x}, \quad S_0 = \frac{\Delta l x}{\Delta x}, \tag{2.14}$$

где Δl – изменение сигнала на выходе, x – измеряемая величина, Δx – изменение измеряемой величины. Для аналоговых приборов Δl – угловое или линейное перемещение указателя, выраженное в делениях. Величина, обратная абсолютной чувствительности, равна цене деления СИ C.

Если S (или C) постоянна, то шкала СИ является равномерной. В этом случае S определяется отношением некоторого числа делений, соответствующего разности двух значений величины. Так, в Примере 2.40 разности значений напряжения 2 и 3 В соответствует перемещение указателя в 5 делений шкалы. Поэтому $S = 5\ \text{дел}/1\ \text{В} = 5$ дел/В.

Если S (или C) непостоянна, то шкала СИ является неравномерной. В этом случае S определяется отдельно для каждого выбранного участка шкалы вплоть до ее деления.

Порог чувствительности СИ – характеристика СИ в виде наименьшего значения изменения ФВ, начиная с которого может осуществляться ее измерение данным СИ. В Примере 2.40 порог чувствительности равен половине цены деления, т.е. 0,1 В.

Кроме терминов *чувствительность* и *порог чувствительности* на практике применяются также термины: *реагирование* и *порог реагирования, подвижность* СИ и *порог подвижности* СИ, *срабатывание* и *порог срабатывания*. Применяют также термин *пороговая чувствительность*.

Разрешение СИ – характеристика СИ, выражаемая наименьшим интервалом времени между отдельными импульсами или наименьшим расстоянием между объектами, которые фиксируются прибором раздельно. Соответственно, различают временное разрешение и пространственное разрешение.

Градуировочная характеристика СИ – зависимость между значениями величин на входе и выходе СИ, полученная экспериментально. Градуированная характеристика может быть выражена в виде формулы, графика или таблицы.

Смещение нуля – показание СИ, отличное от нуля, при входном сигнале, равном нулю. Различают *смещение механического нуля*, наблюдаемое как отклонение указателя от нуля шкалы приборов с механическими указателями, и *смещение электрического нуля*, наблюдаемое как существование выходного сигнала при нулевом входном сигнале приборов со вспомогательным источником электрической энергии.

Дрейф показаний СИ – изменение показаний СИ во времени, обусловленное изменением влияющих величин или других факторов. Если происходит дрейф показаний нуля, то применяют термин *дрейф нуля*.

Пример 2.52. Дрейфом показаний хронометра (часов) является суточный ход хронометра, определяемый как разность поправок к его показаниям, вычисленных в начале и конце суток.

Зона нечувствительности СИ – диапазон значений измеряемой ФВ, в пределах которого ее изменения не вызывают выходного сигнала СИ. Иногда зону нечувствительности называют *мертвой зоной*. Она наблюдается вблизи некоторых радионавигационных систем или измерительных установок.

Пример 2.53. Зона нечувствительности у судовой радиолокационной установки зависит от размеров судна и высоты антенны радиолокационной установки над судовыми надстройками.

Метрологическая исправность СИ – состояние СИ, при котором все нормируемые МХ соответствуют установленным требованиям.

Метрологическая надежность СИ – надежность СИ в части сохранения его метрологической исправности.

Метрологический отказ СИ – выход метрологической характеристики СИ за установленные пределы.

Пример 2.54. Если погрешность СИ класса точности ±0,01% стала превышать ±0,01%, то это значит, что произошел метрологический отказ и СИ уже не соответствует установленному ранее классу точности. Если не установлены технические неполадки, то СИ может быть присвоен другой, более низкий класс точности.

ГЛАВА 3. ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

3.1. Классификация погрешностей измерений

Измерения физических величин проводят с целью нахождения их значений посредством получения результатов измерений и последующей их обработки.

Результат измерения ФВ – значение ФВ, полученное путем ее измерения.

Ряд результатов измерений ФВ – значения одной и той же ФВ, последовательно полученные из следующих друг за другом измерений.

Результат измерения ФВ является приближенным значением ФВ, так как любое измерение производится с некоторой погрешностью (ошибкой), которая искажает результат. Погрешности возникают вследствие несовершенства методов измерений, ограниченных возможностей используемых средств измерений и индивидуальных особенностей экспериментаторов.

Погрешность результата измерения ФВ – отклонение результата измерения от действительного значения измеряемой ФВ. Погрешности измерений можно разделить на несколько групп. Классификация групп погрешностей измерений представлена в таблице 3.1. Рассмотрим группы погрешностей по признакам классификации.

По способу выражения

Абсолютная погрешность измерения Δ – погрешность измерения, выраженная в единицах измеряемой величины. Абсолютная погрешность измерения определяется по формуле

$$\Delta = x - x_д, \qquad (3.1)$$

где x – результат измерения (измеренное значение), $x_д$ – действительное значение ФВ.

Таблица 3.1

Классификация погрешностей измерений

Признак классификации	Виды погрешностей измерений
по способу выражения	абсолютные относительные
по закономерности проявления	систематические случайные промахи
по причинам возникновения	методические инструментальные внешние субъективные
по отношению к изменению измеряемой величины	статические динамические

Относительная погрешность измерения δ – погрешность измерения, выраженная отношением абсолютной погрешности измерения к действительному или измеренному значению измеряемой величины:

$$\delta = \frac{\Delta}{x_\partial} \quad \text{или} \quad \delta = \frac{\Delta}{x}. \qquad (3.2)$$

По определению δ – величина безразмерная. Часто ее выражают в процентах:

$$\delta = \frac{\Delta}{x_\partial} 100\ \% \quad \text{или} \quad \delta = \frac{\Delta}{x} 100\ \%. \qquad (3.3)$$

На практике используется также абсолютное значение погрешности.

Абсолютное значение погрешности – значение абсолютной или относительной погрешности без учета ее знака (модуль погрешности).

Одной из характеристик качества измерения является точность результата измерений.

Точность результата измерений – близость к нулю погрешности результата измерения (близость результата измерения ФВ к ее действительному значению). Количественно точность измерения выражается величиной, обратной модулю относительной погрешности, т.е. $1/|\delta|$. Поэтому считают, что чем меньше погрешность измерения, тем выше его точность и наоборот.

По закономерности проявления

Систематическая погрешность измерения ФВ – составляющая погрешности результата измерения, остающаяся постоянной или закономерно изменяющаяся при повторных измерениях одной и той же ФВ. Систематические погрешности могут быть исключены с помощью введения поправок или поправочных множителей.

Поправка – значение ФВ, вводимое с целью исключения составляющих систематической погрешности. Знак поправки противоположен знаку погрешности. Поправку, прибавляемую к номинальному значению меры, называют *поправкой к значению меры*; поправку, вводимую в показание измерительного прибора, называют *поправкой к показанию прибора*.

Различают неисправленный и исправленный результат измерения ФВ.

Неисправленный результат измерения ФВ – значение ФВ, полученное при измерении до введения в него поправок, учитывающих систематические погрешности.

Исправленный результат измерения ФВ – полученное при измерении значение ФВ и уточненное путем введения в него необходимых поправок на действие систематических погрешностей.

Поправочный множитель – числовой коэффициент, на который умножают неисправленный результат измерения ФВ с целью исключения влияния систематической погрешности. Поправочный множитель используют в случаях, когда систематическая погрешность пропорциональна значению ФВ.

Случайная погрешность измерения ФВ – составляющая погрешности результата измерения, изменяющаяся случайным образом (по знаку и значению) при повторных измерениях, проведенных с одинаковой тщательностью, одной и той же ФВ. Случайные погрешности не могут быть исключены и оцениваются с помощью методов математической статистики.

Промах или *грубая погрешность измерения* ФВ – погрешность результата отдельного измерения, входящего в ряд измерений, которая для данных условий резко отличается от остальных результатов этого ряда. Промахи возникают вследствие 1) неожиданных резких изменений внешних условий, 2) ошибочно выбранной методики измерения, 3) неисправности СИ и 4) неправильных действий оператора. Измерения с промахами не учитываются при обработке экспериментальных данных.

По причинам возникновения

Методическая погрешность или погрешность метода измерений – составляющая погрешности измерений, обусловленная несовершенством принятого метода измерений: 1) упрощением при построении модели физических явлений, которые связаны с измерениями; 2) упрощением при обработке результатов измерений. Погрешность метода называют также *теоретической погрешностью*. Методические погрешности в основном проявляются как систематические погрешности. Поэтому во многих случаях они могут быть рассчитаны и исключены с помощью введения поправок.

Пример 3.1. Требуется вольтметром с сопротивлением $R = 10$ МОм измерить ЭДС источника E с внутренним сопротивлением $r = 5$ кОм (рис. 3.1). Запишем закон Ома для замкнутой цепи:

$$I = \frac{E}{r + R}. \tag{3.4}$$

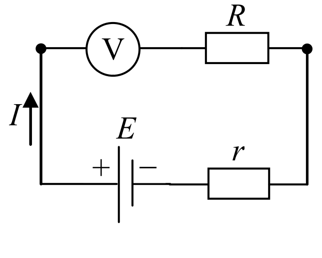


Рис. 3.1. Измерение ЭДС источника с помощью вольтметра

Значение напряжения, измеренное вольтметром, есть

$$U' = IR = \frac{ER}{r+R}. \tag{3.5}$$

U' является неисправленным результатом измерения ЭДС источника. Выразим методическую погрешность измерения ЭДС посредством относительной погрешности. Получим:

$$\delta_{мет} = \frac{U'-E}{E} = -\frac{r}{r+R}. \tag{3.6}$$

Если $R >> r$, то

$$\delta_{мет} \approx -\frac{r}{R} = -0.5\times10^{-3} = -0.05\ \%. \tag{3.7}$$

Данная методическая погрешность остается постоянной в процессе измерения, а значит, является систематической погрешностью. Ее можно исключить с помощью введения поправки $\Delta U'$, которую нужно добавить к измеряемому вольтметром напряжению U' с тем, чтобы получить значение напряжения $U = E$:

$$U = U' + \Delta U', \quad U' = \frac{E}{1-\delta_{мет}}, \quad \Delta U' = -\frac{E\delta_{мет}}{1-\delta_{мет}}. \tag{3.8}$$

Методическую погрешность (3.7) можно также исключить с помощью введения поправочного множителя q:

$$U = qU', \quad q = \frac{E}{U'} = 1-\delta_{мет}. \tag{3.9}$$

Значение U в (3.8) и (3.9) является исправленным результатом измерения ЭДС источника.

Инструментальная погрешность измерения ФВ *или погрешность* СИ – составляющая погрешности измерения, обусловленная погрешностью применяемого СИ. Инструментальная погрешность определяется разностью между показанием СИ и действительным значением измеряемой ФВ. Для меры показанием является ее номинальное значение, так что п*огрешность меры* – разность между номинальным значением меры и действительным значением воспроизводимой ею величины.

Внешняя погрешность измерения ФВ *или погрешность измерения из-за изменений условий измерения* – составляющая систематической погрешности измерения ФВ, являющаяся следствием неучтенного влияния отклонения в одну сторону от установленного значения какого-либо из параметров, характеризующих условия измерений. Внешние погрешности возникают в случае неучтенного или недостаточно учтенного действия той или иной влияющей величины (температуры, атмосферного давления, влажности воздуха, напряженности магнитного поля, вибрации и др.), неправильной установки средств измерений, нарушения правил их взаимного расположения и др.

Субъективная погрешность измерения ФВ – составляющая систематической погрешности измерений, обусловленная индивидуальными особенностями оператора. Встречаются операторы, которые систематически опаздывают (или опережают) снимать отсчеты показаний средств измерений. Субъективную погрешность называют также *личной погрешностью* или *личной разностью*.

По отношению к изменению измеряемой величины

Статическая погрешность измерений – погрешность результата измерений, свойственная условиям статического измерения ФВ (см. п. 2.1).

Динамическая погрешность измерений – погрешность результата измерений, свойственная условиям динамического измерения ФВ(см. п. 2.1).

3.2. Инструментальные погрешности измерений

Инструментальные погрешности измерений можно разделить на несколько групп. Классификация групп инструментальных погрешностей измерений представлена в таблице 3.2. Рассмотрим группы инструментальных погрешностей в соответствии с их признаками классификации.

По способу выражения

Абсолютная погрешность СИ Δ – погрешность СИ, выраженная в единицах измеряемой ФВ (см. выражение (3.1)).

Относительная погрешность СИ δ – погрешность СИ, выраженная отношением абсолютной погрешности СИ к результату измерений или к действительному значению измеренной ФВ (см. (3.2) или (3.3)).

Таблица 3.2

Классификация инструментальных погрешностей измерений

Признак классификации	Виды инструментальных погрешностей измерений
по способу выражения	абсолютные относительные приведенные
по закономерности проявления	систематические случайные
по условиям проведения измерений	основные дополнительные
по отношению к изменению измеряемой величины	статические динамические

Приведенная погрешность СИ γ – отношение абсолютной погрешности СИ Δ к нормирующему значению X_N:

$$\gamma = \frac{\Delta}{X_N}. \tag{3.10}$$

X_N выражается в единицах измеряемой величины и устанавливается в соответствии с ГОСТ 8.401−80. Таким образом, γ – величина безразмерная. Приведенная погрешность СИ, как и относительная погрешность СИ δ, также выражается в процентах, но $\delta \neq \gamma$. Относительная и приведенная погрешности СИ связаны соотношением

$$\delta = \frac{\Delta}{x} = \gamma \frac{X_N}{x}. \tag{3.11}$$

Значения X_N устанавливается для средств измерений с равномерной шкалой (длина всех делений одинакова, п. 2.4), практически равномерной шкалой, существенно неравномерной шкалой и степенной шкалой.

Практически равномерная шкала (ПРШ) – шкала, длина делений которой отличается друг от друга не более чем на 30 % и имеет постоянную цену делений.

Существенно неравномерная шкала (СНШ) – шкала с сужающимися делениями, для которой значение выходного сигнала, соответствующее полусумме верхнего и нижнего пределов диапазона изменений входного (выходного) сигнала, находится в интервале между 65 и 100 % длины шкалы, соответствующей диапазону изменений входного (выходного) сигнала.

Степенная шкала (СШ) – шкала с расширяющимися или сужающимися делениями, отличная от ПРШ и СНШ.

Для средств измерений с равномерной шкалой, ПРШ или СШ, а также для измерительных преобразователей значение X_N устанавливается

- равным большему из пределов измерений, если нулевое значение входного (выходного) сигнала находится на краю или вне диапазона измерений,
- равным большему из модулей пределов измерений, если нулевое значение находится внутри диапазона измерений.

Для электроизмерительных приборов с равномерной шкалой, ПРШ или СШ и нулевой отметкой внутри диапазона измерений значение X_N допускается устанавливать равным сумме модулей пределов измерений.

Для средств измерений физических величин, для которых принята шкала с условным нулем (п. 1.8), значение X_N устанавливают равным модулю разности пределов измерений.

Пример 3.2. Для термометра с пределами измерений 200 и 600 °С нормирующее значение устанавливается равным $X_N = 600 - 200 = 400$ °С.

Для средств измерений с установленным номинальным значением значение X_N устанавливают равным этому номинальному значению.

Пример 3.3. Для частотомеров с диапазоном измерений 45-55 Гц и номинальной частотой 50 Гц нормирующее значение $X_N = 50$ Гц.

Для измерительных приборов с СНШ значение X_N устанавливают равным всей длине шкалы или ее части, соответствующей диапазону измерений. В этом случае пределы абсолютной погрешности выражают, как и длину шкалы, в единицах длины.

В случаях, не предусмотренных выше, указания по выбору значения X_N приводятся в соответствующих стандартах на средства измерений конкретного вида.

По закономерности проявления

Систематическая погрешность СИ – составляющая погрешности СИ, принимаемая за постоянную или закономерно изменяющуюся величину с течением времени. Систематическая погрешность данного экземпляра СИ, как правило, будет отличаться от систематической погрешности другого экземпляра СИ этого же типа, вследствие чего для группы однотипных средств измерений систематическая погрешность может рассматриваться как случайная погрешность.

Случайная погрешность СИ – составляющая погрешности СИ, изменяющаяся случайным образом.

По условиям проведения измерений

Основная погрешность СИ – погрешность СИ, применяемого в нормальных условиях.

Нормальные условия измерений – условия измерения, при которых совокупность значений влияющих величин находятся в пределах их нормальных областей значений. Нормальные условия измерений устанавливаются в нормативных документах на средства измерений конкретного типа или по их поверке (калибровке).

Нормальная область значений влияющей величины – область значений влияющей величины, в пределах которой изменением результата измерений под ее воздействием можно пренебречь в соответствии с установленными нормами точности.

Пример 3.4. Нормальная область значений температуры при поверке нормальных элементов класса точности 0,005 в термостате не должна изменяться более чем на ±0,05 °С от установленной температуры 20 °С, т.е. быть в диапазоне от 19,95 до 20,05 °С.

Нормальное значение влияющей величины – значение влияющей величины, установленное в качестве номинального. Как правило, основная погрешность средств измерений рассчитывается при нормальных значениях влияющих величин.

Пример 3.5. При измерении многих величин нормальное значение температуры устанавливается равным 20 °С или 293 К, а также 296 К (23 °С).

При выполнении измерений ФВ необходимо обеспечить создание определенного рабочего пространства вокруг объекта измерений и СИ.

Рабочее пространство – часть пространства (окружающего СИ и объект измерений), в котором нормальная область значений влияющих величин находится в установленных пределах.

Дополнительная погрешность СИ – составляющая погрешности СИ, возникающая дополнительно к основной погрешности вследствие отклонения какой-либо из влияющих величин от нормального ее значения или вследствие ее выхода за пределы нормальной области значений. Дополнительная погрешность СИ определяется для рабочих условий измерений.

Рабочая область значений влияющей величины – область значений влияющей величины, в пределах которой нормируют (устанавливают пределы) дополнительную погрешность или изменение показаний СИ.

Рабочие условия измерений – условия измерений, при которых значения влияющих величин находятся в пределах рабочих областей.

Пример 3.6. Для измерительного конденсатора нормируют дополнительную погрешность на отклонение температуры окружающего воздуха от нормальной.

Для амперметра нормируют изменение показаний, вызванное отклонением частоты переменного тока от 50 Гц (50 Гц в данном случае принимают за нормальное значение частоты).

Для средств измерений устанавливают предел допускаемой погрешности и предельные условия измерений.

Предел допускаемой погрешности СИ – наибольшее значение погрешности СИ, устанавливаемое нормативным документом для данного типа средств измерений, при котором СИ еще признается годным к применению. При превышении установленного предела допускаемой погрешности СИ признается негодным для применения (в данном классе точности). Обычно устанавливают *пределы допускаемой погрешности*, то есть границы зоны, за которую не должна выходить погрешность.

Пример 3.7. Для 100-миллиметровой концевой меры длины 1-го класса точности пределы допускаемой погрешности составляют ±50 мкм.

Предельные условия измерений – условия измерений, характеризуемые экстремальными значениями измеряемой и влияющих величин, которые СИ может выдержать без разрушений и ухудшения его МХ.

По отношению к изменению измеряемой величины

Статическая погрешность СИ – погрешность СИ, применяемого при измерении ФВ, принимаемой за неизменную.

Динамическая погрешность СИ – погрешность СИ, возникающая при измерении изменяющейся (в процессе измерений) ФВ.

На практике измеряемые величины не остаются постоянными, а изменяются во времени с различными скоростями. Если скорость изменения ФВ настолько мала, что инерционные свойства СИ не проявляются, то такие измерения по существу являются статическими и полностью характеризуются статической погрешностью СИ. Если скорость изменения величины такова, что проявляются инерционные свойства СИ, то такие измерения происходят в динамическом режиме и характеризуются динамической погрешностью СИ. Динамическая погрешность СИ превышает соответствующую статическую погрешность при данном значении измеряемой ФВ.

3.3. Класс точности средств измерений

В п. 2.7 уже были представлены МХ, связанные с определением результата измерения и с оценкой погрешности СИ. Рассмотрим точностные характеристики СИ, связанные с определением класса точности средств измерений.

Точность СИ – характеристика качества СИ, отражающая близость погрешности СИ к нулю. Считается, что чем меньше погрешность СИ, тем точнее СИ.

Точностные характеристики СИ – совокупность МХ СИ, влияющих на погрешность измерения. К точностным характеристикам относят стабильность и нестабильность СИ, погрешность СИ, порог чувствительности, дрейф нуля и др.

Стабильность СИ – качественная характеристика СИ, отражающая неизменность во времени его МХ. Количественной оценкой стабильности СИ служит *нестабильность* СИ.

Нестабильность СИ – изменение МХ СИ за установленный интервал времени. Для ряда средств измерений, особенно некоторых мер, нестабильность является одной из важнейших точностных характеристик. Для нормальных элементов (мер ЭДС) обычно нестабильность устанавливается за год. Нестабильность определяют на основании длительных исследований СИ, при этом полезны периодические сличения с более стабильными средствами измерений.

Пример 3.8. Нестабильность нормального элемента $\nu_{НЭ}$ характеризуется изменением действительного значения ЭДС за год и может составлять $\nu_{НЭ} = 2$ мкВ/год.

Погрешность типа средств измерений оценивается с помощью нормируемой метрологической характеристики – класса точности.

Класс точности средств измерений – обобщенная характеристика данного типа средств измерений, как правило, отражающая уровень их точности, выражаемая пределами допускаемых основной и дополнительных погрешностей, а также другими характеристиками, влияющими на точность. К другим точностным характеристикам, определяющим класс точности средств измерений, относится, например, нестабильность.

Класс точности дает возможность судить о том, в каких пределах находится погрешность средств измерений одного типа, но не является непосредственным показателем точности измерений, выполняемых с помощью каждого отдельного экземпляра СИ данного типа. Иными словами, класс точности является суммарной характеристикой всех экземпляров средств измерений одного типа. Погрешности отдельного экземпляра СИ конкретного типа не должны превышать погрешностей, определяемых классом точности средств измерений этого типа. Данное обстоятельство необходимо учитывать при выборе средств измерений в зависимости от заданной точности измерений.

Согласно ГОСТ 8.401−80 классы точности устанавливаются в стандартах или технических условиях, содержащих технические требования к средствам измерений, подразделяемым по точности.

Для каждого класса точности в стандартах на средства измерений конкретного вида устанавливают конкретные требования к МХ, в совокупности отражающие уровень точности средств измерений этого класса. Совокупности нормируемых МХ должны быть составлены из характеристик, предусмотренных ГОСТ 8.009−84. Допускается также включать дополнительные характеристики.

Средствам измерений с двумя или более диапазонами измерений одной и той же ФВ допускается присваивать два или более класса точности.

Пример 3.9. Электроизмерительному прибору, предназначенному для измерений силы постоянного тока в диапазонах 0-10, 0-20 и 0-50 А, для отдельных диапазонов могут быть присвоены различные классы точности.

Средствам измерений, предназначенным для измерений двух или более физических величин, допускается присваивать различные классы точности для каждой измеряемой величины.

Пример 3.10. Электроизмерительному прибору, предназначенному для измерений электрического напряжения и сопротивления, могут быть присвоены два класса точности: один как вольтметру, другой – как омметру.

Класс точности набора мер определяется классом точности меры с наибольшей погрешностью.

Средства измерений должны удовлетворять требованиям к МХ, установленным для присвоенного им класса точности, как при выпуске их из производства, так и в процессе эксплуатации. Классы точности присваиваются средствам измерений при их разработке с учетом результатов государственных приемочных испытаний.

Если в стандарте или технических условиях, регламентирующих технические требования к средствам измерений конкретного типа, установлено несколько классов точности, то допускается присваивать класс точности при выпуске из производства, а также понижать класс точности по результатам поверки в порядке, предусмотренном документацией, регламентирующей поверку средств измерений.

Пример 3.11. Класс точности для концевых мер длины может быть присвоен при выпуске мер из производства или изменен в процессе эксплуатации, если в результате последней отклонение длины меры от номинального значения превысило предел допускаемых отклонений для класса точности, присвоенного ранее.

3.3.1. Способы установления пределов допускаемых погрешностей СИ

Пределы допускаемых основной и дополнительных погрешностей выражаются в форме абсолютных, относительных или приведенных погрешностей. Пределы допускаемой дополнительной погрешности допускается выражать в форме, отличной от формы выражения пределов допускаемой основной погрешности. Выражение пределов допускаемой погрешности в форме приведенных и относительных погрешностей является предпочтительным, так как они позволяют выражать пределы допускаемой погрешности числами, которые остаются неизменными для средств измерений одного уровня точности, но с различными верхними пределами измерений.

Пределы допускаемых погрешностей выражаются в форме

- абсолютных погрешностей, если погрешность результатов измерений в данной области измерений принято выражать в единицах измеряемой ФВ или в делениях шкалы,
- относительных погрешностей, если границы абсолютных погрешностей (ГАП) средств измерений конкретного вида нельзя полагать постоянными,
- приведенных погрешностей, если указанные ГАП можно полагать практически неизменными.

ГАП средств измерений конкретного вида оцениваются на основании принципа действия, свойств и назначения средств измерений.

Пример 3.12. Пределы допускаемых погрешностей мер массы (длины) выражают в форме абсолютных погрешностей, так как погрешности результатов измерений массы (длины) принято выражать в единицах массы (длины).

Пределы допускаемых погрешностей показывающих амперметров выражают в форме приведенных погрешностей, так как ГАП средств измерений данного вида практически неизменны в пределах диапазона измерений.

Пределы допускаемых основных погрешностей, выраженные в форме абсолютных погрешностей, устанавливаются с помощью формул:

$$\Delta_n = \pm a, \qquad (3.12)$$

если ГАП можно полагать практически неизменными,

$$\Delta_n = \pm(a + bX), \tag{3.13}$$

если ГАП можно полагать изменяющимися практически линейно, где

Δ_n – пределы допускаемой абсолютной основной погрешности, выраженной в единицах измеряемой ФВ на входе (выходе) или условно в делениях шкалы;

X – значение измеряемой ФВ на входе (выходе) средств измерений или число делений, отсчитанных по шкале;

a, b – положительные числа, не зависящие от X.

Пределы допускаемых основных погрешностей, выраженные в форме относительных погрешностей, устанавливаются с помощью формул:

$$\delta_n = \frac{\Delta_n}{X} = \pm q, \tag{3.14}$$

если Δ_n установлено в по формуле (3.12), то

$$\delta_n = \frac{\Delta_n}{X} = \pm\left[c + d\left(\left|\frac{X_k}{X}\right| - 1\right)\right], \tag{3.15}$$

если Δ_n установлено в по формуле (3.13), где

δ_n – пределы допускаемой относительной основной погрешности в %;

q – отвлеченное положительное число, выбираемое из ряда

$$1\times10^n,\ 1{,}5\times10^n,\ (1{,}6\times10^n),\ 2\times10^n,\ 2{,}5\times10^n,\ (3\times10^n),\ 4\times10^n,\ 5\times10^n,\ 6\times10^n, \tag{3.16}$$

n = 1, 0, –1, –2, и т. д. (значения, указанные в скобках, не устанавливают для вновь разрабатываемых средств измерений); при одном и том же показателе степени n допускается устанавливать не более пяти различных пределов допускаемой основной погрешности для средств измерений конкретного вида;

X_k – больший по модулю из пределов измерений;

c и d – положительные числа, выбираемые из ряда (3.16), причем

$$c = b + d, \quad d = \frac{a}{|X_k|}. \tag{3.17}$$

В стандартах или технических условиях на средства измерений должно быть установлено минимальное значение $X = X_0$, начиная с которого применим принятый способ выражения пределов допускаемой относительной погрешности.

Пределы допускаемых основных погрешностей, выраженные в форме абсолютных или относительных погрешностей, устанавливаются в виде более сложных функций по сравнению с (3.12) – (3.15), графиков или таблиц, если ГАП необходимо принять изменяющимися нелинейно.

Пределы допускаемых основных погрешностей, выраженные в форме приведенных погрешностей, устанавливаются с помощью формулы:

$$\gamma_n = \frac{\Delta_n}{X_N} = \pm p, \tag{3.18}$$

где γ_n – пределы допускаемой приведенной основной погрешности в %;
Δ_n – пределы допускаемой абсолютной основной погрешности, устанавливаемые по формуле (3.12);
X_N – нормирующее значение, выраженное в тех же единицах, что и Δ_n;
p – отвлеченное положительное число, выбираемое из ряда (3.16).

Пределы допускаемой дополнительной погрешности, как правило, устанавливают в виде дольного (кратного) значения предела допускаемой основной погрешности.

3.3.2. Обозначение классов точности СИ

Классы точности средств измерений в документации обозначаются следующим образом.

Для средств измерений, пределы допускаемой основной погрешности которых принято выражать в форме абсолютных погрешностей с помощью формул (3.12), (3.13) или относительных погрешностей, установленных в виде графика, таблицы или формул, отличных от (3.14), (3.15), классы точности обозначаются в документации прописными буквами латинского алфавита или римскими цифрами. Классам точности, которым соответствуют меньшие пределы допускаемых погрешностей, соответствуют буквы, находящиеся ближе к началу алфавита, или цифры, означающие меньшие числа.

Для средств измерений, пределы допускаемой основной погрешности которых принято выражать в форме приведенной погрешности с помощью формулы (3.18) или относительной погрешности в соответствии с формулой (3.14), классы точности в документации обозначаются числами, которые равны этим пределам, выраженным в процентах.

Для средств измерений, пределы допускаемой основной погрешности которых принято выражать в форме относительных погрешностей в соответствии с формулой (3.15), классы точности в документации обозначаются числами c и d, разделенные косой чертой.

В документации на средства измерений допускается также обозначать классы точности в соответствии с их обозначением на средствах измерений. Классы точности на средствах измерений обозначаются следующим образом.

На циферблатах, щитках и корпусах средств измерений указываются условные обозначения классов точности, установленные для обозначения в документации (числа, прописные буквы латинского алфавита или римские цифры), с добавлением знаков, представленных в таблице 3.3.

За исключением технически обоснованных случаев вместе с условным обозначением класса точности на внешние части средств измерений наносятся также обозначение стандарта или технических условий, устанавливающих технические требования к этим средствам измерений.

На средства измерений одного и того же класса точности, для которых в зависимости от условий эксплуатации установлены различные рабочие области влияющих величин, указывают обозначения условий их эксплуатации, предусмотренные в стандартах или технических условиях на эти средства измерений.

Допускается не наносить обозначение класса точности на высокоточные меры, а также на средства измерений, для которых действующими стандартами установлены особые внешние признаки, зависящие от класса точности.

Пример 3.13. Классы точности гирь общего назначения определяются по соответствующим формам гирь, параллелепипедной или шестигранной.

Таблица 3.3

Обозначение классов точности средств измерений

Формы выражения пределов допускаемой основной погрешности	Примеры выражения пределов допускаемой основной погрешности, %	Обозначение класса точности	
		в документации	на СИ
$\gamma_n = \pm p$ если нормирующее значение выражено в единицах величины на входе (выходе) средств измерений	$\gamma_n = \pm 1{,}5$	Класс точности 1,5	1,5
$\gamma_n = \pm p$ если нормирующее значение принято равным длине шкалы или ее части	$\gamma_n = \pm 0{,}5$	Класс точности 0,5	$\underset{\vee}{0{,}5}$
$\delta_n = \pm q$	$\delta_n = \pm 2{,}5$	Класс точности 2,5	2,5
$\delta_n = \pm\left[c + d\left(\left\|\frac{X_k}{X}\right\| - 1\right)\right]$	$\delta_n = \pm\left[0{,}02 + 0{,}01\left(\left\|\frac{X_k}{X}\right\| - 1\right)\right]$	Класс точности 0,02/0,01	0,02/0,01
$\Delta_n = \pm a$ $\Delta_n = \pm(a + bX)$		Класс точности M	M
относительная погрешность, установленная в виде графика, таблицы или формулы, отличной от (3.14), (3.15)		Класс точности C	C

Отметим, что если класс точности средств измерений определяется пределами допустимой погрешности, установленными с помощью (3.15), то возможное значение относительной погрешности показания СИ будет тем меньше, чем ближе показание X к X_k. Наименьшее значение δ_n получается, когда $X = X_k$. Поэтому следует выбирать СИ с таким X_k или так устанавливать X_k, чтобы отсчет показаний СИ производился в части шкалы, которая находится вблизи отметки X_k.

Если класс точности средств измерений определяется пределами допустимой погрешности, установленными с помощью (3.18), то в этом случае могут быть вычислены пределы абсолютной и относительной погрешностей для данного типа средств измерений. Действительно, из определения γ_n следует, что

$$\Delta_n = 0{,}01\gamma_n X_N, \quad \delta_n = 100\frac{\Delta_n}{X} = \frac{\gamma_n X_N}{X}. \qquad (3.19)$$

Поскольку Δ_n не изменяется, то при условии $X_N = X_{\max}$, $X_{\max}$ – больший из пределов измерений шкалы данного типа средств измерений, пределы относительной погрешности измерения ФВ будут тем меньше, чем ближе значение измеряемой ФВ к $X_{\max}$. Заменяя в (3.19) X_N на $X_{\max}$ и учитывая, что $X < X_{\max}$, получим

$$\delta_n = \frac{\gamma_n X_{\max}}{X}, \quad \delta_n > \gamma_n, \quad \gamma_n = \lim_{X \to X_{\max}} \delta_n. \qquad (3.20)$$

Таким образом, класс точности, установленный пределами допустимой приведенной погрешности при условии $X_N = X_{\max}$, определяет также минимальные пределы относительной погрешности измерения ФВ данным типом средств измерений. Поэтому в этом случае также следует выбирать СИ с таким большим из пределов измерений шкалы $X_{\max}$, чтобы отсчет показаний X находился вблизи $X_{\max}$.

Пример 3.14. Пусть вольтметром с $\gamma_n = \pm 2{,}5$ % и с большим из пределов измерений шкалы $X_{\max} = 50$ В измеряются различные значения напряжения – 15, 25 и 40 В. Пределы относительной погрешности измерения напряжения (без учета знака) будут следующими:

$$\delta_{n1} = \frac{2{,}5 \times 50}{15} = 8.3\ \%, \quad \delta_{n2} = \frac{2{,}5 \times 50}{25} = 5\ \%, \quad \delta_{n3} = \frac{2{,}5 \times 50}{40} = 3{,}1\ \%. \quad (3.21)$$

Из (3.21) следует, что измерение напряжения с наибольшим значением выполнено с минимальными пределами относительной погрешности.

3.4. Систематические погрешности измерений

Систематические погрешности измерений по характеру изменения подразделяют на постоянные и переменные погрешности.

Постоянные погрешности – систематические погрешности, которые в течение времени измерений сохраняют свое значение. Они встречаются наиболее часто.

Пример 3.15. Постоянные погрешности возникают при неправильных установке начала отсчета и расположении СИ.

Постоянные погрешности возникают при градуировке шкал СИ, т.к. появляются неизбежные неточности нанесения отметок шкал.

Переменные погрешности – систематические погрешности, значения которых изменяются в течение времени измерений. Переменные погрешности подразделяют на прогрессивные, периодические и погрешности, изменяющиеся по сложному закону.

Прогрессивные погрешности – непрерывно возрастающие или убывающие погрешности. Они появляются вследствие недостаточного прогрева СИ, его износа и старения.

Пример 3.16. Изменение систематической погрешности, обусловленной прогревом СИ, приближенно может быть описано убывающей со временем экспоненциальной зависимостью. Поэтому измерения рекомендуются проводить после прогрева СИ в течение необходимого времени, указанного в паспорте.

При эксплуатации концевой меры длины появляются прогрессивные погрешности, возрастающие со временем вследствие износа и старения меры (размер концевой меры уменьшается).

Использование химического источника ЭДС, питающего измерительную цепь постоянного тока, связано с возникновением прогрессивных погрешностей, возрастающих со временем вследствие износа и старения источника (ЭДС источника уменьшается).

Периодические погрешности – систематические погрешности, значение которых является периодической функцией времени или перемещения указателя измерительного прибора. Такие погрешности возникают в приборах с круговой шкалой и стрелкой (часы, весы, штангенциркули).

Пример 3.17. Если ось стрелки часов смещена относительно центра шкалы, то систематическая погрешность $\Delta\varphi$ отсчета угла поворота стрелки изменяется по закону

$$\Delta\varphi = \varepsilon \sin \varphi, \qquad (3.22)$$

т.е. является периодической погрешностью, где ε – эксцентриситет шкалы (смещение оси стрелки относительно центра шкалы), φ – угол поворота стрелки, отсчитываемый от прямой, проходящей через центр шкалы и ось поворота стрелки.

Погрешности, изменяющиеся по сложному закону – систематические погрешности, которые не являются прогрессивными или периодическими погрешностям. Они возникают вследствие совместного действия нескольких систематических погрешностей. К таким погрешностям относятся также систематические погрешности, зависящие от влияющих величин (температуры окружающей среды, влажности воздуха, атмосферного давления, напряжения питающей сети и т.д.).

Пример 3.18. Погрешностью, изменяющейся по сложному закону, является погрешность меры длины (линейки), которая появляется из-за температурной зависимости линейного размера меры, вдоль которого нанесена шкала отсчета.

Перед тем, как выполнить измерения ФВ, необходимо провести исследования для обнаружения и оценки возможных систематических погрешностей. Способы обнаружения и оценки систематических погрешностей подразделяются на теоретические и экспериментальные.

Теоретические способы – способы получения аналитического выражения для систематической погрешности на основании определенной первичной информации. Такими способами выявляются и оцениваются систематические погрешности, обусловленные несовершенством используемого метода измерений (Пример 3.1).

Экспериментальные способы – способы обнаружения и оценки систематических погрешностей на основе определенной первичной качественной информации и обработки ряда неисправленных результатов измерений ФВ. В этом случае проводятся специальные экспериментальные исследования, при которых

- случайные погрешности оказываются значительно меньше искомой систематической погрешности,
- изменяются в соответствующих пределах те внешние условия измерений, которые наиболее вероятно влияют на значение систематической погрешности.

Систематические погрешности необходимо уменьшать. Способы уменьшение систематических погрешностей подразделяются на способы уменьшение систематических погрешностей до начала измерений, в процессе измерений и после измерений (рис. 3.2). Способы каждого этапа измерений направлены на то, чтобы устранить или уменьшить максимальное число обнаруженных систематических погрешностей.

Чтобы уменьшить систематические погрешности *до начала проведения измерений* необходимо применять только исправные и поверенные средства измерений. При поверке метрологической службой определяются погрешности СИ и устанавливается его пригодность к применению.

Для правильного использования СИ требуется его соответствующим образом размещать, т.е. устанавливать СИ в рабочее положение и, по возможности, вдали от резких изменений влияющих величин или их критических для СИ значений.

Состояние СИ перед каждым новым использованием отличается от предыдущего, так как настройки СИ «сбиваются». Поэтому, чтобы обеспечить правильный отсчет показаний необходимо устанавливать нулевое показание СИ и его калибровать, т.е. проводить настройку СИ.

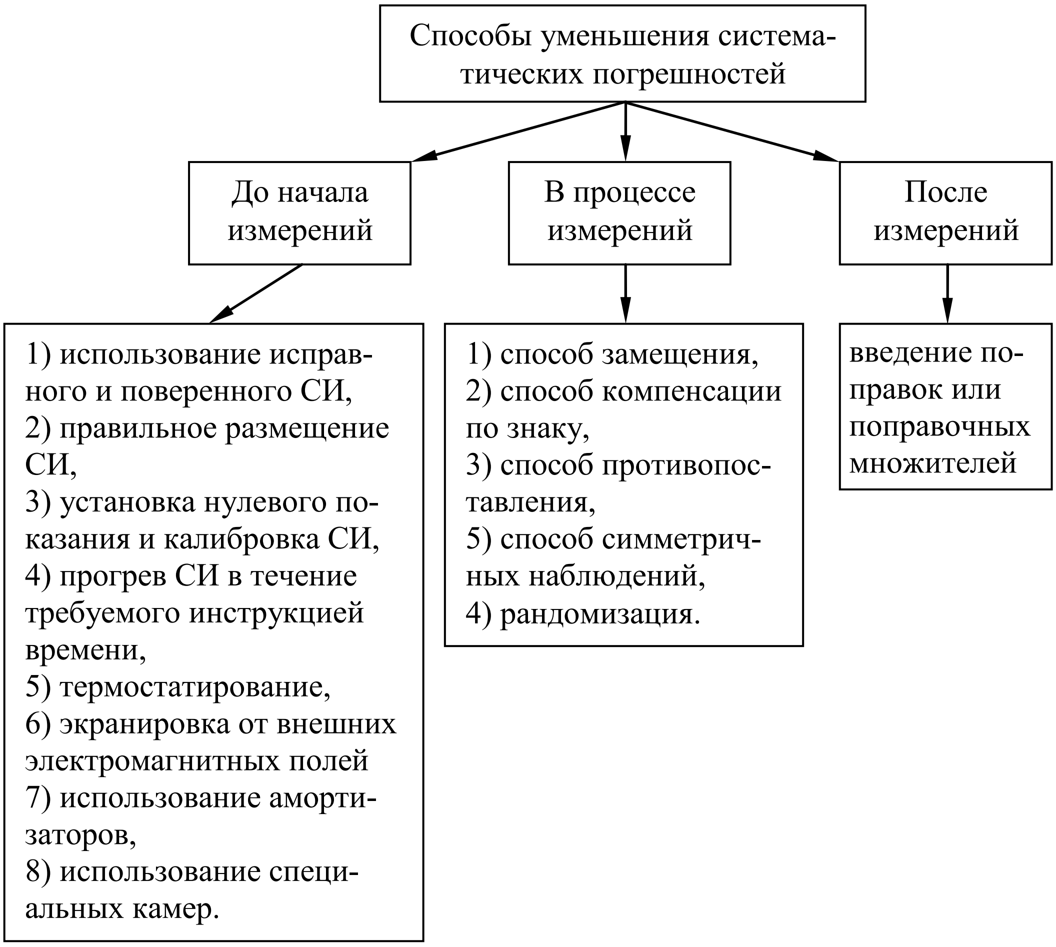


Рис. 3.2. Способы уменьшения систематических погрешностей

Для уменьшения прогрессивных погрешностей требуется осуществлять прогрев СИ в течение требуемого инструкцией времени.

Если необходимо уменьшить влияние температуры на систематическую погрешность, применяется термостатирование, при котором температура окружающей среды изменяется с допускаемыми пределами. Термостатирование может обеспечиваться на уровне помещения (цеха, лаборатории), СИ в целом или его отдельных частей.

Для уменьшения влияния внешних электромагнитных полей на точность измерений используется экранировка, при которой объект измерения и (или) СИ помещаются внутри экранов.

Чтобы скомпенсировать негативное воздействие вибраций на ход измерений применяются амортизаторы. Амортизаторы могут устанавливаться внутри СИ либо на специальных устройствах (шкафах, стойках), где размещают объект измерения и (или) СИ.

Для уменьшения влияния влажности и давления на точность измерений используются специальные камеры, с помощью которых создаются в определенном объеме условия изменения влажности и давления в заданных пределах. Внутри камер помещаются объект измерения и (или) СИ.

В процессе измерений некоторые систематические погрешности измерений могут быть уменьшены посредством использования способа замещения, который основан на применении метода замещения (п. 2.2). В этом случае измеряемый объект заменяется образцовой мерой, находящейся в тех же условиях, что и сам объект (Пример 2.14).

Способ компенсации по знаку – способ, при котором измерение проводят дважды так, чтобы причина, вызывающая систематическую погрешность при первом измерении, оказывала противоположное действие на результат второго измерения. Тогда систематическая погрешность входит в результаты наблюдений с противоположными знаками и полусумма результатов наблюдений будет свободна от систематической погрешности.

Пример 3.19. Точные измерения малых по значению ЭДС сопровождаются возникновением систематических погрешностей, вносимых паразитными термоэлектродвижущими силами (ТЭДС). ТЭДС появляются вследствие контакта проводников, выполненных из различных материалов, и различного нагрева областей соединений проводников при протекании электрического тока. Если значения ТЭДС не изменяются за время измерения, то соответствующие систематические погрешности могут быть исключены способом компенсации по знаку.

В этом случае применяется компенсационный метод измерения (п. 2.2), при котором неизвестная ЭДС E_x сравнивается с ЭДС $E_м$, воспроизводимой мерой. Измерительная цепь (рис. 3.3, а) включает цепь неизвестной ЭДС и цепь меры. Цепь неизвестной ЭДС состоит из ЭДС E_x, сопротивления r_x неизвестной ЭДС и высокоточного переменного резистора R. Цепь меры включает ЭДС $E_м$, сопротивления $r_м$ меры и высокоточного переменного резистора R. При измерении путем перемещения подвижного контакта резистора R добиваются нулевого показания гальванометра *Г*. Тогда, если E_T – ЭДС, обусловленная суммарным действием ТЭДС в измерительной цепи, сила I_p рабочего тока, протекающего в цепи меры, равна

$$I_p = \frac{E_м - E_T}{r_м + R}. \quad (3.23)$$

Измеренное значение неизвестной ЭДС

$$E_{x1} = \varphi_a - \varphi_b = I_p \Delta R = \frac{E_м - E_T}{r_м + R} \Delta R. \quad (3.24)$$

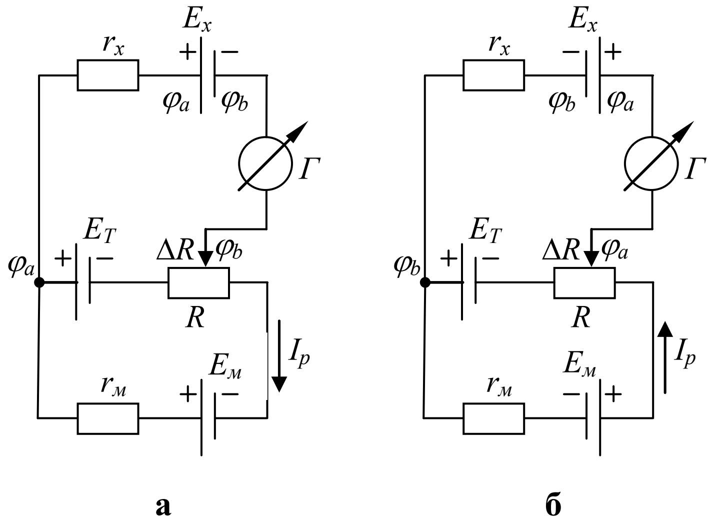


Рис. 3.3. Измерение ЭДС при двух направлениях рабочего тока I_p: а – I_p направлен по ходу часовой стрелки, б – I_p направлен против хода часовой стрелки

Если поменять полярность включения E_x и $E_м$ (рис. 3.3, б), то сила рабочего тока и измеренное значение неизвестной ЭДС окажутся равными

$$I_p = \frac{E_м + E_T}{r_м + R} \quad \text{и} \quad E_{x2} = \frac{E_м + E_T}{r_м + R} \Delta R. \quad (3.25)$$

Таким образом, систематическая погрешность $E_T \Delta R / (r_м + R)$ входит в результаты измерения (3.24) и (3.25) с различными знаками, так что действительное значение неизвестной ЭДС равно

$$E_x = \frac{E_{x1} + E_{x2}}{2} = \frac{E_м \Delta R}{r_м + R}. \quad (3.26)$$

Поэтому измерительные цепи, предназначенные для измерения малых ЭДС с помощью компенсационного метода, снабжаются переключателями, посредством которых можно одновременно изменять полярность включения E_x и $E_м$. Отметим, что поскольку $\Delta R / (r_м + R) < 1$, то $E_м > E_x$.

Разновидностью способа компенсации по знаку является с*пособ противопоставления*, который применяется для исключения систематических погрешностей в случае, когда сравниваются измеряемая величина с известной величиной, воспроизводимого мерой, причем измеряемая и известная величины имеют примерно равные значения.

Пример 3.20. При измерении угла конусообразного тела с помощью микроскопа появляется систематическая погрешность, связанная со смещением оси отсчета углов по отношению к оси тела (рис. 3.4). Чтобы исключить указанную систематическую погрешность измерения угла используется способ противопоставления.

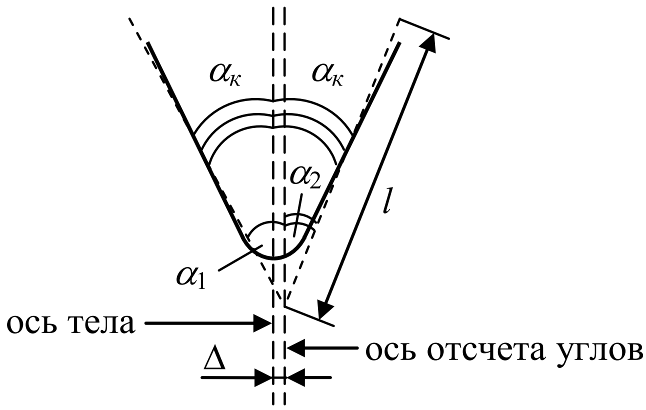


Рис. 3.4. Измерение угла конусообразного тела

Сначала измеряется угол α_1 по одной выбранной образующей конусообразного тела посредством совмещения штриховой линии отсчетного устройства микроскопа с образующей. Затем измеряется угол α_2 по образующей с противоположной стороны. Тогда, если Δ – смещение осей и Δ мало, то

$$\alpha_1 = \alpha_к + \Delta/l, \quad \alpha_2 = \alpha_к - \Delta/l, \tag{3.27}$$

где $\alpha_к$ – действительное значение угла конуса, l – длина штриховой линии отсчетного устройства микроскопа. Поэтому среднее значение угла

$$\alpha_{ср} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \alpha_к. \tag{3.28}$$

Для исключения систематической погрешности, возникающей при взвешивании тел из-за нарушения равноплечести весов, также используется способ противопоставления: тело массой m помещается на чашку весов с плечом l_2 (рис. 3.5, а) и уравновешивается гирями с общей массой m_1, расположенными на чашке весов с плечом l_1. Тогда

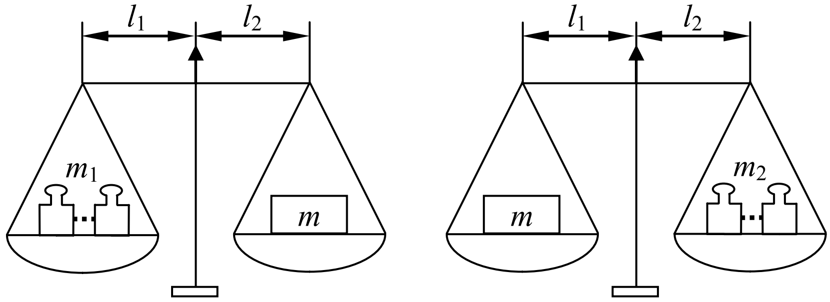
$$ml_2 = m_1 l_1. \quad (3.29)$$

Затем тело массой m помещается на чашку весов с плечом l_1 (рис. 3.5, б) и уравновешивается гирями с общей массой m_2, расположенными на чашке весов с плечом l_2. Тогда

$$ml_1 = m_2 l_2. \quad (3.30)$$

Выразив из (3.29) отношение плеч весов и подставив его в (3.30), получим

$$m = \sqrt{m_1 m_2}. \quad (3.31)$$



а **б**

Рис. 3.5. Взвешивание тела массы m при помещении гирь на чашку весов с плечом: а – l_1 и б – l_2

Если m_1 и m_2 незначительно отличаются друг от друга и $m_1 > m_2$, то $m_1 = m_2 + \Delta m_2$, $\Delta m_2 << 1$ и

$$m = m_2\sqrt{1+\frac{\Delta m_2}{m_2}} \approx m_2\left(1+\frac{\Delta m_2}{2m_2}\right) = \frac{2m_2+\Delta m_2}{2} = \frac{m_1+m_2}{2}. \quad (3.32)$$

Способ симметричных наблюдений используется для исключения прогрессивной погрешности, линейно зависящей от изменения соответствующего аргумента. К таким систематическим погрешностям относятся погрешности СИ, обусловленные изменениями влияющих величин или зависящие от времени (износ, старение). В этом случае интервал изменения аргумента разбивается на одинаковые промежутки. Измерение ФВ проводят последовательно при значениях аргумента, разделенных указанными промежутками. В результате получается ряд наблюдений ФВ, который состоит из пар симметричных наблюдений относительно средней точке интервала изменения аргумента. При обработке экспериментальных данных учитывается, что среднее значение систематической погрешности любой пары симметричных наблюдений равно систематической погрешности, соответствующей средней точке интервала.

Пример 3.21. Для измерения ЭДС с помощью компенсационного метода применяется мера – нормальный элемент, воспроизводящий заданное значение ЭДС. Схема измерения представлена на рис. 3.6, используемые обозначения аналогичны рис. 3.3 (Пример 3.19). При нулевом показании гальванометра

$$I_p = \frac{E_м}{r_м + R}, \quad E_x = I_p \Delta R = \varphi_a - \varphi_b = \frac{E_м}{r_м + R} \Delta R. \tag{3.33}$$

Если температура окружающей среды изменяется в небольших пределах, то ЭДС нормального элемента линейно зависит от температуры:

$$E_м = E_{20} - a(t - 20), \tag{3.34}$$

где E_{20} – номинальное значение ЭДС нормального элемента при 20 °С, a – коэффициент прорциональности, T – температура в °С. Значение E_{20} указывается на корпусе нормального элемента или в паспорте устройства. Поэтому с ростом или уменьшением температуры появляются обусловленные изменением $E_м$ прогрессивные погрешности Δ_E измерения ЭДС E_x:

$$E_x = \frac{E_{20} \Delta R}{r_м + R} + \Delta_E, \quad \Delta_E = -\frac{a(t - 20)}{r_м + R} \Delta R. \tag{3.35}$$

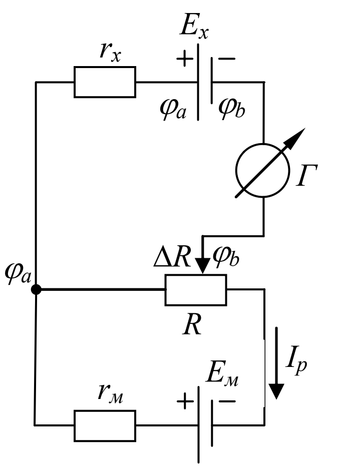


Рис. 3.6. Измерение ЭДС

Погрешности Δ_E можно исключить способом симметричных наблюдений. Пусть температура окружающей среды возрастает от 20 до 26 °С. Интервал изменения температуры можно разбить на три одинаковых промежутка и измерить значение ЭДС E_x

при четырех значениях температуры: 20, 22, 24 и 26 °С. Полусуммы значений симметричных наблюдений ЭДС E_x для 20 и 26 °С, 22 и 24 °С содержат систематические погрешности, равные Δ_E, соответствующей средней точке интервала – 23 °С.

Рандомизация – перевод систематических погрешностей в случайные погрешности. Ее можно осуществить при условии, когда имеется несколько однотипных приборов с систематической погрешностью одинакового происхождения. Если для одного из приборов систематическая погрешность постоянна, то от прибора к прибору она изменяется случайным образом. Поэтому измерение одной и той же ФВ всеми приборами и усреднение ряда результатов измерений ФВ позволяет значительно уменьшить систематическую погрешность (см. далее п. 4.1.2).

Если систематические погрешности известны и физически неустранимы, то *после проведения измерений* они могут быть исключены из результатов измерений с помощью введения поправок или поправочных множителей. Однако учесть все возможные систематические погрешности измерения нельзя, т.е. всегда существуют неисключенные систематические погрешности.

Неисключенная систематическая погрешность (НСП) – составляющая погрешности результата измерений, обусловленная погрешностями вычисления и введения поправок на влияние систематических погрешностей или систематической погрешностью, поправка на действие которой не введена вследствие ее малости. НСП называют также *неисключенный (ные) остаток (остатки) систематической погрешности*. Неисключенные систематические погрешности суммируются со случайными погрешностями.

3.5. Погрешности и случайные величины

Поскольку измерения с промахами исключаются, то по закономерности проявления (п. 3.1) абсолютную погрешность измерения ФВ Δ можно представить в виде суммы

$$\Delta = \Delta_{сис} + \Delta_{сл}, \qquad (3.36)$$

где $\Delta_{сис}$ и $\Delta_{сл}$ – систематическая и случайная погрешности, соответственно. Для конкретного экземпляра СИ рассматриваемого типа систематическая погрешность (с точностью до НСП) – величина, изменяющаяся закономерно, но от экземпляра к экземпляру систематическая погрешность изменяется случайным образом. Таким образом, в общем случае погрешность измерения является случайной величиной.

Случайные величины и их характеристики рассматриваются в теории вероятностей. Оценки характеристик случайных величин проводятся на основе полученных экспериментальных данных методами математической статистики. Выделяют дискретные и непрерывные случайные величины.

Дискретная случайная величина – величина, которая может принимать только конечное или счетное множество значений. Дискретная случайная величина X характеризуется значениями x_i ($i = 1, 2, 3, \ldots$) и вероятностями $p_i = P(X = x_i)$ того, что X принимает эти значения. Вероятности p_i должны удовлетворять условию нормировки

$$\sum_i p_i = 1. \qquad (3.37)$$

Непрерывная случайная величина – величина, которая может принимать непрерывный ряд значений. Непрерывная случайная величина X характеризуется вероятностью $P(x_1 < X < x_2)$ того, что X принимает значения, заключенные в интервале (x_1, x_2). Вероятность того, что X примет какое-то конкретное значение x_i, равна нулю, т.е. $P(X = x_i) = 0$. Если $x_{\min}$ и $x_{\max}$ – минимальное и максимальное значения диапазона изменения непрерывной случайной величины X, то

$$P(x_{\min} < X < x_{\max}) = 1. \qquad (3.38)$$

3.5.1. Функции распределения случайных величин

Полностью свойства случайной величины описываются интегральной и дифференциальной функциями (законами) распределения.

Интегральная функция распределения $F(x)$– вероятность того, что случайная величина X будет меньше некоторого значения x:

$$F(x) = P(X < x). \tag{3.39}$$

Функция $F(x)$ является неубывающей функцией x, т.е. если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$, причем $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$. Вероятность попадания случайной величины X в интервал (x_1, x_2) равна

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1). \tag{3.40}$$

Дифференциальная функция распределения или плотность вероятности $f(x)$ – функция, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt\,, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1\,. \tag{3.41}$$

Последнее условие является условием нормировки.

Таким образом, вероятность попадания случайной величины X в интервал (x_1, x_2) равна

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\,. \tag{3.42}$$

Для дискретной случайной величины плотность вероятности – разрывная функция, интегральная функция распределения – кусочно-непрерывная функция. Непрерывная случайная величина характеризуется непрерывной интегральной функцией распределения и непрерывной или кусочно-непрерывной дифференциальной функцией распределения.

Пример 3.22. Рассмотрим дискретную случайную величину – выпадение одного из чисел 1, 2, 3, 4, 5 и 6 в результате бросания игрального кубика. Поскольку выпадения любого из указанных чисел – события равновероятные, то график $f(x)$ в этом случае представляет точки над значениями 1, 2, 3, 4, 5 и 6, соответствующие вероятности 1/6 выпадения чисел (рис. 3.7, а). Зависимость $F(x)$ приведена на рис. 3.7, б.

Пример 3.23. Рассмотрим равномерное (прямоугольное) распределение. Непрерывная случайная величина называется *равномерно распределенной* на $[a, b]$, если ее плотность вероятности на $[a, b]$ постоянна, а вне $[a, b]$ равна нулю (рис. 3.8, а). В силу условия нормировки плотность вероятности равномерного распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, x<a, x>b \\ 1/(b-a), a \le x \le b\end{cases}. \tag{3.43}$$

Соответствующая интегральная функция распределения (рис. 3.8, б)

$$F(x)=\begin{cases}0, x<a \\ (x-a)/(b-a), a \le x \le b \\ 1, x>b\end{cases}. \tag{3.44}$$

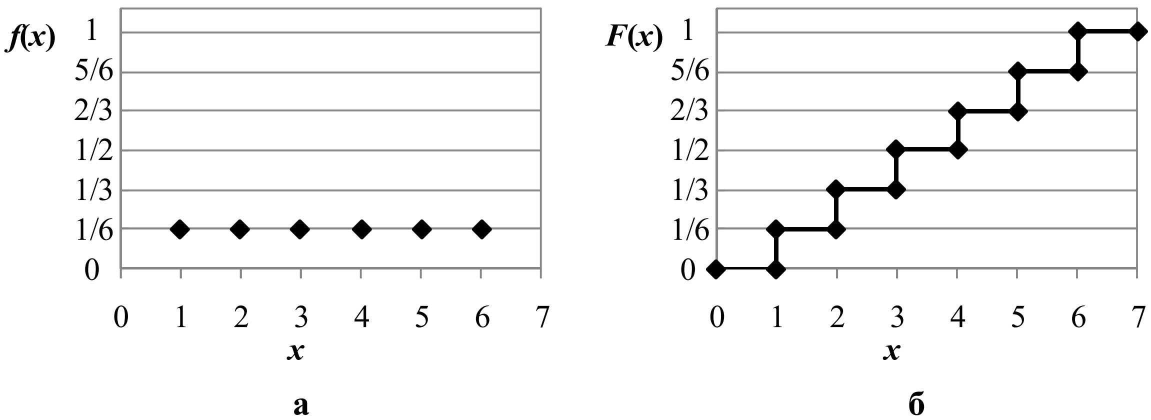


Рис. 3.7. Функции распределения для выпадения одного из чисел 1, 2, 3, 4, 5 и 6 в результате бросания игрального кубика: а – дифференциальная, б – интегральная

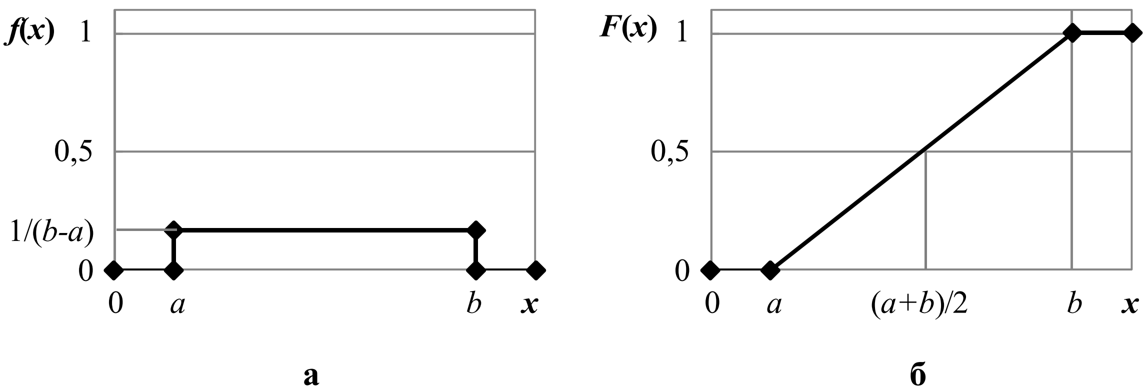


Рис. 3.8. Функции равномерного распределения: а – дифференциальная, б – интегральная

3.5.2. Моменты случайных величин

Помимо функций распределения случайные величины характеризуются также моментами, начальными и центральными.

Величины

$$\nu_i = \sum_k x_k^i p_k \quad \text{и} \quad \mu_i = \sum_k \left(x_k - \nu_1\right)^i p_k \tag{3.45}$$

называются i-м *начальным* и i-м *центральным моментами* дискретной случайной величины X.

Величины

$$\nu_i = \int_{-\infty}^{+\infty} x^i f(x)dx \quad \text{и} \quad \mu_i = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \nu_1\right)^i f(x)dx \tag{3.46}$$

называются i-м *начальным* и i-м *центральным моментами* непрерывной случайной величины X.

Особое значение имеют первый начальный момент ν_1 и второй центральный момент μ_2.

Математическим ожиданием $M(X)$ случайной величины X называется первый начальный момент для дискретной случайной величины

$$M(X) = \nu_1 = \sum_k x_k p_k \tag{3.47}$$

и для непрерывной случайной величины

$$M(X) = \nu_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx. \tag{3.48}$$

Математическое ожидание определяет положение центра распределения случайной величины X. Если $M(X) = 0$, случайная величина и соответствующее распределение называются *центрированными*. Перечислим свойства математического ожидания.

1. Если a – постоянная величина, то

$$M(a) = a. \tag{3.49}$$

2. Если X_1 и X_2 – случайные величины, то

$$M(X_1 + X_2) = M(X_1) + M(X_2). \tag{3.50}$$

3. Если a – постоянная величина, X – случайная величина, то

$$M(aX) = aM(X). \tag{3.51}$$

4. Если X_1 и X_2 – независимые случайные величины, т.е. вероятности реализации их значений не зависят друг от друга, то

$$M(X_1 X_2) = M(X_1) M(X_2). \tag{3.52}$$

Дисперсией $D(X)$ случайной величины X называется второй центральный момент для дискретной случайной величины

$$D(X) = \mu_2 = \sum_k (x_k - M(X))^2 p_k \tag{3.53}$$

и для непрерывной случайной величины

$$D(X) = \mu_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x) dx. \tag{3.54}$$

Используя определение и свойства математического ожидания, можно получить следующее выражение для вычисления дисперсии:

$$D(X) = M\left((X - M(X))^2\right) = M\left(X^2\right) - [M(X)]^2. \tag{3.55}$$

$D(X)$ имеет размерность квадрата случайной величины и поэтому не всегда удобна. Наряду с дисперсией используется величина

$$\sigma = \sqrt{D(X)}, \tag{3.56}$$

которая называется *стандартным отклонением*, *средним квадратическим отклонением* (СКО) или *средней квадратической погрешностью*. Величины $D(X)$ или σ являются согласно *неравенству Чебышева* мерой рассеяния распределения случайной величины X относительно $M(X)$. Перечислим свойства дисперсии.

1. Если a – постоянная величина, то

$$D(a) = 0. \tag{3.57}$$

2. Если a – постоянная величина, X – случайная величина, то

$$D(a + X) = D(X), \quad D(aX) = a^2 D(X). \tag{3.58}$$

3. Если X_1 и X_2 – независимые случайные величины, то

$$D(X_1 + X_2) = D(X_1) + D(X_2). \tag{3.59}$$

Отметим, что $M(X)$, $D(X)$ и σ характеризуют случайные величины, но сами представляют собой неслучайные величины. Если дискретная случайная величина X может принимать с равной вероятностью n различных значений x_i, то $M(X)$ и $D(X)$ равны:

$$M(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\,,\quad D(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-M(X)\right)^2\,. \tag{3.60}$$

Определим $M(X)$ и $D(X)$ для случайной величины из Примера 3.23. Согласно (3.60) и (3.55)

$$M(X)=\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=3{,}50\,, \tag{3.61}$$

$$D(X)=M\left(X^2\right)-[M(X)]^2=\frac{1}{6}\left(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2\right)-3{,}5^2=2{,}92\,. \tag{3.62}$$

Определим $M(X)$, $D(X)$ и σ для равномерного распределения. Учитывая (3.43), (3.48) и (3.54), получим

$$M(X)=\frac{1}{b-a}\int_a^b dx=\frac{a+b}{2}\,, \tag{3.63}$$

$$D(X)=\frac{1}{b-a}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2dx=\frac{(b-a)^2}{12}\,,\quad \sigma=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}\,. \tag{3.64}$$

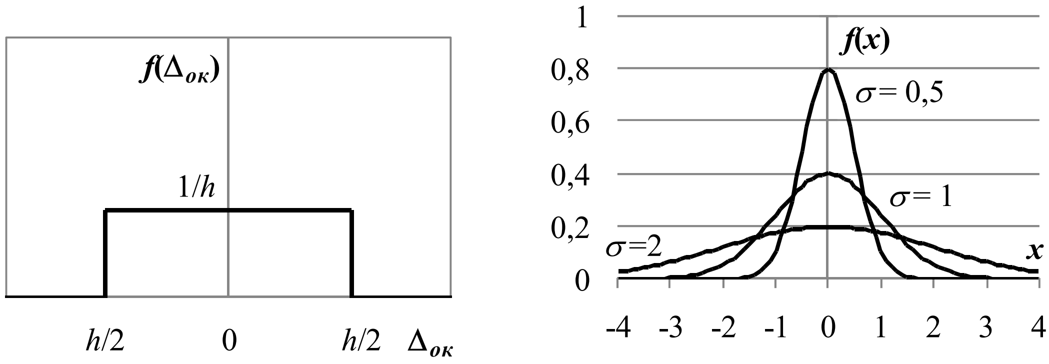
Равномерному закону распределения подчиняются, например, погрешности округления $\Delta_{ок}$, возникающие при считывании показаний по шкале прибора и обработке экспериментальных данных. Погрешность округления является центрированной случайной величиной. Если h – цена деления шкалы прибора, то $a=-h/2$, $b=h/2$ (рис. 3.9, а) и СКО равно:

$$\sigma=\frac{h}{2\sqrt{3}}\,. \tag{3.65}$$

Поскольку $\left|\Delta_{ок}\right|\le h/2$, то $\Delta_n=h/2$ является предельной погрешность округления, так как значение $\Delta_{ок}$ находится в симметричных пределах (границах) $\pm\Delta_n$. Поэтому СКО погрешности округления можно представить в виде

$$\sigma=\frac{\Delta_n}{\sqrt{3}}\,. \tag{3.66}$$

При обработке экспериментальных данных возникают погрешности округления результатов вычислений. Такая погрешность заключена в пределах ±5 единиц отбрасываемого десятичного разряда, ее СКО (см. (3.66)) составляет $5/\sqrt{3} = 2{,}89$ единиц этого разряда.



а б

Рис. 3.9. а – распределение погрешности округления при считывании показаний по шкале прибора, б – центрированное нормальное распределение для различных σ

Из-за неизбежного округления, отсчитываемые с помощью средств измерений значения измеряемой ФВ, а значит и значения ее погрешности, всегда содержат определенное конечное число значащих цифр. Поэтому в эксперименте измеряемая ФВ и погрешность ее измерения принимают конечное число значений и проявляют себя как дискретные случайные величины. Однако для упрощения свойства измеряемой ФВ и ее погрешности описываются функциями распределения непрерывных случайных величин.

3.5.3. Нормальное распределение

На практике встречаются погрешности измерения, характеризуемые различными плотностями вероятности. Тем не менее, во многих случаях реальные функций распределения погрешностей удается аппроксимировать стандартными аналитическими функциями. Особое значение среди стандартных аналитических функций имеет нормальное распределение или распределение Гаусса.

Непрерывная случайная величина X называется *распределенной нормально*, если она характеризуется плотностью вероятности следующего вида:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}b} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2b^2} \right], \tag{3.67}$$

где a и b – параметры распределения. Определим $M(X)$ и $D(X)$ для нормального распределения:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}b} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2b^2} \right] dx = a, \tag{3.68}$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-a)^2}{\sqrt{2\pi}b} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2b^2} \right] dx = b^2. \tag{3.69}$$

Таким образом, параметр a имеет значение математического ожидания, а b – значение СКО. Поэтому выражение для плотности вероятности нормального распределения можно представить в виде:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} \right]. \tag{3.70}$$

Если случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами a и σ, то пишут $X \in N(x, a, \sigma)$. График функции (3.70) представляет собой колоколообразную симметричную кривую. Параметр a – точка максимума, через которую проходит ось симметрии, параметр σ – расстояние от оси симметрии до точки перегиба кривой. Если σ мало, кривая высокая и заостренная. При больших σ кривая широкая и плоская. Центрированное ($a = 0$) нормальное распределение для различных σ приведено на рис. 3.9, б.

Распределение $N(x, 0, 1)$ называется нормированным и центрированным нормальным распределением. Интегральную функцию $\Phi(x)$ распределения $N(x, 0, 1)$ можно преобразовать к виду:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{0} \exp\left[-\frac{t^2}{2} \right] dt + \int_{0}^{x} \exp\left[-\frac{t^2}{2} \right] dt \right), \tag{3.71}$$

где $\varphi(x)$ – дифференциальная функция распределения $N(x, 0, 1)$.

Интеграл

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] dt \qquad (3.72)$$

называется интегралом вероятности или нормированной функцией Лапласа. $\Phi_0(x)$ является четной функцией, т.е. $\Phi_0(-x) = \Phi_0(x)$, и $\Phi_0(\infty) = 1/2$, так что

$$\Phi(x) = \Phi_0(x) + \frac{1}{2}. \qquad (3.73)$$

Функции $\Phi_0(x)$ и $\varphi(x)$ табулированы (т.е. представлены в справочных таблицах).

Если случайная величина $X \in N(x, a, \sigma)$, то ее интегральная функция распределения равна

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right] dt. \qquad (3.74)$$

Произведем в (3.74) замену переменной t на $y = (t-a)/\sigma$. Учитывая, что $t = y\sigma + a$ и $dt = \sigma dy$, получим

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right). \qquad (3.75)$$

Поэтому, согласно (3.42), имеем:

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \Phi_0\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right). \qquad (3.76)$$

Важность нормального распределения основывается на *центральной предельной теореме*. Из этой теоремы следует, что если случайная величина X представляет сумму большого числа независимых случайных величин X_i, $i = \overline{1, n}$, каждое из которых вносит в сумму лишь незначительный вклад, то независимо от того, каким законам распределения подчиняются слагаемые X_i, случайная величина X будет иметь распределение, близкое к нормальному. Чем больше число слагаемых n, тем точнее приближение распределения X к $N(x, a, \sigma)$.

Нахождение суммарного закона распределения случайной величины по известным законам распределения слагаемых называется *композицией* законов распределения. Так, композицией двух равномерных распределений с одинаковыми пределами a и b является треугольное распределение. Композицией двух равномерных распределений с различными пределами a и b является трапецеидальное распределение. По мере увеличения слагаемых, подчиняющихся равномерному распределению, их композиция быстро стремится к нормальному распределению, мало отличаясь от него уже при 4-5 слагаемых. Композиция любого числа нормальных распределений является нормальным распределением.

Отметим, что если случайная величина $X = \sum_{i=1}^{m} X_i$, где X_i, $i = \overline{1, m}$ – независимые случайные величины, μ и σ – математическое ожидание и СКО величины X, а μ_i и σ_i – математическое ожидание и СКО величины X_i, то в соответствии со свойствами математического ожидания (3.50) и дисперсии (3.59):

$$\mu = \sum_{i=1}^{m} \mu_i, \quad \sigma^2 = \sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2. \qquad (3.77)$$

ГЛАВА 4. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

4.1. Оценка погрешностей

При измерении ФВ с помощью выбранного экземпляра СИ скорость изменения систематической погрешности значительно меньше скорости изменения случайной погрешности, так что за время измерения ФВ систематическая погрешность мало изменяется, и ее можно считать величиной постоянной.

Случайные погрешности описываются функциями распределения с нулевым математически ожиданием, т.е. являются центрированными случайными величинами. Если математическое ожидание случайной погрешности отлично от нуля, то это означает, что рассматривается сумма случайной и систематической погрешности, и ненулевое математическое ожидание равно систематической погрешности. Поэтому при оценке случайных погрешностей из результатов измерений ФВ исключают систематические погрешности и используют исправленные результаты измерения ФВ.

Из-за наличия случайных погрешностей измеряемая ФВ X также является случайной величиной. Если известна плотности вероятности $f(t)$ случайной погрешности $\Delta_{сл}$, можно определить вероятность P нахождения $\Delta_{сл}$ в заданном интервале:

$$P = P\left(\Delta_н < \Delta_{сл} < \Delta_в\right) = \int_{\Delta_н}^{\Delta_в} f(t)dt, \quad (4.1)$$

где $\Delta_н$ и $\Delta_в$ – нижняя и верхняя границы интервала. В случае симметричных распределений границы интервала можно выразить одной положительной величиной $\Delta_{нв}$. Тогда $\Delta_н = -\Delta_{нв}$, $\Delta_в = \Delta_{нв}$, т.е. интервал лежит в пределах $\pm\Delta_{нв}$. Для заданного закона распределения вероятность P однозначно зависит от границ интервала. Если $P = 1$, то реальные погрешности, характеризуемые симметричными функциями $f(t)$, не могут превышать границ $\pm\Delta_n$. Погрешность, равная Δ_n, называется предельной.

По результату измерений x и заданным границам $\Delta_н$ и $\Delta_в$ оценивается интервал, в котором с заданной вероятностью P находится действительное значение $x_д$ измеряемой ФВ X. Поскольку $\Delta_{сл} = x - x_д$, то

$$P = P\left(\Delta_н < x - x_д < \Delta_в\right) = P\left(x - \Delta_в < x_д < x - \Delta_н\right). \tag{4.2}$$

Если известна плотность вероятности $f_X(t)$ измеряемой ФВ X и $f_X(t)$ симметричная функция, то можно поступить наоборот, т.е. определить значение $x_д$, равное математическому ожиданию, и по заданным границам найти вероятность P нахождения результата измерений x в заданном интервале:

$$P = P\left(x_д + \Delta_н < x < x_д + \Delta_в\right) = \int_{\Delta_н}^{\Delta_в} f_X(t)dt, \tag{4.3}$$

откуда оценить интервал, в котором с заданной вероятностью P находится $\Delta_{сл}$:

$$P = P\left(\Delta_н < x - x_д < \Delta_в\right) = P\left(\Delta_н < \Delta_{сл} < \Delta_в\right). \tag{4.4}$$

Когда границы не заданы, но известна $f_X(t)$, случайные погрешности можно оценить по величинам дисперсии или СКО ФВ X.

4.1.1. Задачи математической статистики и проверка гипотез

Полный набор всех возможных значений, которые может принимать случайная величина, называется *генеральной совокупностью*. Генеральная совокупность измеряемой ФВ X в практике электрорадиоизмерений представляет собой, как правило, совокупность бесконечного числа значений, причем плотность вероятности ФВ X неизвестна. Для нахождения функции распределения ФВ X необходимо провести измерение X неограниченное число раз, исключив погрешности округления. В реальных условиях выполняется конечное число n независимых друг от друга измерений или наблюдений x_i ($i = \overline{1, n}$) ФВ X. Таким образом, после измерения из бесконечного множества значений ФВ X мы располагаем только n случайно выбранными значениями x_i ($i = \overline{1, n}$) ФВ X.

Случайной выборкой объема n называют n значений x_i ($i = \overline{1, n}$), расположенных в порядке их получения. *Вариационным рядом* называю n значений x_i ($i = \overline{1, n}$), расположенных в порядке возрастания их значений.

Задачи математической статистики состоят в том, чтобы на основании знания некоторых свойств подмножества элементов, взятых из генеральной совокупности, сделать выводы о свойствах всей генеральной совокупности. В применении к измерению ФВ X использование методов математической статистики позволяет на основе знания конечного числа значений измеряемой ФВ X сделать выводы о генеральной совокупности ФВ X в целом и оценить погрешности. Подобные выводы часто делаются по результатам проверки *гипотез*, т.е. некоторых предположений о случайных величинах. Гипотезой H_0 может являться, например, предположение о равенстве определенных параметров распределений, о соответствии распределения случайной величины некоторому заданному распределению и т.д.

Проверка гипотезы H_0 осуществляется с помощью *критерия*, согласно которому H_0 принимается или отвергается. Для проверки используется контрольная величина T, которой является соответствующим образом выбранная и приспособленная к задаче функция случайной выборки. Задается *уровень значимости* α, и определяется *критическая область B*, удовлетворяющая условию, что вероятность принятия гипотезы H_0 при $T \in B$ не превосходит α:

$$P\left(T \in B \mid H_0 \text{ верна}\right) \le \alpha . \tag{4.5}$$

Область B можно найти, если известно распределение контрольной величины T. Как правило, уровень значимости выбирается равным 0,05, 0,02 или 0,01.

Применение критерия состоит в следующем. Производится случайная выборка, которая дает частное значение t контрольной величины T. Если $t \in B$, т.е. выполняется условие (4.5), то гипотеза H_0 отвергается. Если $t \notin B$, то случайная выборка не противоречит гипотезе H_0, и H_0 принимается. Величина $P = 1 - \alpha$ называется *доверительной вероятностью*, *мерой надежности или коэффициентом доверия*. Коэффициентом доверия определяет вероятность выполнения критерия при условии, что H_0 принимается. Таким образом, $P = 1 - \alpha$ характеризует надежность, а α – точность выполнения критерия. Однако принятие гипотезы H_0 не означает, что она абсолютна верна.

Ошибочное решение, когда отвергается верная гипотеза H_0, называют *ошибкой первого рода*. Чем меньше α, тем меньше вероятность совершить ошибку первого рода. Ошибочное решение, когда принимается неверная гипотеза H_0, называют *ошибкой второго рода*. При заданном α согласно условию (4.5) критическую область B можно выбрать бесконечно большим числом способов. Поэтому из всех B выделяют такую область, чтобы вероятность допустить ошибку второго рода была наименьшей.

Как уже отмечалось, при измерении ФВ X плотности вероятности ФВ X и, соответственно, случайной погрешности оказываются, как правило, неизвестными. Обычно не занимаются определением плотности вероятности указанных величин, а ограничиваются подбором такого теоретического закона распределения, который с достаточной для практических целей точностью может быть использован вместо реального закона распределения. Иными словами, на практике проводят аппроксимацию экспериментальных данных стандартными аналитическими функциями распределения. В силу центральной предельной теоремы, часто бывают основания считать, что реальная плотность вероятности ФВ X или случайной погрешности близка к нормальному распределению.

Для установления математической модели реального закона распределения ФВ X или случайной погрешности строится гистограмма и полигон. По виду гистограммы и полигона выдвигается гипотеза H_0 о соответствии реальной плотности вероятности выбранной стандартной аналитической функции распределения. Для проверки данной гипотезы H_0 применяются *критерии согласия*. Если число наблюдений $n > 50$, проверка гипотезы H_0 производится с использованием критериев Колмогорова, Пирсона или Мизеса-Смирнова. При $3 < n < 50$ применяется составной критерий.

Если гипотеза H_0 принимается, то ее принятие означает, что она не противоречит экспериментальным данным. Однако отсюда нельзя сделать вывод об однозначном соответствии закона распределения результатов наблюдений выбранному стандартному распределению. Могут существовать и другие аппроксимирующие гистограмму теоретические законы распределения.

4.1.2. Точечные и доверительные оценки

Пусть при измерении ФВ X проведено n независимых друг от друга наблюдений, исправленные результаты которых x_i $(i = \overline{1, n})$ ФВ X. Поскольку каждое значение x_i является реализацией случайной величины X, то случайную выборку объема n можно представить как реализацию случайного вектора $\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$, где независимые друг от друга случайные величины $X_i = X$ $(i = \overline{1, n})$, т.е. все X_i характеризуются одинаковыми функциями распределения. Так как значения x_i в общем случае различны, возникает вопрос: какое из полученных значений x_i или какую функцию этих значений следует принять за действительное значение измеряемой ФВ X и как оценить случайную погрешность?

За действительное значение измеряемой ФВ X часто принимается ее математическое ожидание, случайные погрешности оцениваются по величине СКО ФВ X. Но поскольку плотность вероятности ФВ X неизвестна, то вместо величин математического ожидания и СКО ФВ X используют их точечные оценки.

Оценка параметра γ закона распределения случайной величины X называется *точечной*, если она выражена одним числом (точка числовой оси). Любая точечная оценка, вычисленная с использованием экспериментальных данных, является случайной величиной. Функция распределения точечной оценки зависит от функции распределения случайной величины X и числа наблюдений n, т.е. точечная оценка Г параметра γ:

$\Gamma = \Gamma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Точечные оценки должны обладать свойствами состоятельности, несмещенности и эффективности.

Точечная оценка $\Gamma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ параметра γ называется *состоятельной*, если $\Gamma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ сходится по вероятности к γ, т.е. если $\forall \varepsilon > 0$ выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} P(|\Gamma(X_1, X_2, \ldots, X_n) - \gamma| \le \varepsilon) = 1. \quad (4.6)$$

Точечная оценка $\Gamma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ параметра γ называется *несмещенной*, если математическое ожидание точечной оценки равно γ:

$$M(\Gamma) = \gamma. \quad (4.7)$$

Точечная оценка $\Gamma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ параметра γ называется *асимптотически несмещенной*, если

$$\lim_{n\to\infty} M(\Gamma) = \gamma. \quad (4.8)$$

Каждая несмещенная оценка является также асимптотически несмещенной.

Точечная оценка $\Gamma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ параметра γ называется *эффективной*, если ее дисперсия меньше дисперсии любой другой точечной оценки параметра γ. Эффективную оценку параметра можно найти не всегда.

Рассмотрим случай, когда измеряемая ФВ X имеет нормальное распределение, т.е. $X \in N(x, a, \sigma)$, причем параметры распределения (математическое ожидание a и СКО σ) неизвестны. Получим точечные оценки для этих параметров. Так как результаты наблюдений являются дискретными случайными величинами, а появления значений x_i ($i = \overline{1, n}$) – события равновероятные, то в силу (3.60) естественно выбрать точечными оценками следующие функции

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \Omega^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2, \quad (4.9)$$

где $\overline{X}$ и Ω^2 – точечные оценки a и σ^2, соответственно.

Определим математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\overline{X}$. Поскольку $M(X_i)=a$, то согласно (3.50):

$$M(\overline{X})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a=a. \qquad (4.10)$$

Таким образом, $\overline{X}$ – несмещенная точечная оценка a (см. (4.7)).

Так как $D(X_i)=\sigma^2$, то в соответствии с (3.55) и свойствами математического ожидания дисперсия равна:

$$D(\overline{X})=M\left[\left(\overline{X}-M(\overline{X})\right)^2\right]=M\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-a\right)^2\right]=$$
$$=M\left[\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i-na\right)^2\right]=\frac{1}{n^2}M\left[\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)\right)^2\right]=. \qquad (4.11)$$
$$=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}M\left[(X_i-a)^2\right]=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{n\sigma^2}{n^2}=\frac{\sigma^2}{n}$$

Поэтому при $n\to\infty$ $D(\overline{X})\to 0$ или $\overline{X}\to a$, т.е. $\overline{X}$ является состоятельной точечной оценкой a (см. (4.6)).

Из (4.11) следует также, что дисперсия среднего арифметического результатов наблюдений ФВ X в n раз меньше дисперсии результата отдельного наблюдения. Поэтому измерения с многократными наблюдениями и последующим усреднением результатов – эффективный способ уменьшения влияния случайной погрешности на результат измерения. Именно такой подход используется при рандомизации, когда систематическая погрешность переводится в случайную (п. 3.4). Систематическая погрешность от прибора к прибору изменяется случайным образом, т.е. является случайной величиной, характеризуемой нормальным распределением.

Определим математическое ожидание и дисперсию случайной величины Ω^2. Математическое ожидание равно:

$$M(\Omega^2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\left[(X_i-\overline{X})^2\right]. \qquad (4.12)$$

Рассмотрим отдельно $M\left((X_i-\overline{X})^2\right)$. Получим:

$$M\left((X_i-\overline{X})^2\right)=M\left(X_i^2-2X_i\overline{X}+\overline{X}^2\right)=M\left(X_i^2\right)-2M\left(X_i\overline{X}\right)+M\left(\overline{X}^2\right). \tag{4.13}$$

Случайные величины X_i и $\overline{X}$ не являются независимыми. Поэтому использовать свойство (3.52) непосредственно нельзя. Преобразуем произведение $X_i\overline{X}$ следующим образом:

$$X_i\overline{X}=X_i\left(\overline{X}-\frac{X_i}{n}+\frac{X_i}{n}\right)=\frac{X_i^2}{n}+X_i\left(\overline{X}-\frac{X_i}{n}\right). \tag{4.14}$$

Случайные величины X_i и $\overline{X}-\dfrac{X_i}{n}$ являются независимыми. Таким образом,

$$M\left(X_i\overline{X}\right)=\frac{M\left(X_i^2\right)}{n}-M\left(X_i\right)M\left(\overline{X}-\frac{X_i}{n}\right)=\frac{M\left(X_i^2\right)}{n}-a\left(a-\frac{a}{n}\right). \tag{4.15}$$

Учитывая, что $D(X_i)=M\left(X_i^2\right)-a^2$ ($i=\overline{1,n}$), $D(\overline{X})=M\left(\overline{X}^2\right)-a^2$, а также (4.15) и (4.11), получим

$$\begin{gathered}M\left[(X_i-\overline{X})^2\right]=\left[M\left(X_i^2\right)-a^2\right]+\left[M\left(\overline{X}^2\right)-a^2\right]-\frac{2}{n}\left[M\left(X_i^2\right)-a^2\right]=\\=D(X_i)+D(\overline{X})-\frac{2}{n}D(X_i)=\sigma^2+\frac{\sigma^2}{n}-\frac{2\sigma^2}{n}=\frac{n-1}{n}\sigma^2\end{gathered}. \tag{4.16}$$

Принимая во внимание (4.16), $M\left(\Omega^2\right)$ оказывается равным

$$M\left(\Omega^2\right)=\frac{n-1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2=\frac{n-1}{n}\sigma^2. \tag{4.17}$$

Таким образом, Ω^2 – смещенная точечная оценка σ^2. Однако при $n\to\infty$ $M\left(\Omega^2\right)\to\sigma^2$, т.е. Ω^2 является асимптотически несмещенной оценкой.

Дисперсия

$$D\left(\Omega^2\right)=\frac{2(n-1)}{n^2}\sigma^4. \tag{4.18}$$

Когда $n\to\infty$, то $D\left(\Omega^2\right)\to 0$ или $\Omega^2\to\sigma^2$. Следовательно, Ω^2 – состоятельная точечная оценка σ^2.

При расчетах вместо Ω^2 используется S^2 – несмещенная точечная оценка σ^2 ($M\left(S^2\right)=\sigma^2$):

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2. \qquad (4.19)$$

Дисперсия

$$D\left(S^2\right) = \frac{2}{n-1}\sigma^4, \qquad (4.20)$$

т.е. S^2 является состоятельной точечной оценкой σ^2.

Реализации точечных оценок параметров распределения при конкретной случайной выборке объема n также называют точечными оценками параметров. Чтобы различать точечную оценку-функцию и ее реализацию в последнем случае используются малые прописные буквы, и часто ставится знак «крышечка».

<u>Пример 4.1.</u> Значения

$$\hat{a} = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2, \quad \hat{s}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 \qquad (4.21)$$

являются реализациями оценок $\overline{X}$, Ω^2 и S^2, соответственно. Значение $\overline{x}$ называется также *выборочным* или *эмпирическим средним*, а $\hat{s}^2$ – *выборочной* или *эмпирической дисперсией*.

Рассмотрим вопрос об эффективности полученных точечных оценок $\overline{X}$, Ω^2 и S^2. В общем случае функция распределения случайной величины определяется несколькими параметрами. Обозначим число параметров через l. Если у параметра распределения γ_k $\forall k = \overline{1, l}$ существует эффективная точечная оценка, то ее можно получить с помощью метода наибольшего правдоподобия. *Метод наибольшего правдоподобия* состоит в том, что в качестве оценки параметра γ_k используется значение $\hat{\gamma}_k$, при котором функция правдоподобия достигает своего максимума. *Функция правдоподобия* является функцией $n + l$ переменной, зависящей от случайной выборки объема n и числа параметров l. Значение $\hat{\gamma}_k$ определяется выражением:

$$\hat{\gamma}_k = \Gamma_k\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \quad \forall k = \overline{1, l}. \qquad (4.22)$$

Соответствующая функция $\Gamma_k(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется *наиболее правдоподобной точечной оценкой* параметра γ_k. Наиболее правдоподобные точечные оценки параметра являются состоятельными, но не всегда несмещенными.

Нормальное распределение характеризуется двумя параметрами, a и σ. Применение метода наибольшего правдоподобия дает, что $\overline{X}$ – наиболее правдоподобная точечная оценка a, а Ω^2 – наиболее правдоподобная точечная оценка σ^2. Следовательно, $\overline{X}$ является эффективной точечной оценкой a, а Ω^2 – эффективной, но смещенной точечной оценкой σ^2. На практике чаще используют менее эффективную, но несмещенную оценку σ^2 – точечную оценку S^2.

Таким образом, если измеряемая ФВ $X \in N(x, a, \sigma)$, то $\overline{X}$ представляет собой состоятельную, несмещенную и эффективную точечной оценку a, S^2 – состоятельную, несмещенную, но менее эффективную по сравнению с Ω^2 точечную оценку σ^2.

Если в качестве точечной оценки σ^2 используется S^2, то согласно (4.11) функция

$$S(\overline{X}) = \frac{S}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} \tag{4.23}$$

является точечной оценкой дисперсии $\overline{X}$. Реализация $S(\overline{X})$ при конкретной случайной выборке объема n определяется выражением

$$\hat{s}(\overline{x}) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}\,. \tag{4.24}$$

Точечная оценка параметра является случайной величиной, которая характеризуется только одним значением при конкретной случайной выборке. Возникает вопрос: насколько достоверна такая оценка, и какова ее погрешность? Ответ на поставленный вопрос поставляют доверительные оценки.

Пусть $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ – случайный вектор, $X_i = X$ $(i = \overline{1, n})$, X – измеряемая ФВ, функция распределения которой зависит от параметра γ. Выдвигается гипотеза H_0 о том, что выполняется неравенство

$$\Gamma_н(X_1, X_2, \ldots, X_n) < \gamma < \Gamma_в(X_1, X_2, \ldots, X_n), \tag{4.25}$$

где $\Gamma_н$ и $\Gamma_в$ – некоторые функции случайного вектора. Задается уровень значимости α и после проверки гипотезы H_0 определяется доверительная вероятность

$$P[\Gamma_н(X_1, X_2, \ldots, X_n) < \gamma < \Gamma_в(X_1, X_2, \ldots, X_n)] = 1 - \alpha. \tag{4.26}$$

Случайный интервал $(\Gamma_н, \Gamma_в)$ называется *доверительной* или *интервальной оценкой*, а также *доверительным интервалом* параметра γ с доверительной вероятностью $P = 1 - \alpha$. Соответственно, случайные границы $\Gamma_н$ и $\Gamma_в$ называются *доверительными границами*.

Если имеется реализация вектора $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, т.е. случайная выборка объема n, то реализация доверительной оценки дает интервал $(\gamma_н, \gamma_в)$, где

$$\gamma_н = \Gamma_н(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \gamma_в = \Gamma_в(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{4.27}$$

В большом ряду случайных выборок объема n истинное значение параметра γ лежит примерно в $(1-\alpha)100$ % случаев внутри вычисленных доверительных границ. Иными словами, доверительный интервал $(\Gamma_н, \Gamma_в)$ «покрывает» истинное значение параметра γ с доверительной вероятностью $P = 1 - \alpha$.

Пример 4.2. Получим доверительную оценку a для измеряемой ФВ $X \in N(x, a, \sigma)$ при известной σ. В этом случае случайная величина $\dfrac{\overline{X} - a}{\sigma} \in N(x, 0, 1)$. По заданному α можно из справочных таблиц найти такое число z_α, что

$$P\left(-z_\alpha < \frac{\overline{X} - a}{\sigma} < z_\alpha\right) = 2\Phi_0(z_\alpha) = 1 - \alpha \tag{4.28}$$

или

$$P\left(\overline{X} - z_\alpha\sigma < a < \overline{X} + z_\alpha\sigma\right) = 2\Phi_0\left(z_\alpha\right) = 1 - \alpha\ . \tag{4.29}$$

Таким образом, случайный интервал $\left(\overline{X} - z_\alpha\sigma, \overline{X} + z_\alpha\sigma\right)$ является доверительной оценкой *a* с доверительной вероятностью $P = 1 - \alpha$ или

$$a = \overline{X} \pm z_\alpha\sigma\ , \quad P = 1 - \alpha\ . \tag{4.30}$$

Пример 4.3. Получим доверительную оценку *a* для измеряемой ФВ $X \in N(x, a, \sigma)$ при неизвестной *σ*. Поскольку *σ* неизвестна, необходимо воспользоваться ее точеной оценкой *S*. В этом случае случайная величина $\dfrac{\overline{X} - a}{S\left(\overline{X}\right)}$ удовлетворяет *t*-распределению с $n - 1$ степенями свободы. *t-распределение* ввел английский математик Госсет, публиковавший свои работы под псевдонимом «Стьюдент» (студент). Поэтому *t*-распределение называется также *распределением Стьюдента*. Интегральная функция *t*-распределения табулирована. По заданному α можно из таблиц найти такое число $t_{\alpha,\, n-1}$, называемое *коэффициентом Стьюдента*, для которого справедливо равенство

$$P\left(-t_{\alpha,\, n-1} < \frac{\overline{X} - a}{S\left(\overline{X}\right)} < t_{\alpha,\, n-1}\right) = 1 - \alpha \tag{4.31}$$

или

$$P\left(\overline{X} - t_{\alpha,\, n-1}S\left(\overline{X}\right) < a < \overline{X} + t_{\alpha,\, n-1}S\left(\overline{X}\right)\right) = 1 - \alpha\ . \tag{4.32}$$

Таким образом, случайный интервал $\left(\overline{X} - t_{\alpha,\, n-1}S\left(\overline{X}\right), \overline{X} + t_{\alpha,\, n-1}S\left(\overline{X}\right)\right)$ является доверительной оценкой *a* с доверительной вероятностью $P = 1 - \alpha$ или

$$a = \overline{X} \pm t_{\alpha,\, n-1}S\left(\overline{X}\right), \quad P = 1 - \alpha\ . \tag{4.33}$$

С ростом числа наблюдений *n* *t*-распределение стремится к нормальному распределению и становится практически неотличимым от него при $n \ge 30$. Поэтому с помощью коэффициентов Стьюдента можно также проводить доверительные оценки нормально распределенных величин. С этой целью в таблицах всегда указываются $t_{\alpha,\, n-1}$ при $n = \infty$. Так, для $P = 0{,}95$ $t_{0{,}05,\, \infty} = 1{,}96$, для $P = 0{,}99$ $t_{0{,}01,\, \infty} = 2{,}58$.

4.2. Характеристики погрешностей измерений

Рекомендация МИ 1317–2004 устанавливает следующие альтернативные характеристики погрешности измерений:

- СКО погрешности измерений;
- доверительные границы, в пределах которых погрешность измерений находится с заданной доверительной вероятностью;
- характеристики случайной и систематической составляющих погрешности измерений.

В качестве характеристик случайной составляющей погрешности измерений используют: СКО случайной составляющей погрешности измерений и (при необходимости) нормализованную автокорреляционную функцию случайной составляющей погрешности измерений или характеристики этой функции.

Характеристиками систематической составляющей погрешности измерений являются: СКО неисключенной систематической составляющей погрешности измерений или доверительные границы, в которых неисключенная систематическая составляющая погрешности измерений находится с заданной доверительной вероятностью (в частности, с вероятностью, равной единице).

При необходимости СКО случайной и (или) неисключенной систематической составляющих погрешности измерений сопровождают указанием принятой аппроксимации закона распределения погрешностей или его качественным описанием.

Когда результаты данных измерений используют совместно с другими результатами измерений, а также при расчетах погрешностей величин, функционально связанных с результатами данных измерений (например, критериев эффективности, функций потерь, результатов косвенных измерений и др.), в качестве характеристик погрешности измерений применяют, в основном, точечные характеристики погрешности – средние квадратические отклонения погрешности.

Когда результаты данных измерений являются окончательными, пригодными для решения определенной технической задачи и не предназначены для совместного использования с другими результатами измерений и для расчетов, применяют, в основном, интервальные характеристики погрешности – доверительные границы, в пределах которых погрешность находится с известной (заданной) доверительной вероятностью.

4.2.1. Оценка НСП

Как уже упоминалось в п. 4.4, полностью устранить все систематические погрешности измерения невозможно. Поэтому в исправленных результатах наблюдений всегда содержится НСП, которая обусловлена несовершенством методов и средств измерений, а также действием других факторов.

НСП – случайная величина, функция распределения которой, как правило, неизвестна. Во многих случаях можно определить только предельные значения Θ_i $(i=\overline{1, m})$ различных составляющих НСП. Так, если случайные погрешности пренебрежимо малы, в качестве границ составляющих НСП принимают, например, пределы допускаемых основных и дополнительных погрешностей средств измерений. Однако законы распределения составляющих НСП часто также неизвестны.

Обычно погрешности выражают через СКО. Поэтому в качестве модели составляющих НСП естественно принять закон распределения с наибольшим значением СКО. Можно показать, что среди распределений с одним максимумом наибольшим значением СКО обладает равномерный закон, ограниченный предельными погрешностями. Таким образом, руководствуясь принципом оценивания погрешностей сверху, полагают, что составляющие НСП независимы и имеют равномерное распределение.

Оценку НСП регламентируют РМГ 29–99 и ГОСТ 8.207–76. Границы НСП Θ результата измерения при малом числе составляющих ($m \le 4$) могут определяться по максимуму:

$$\Theta = \pm\sum_{i=1}^{m}\left|\Theta_i\right|, \tag{4.34}$$

где Θ_i – граница i-й составляющей НСП. Оценка (4.34) является завышенной, так как маловероятно, чтобы все составляющие НСП одновременно приняли свои граничные значения. Поэтому при $m > 4$ границы Θ оцениваются по точечной оценке СКО НСП.

С учетом (3.66) и (3.77) точечная оценка СКО НСП равна

$$\hat{\sigma}_{\Theta} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\frac{\Theta_i^2}{3}}\,. \tag{4.35}$$

Для приближенных оценок полагают, что НСП характеризуется нормальным распределением. Тогда при доверительной вероятности $P = 0{,}95$ доверительные границы равны:

$$\Theta = \pm t_{0,05,\,\infty}\hat{\sigma}_{\Theta} = \pm 1{,}96\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\frac{\Theta_i^2}{3}} \approx \pm 1{,}1\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\Theta_i^2}\,, \quad m > 4. \tag{4.36}$$

При доверительной вероятности $P = 0{,}99$ получаем:

$$\Theta = \pm t_{0,01,\,\infty}\hat{\sigma}_{\Theta} = \pm 2{,}58\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\frac{\Theta_i^2}{3}} \approx \pm 1{,}4\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\Theta_i^2}\,, \quad m > 4. \tag{4.37}$$

Когда $m \le 4$ и $P = 0{,}99$ доверительные границы вычисляются по формуле:

$$\Theta = \pm K\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\Theta_i^2}\,, \tag{4.38}$$

где K – коэффициент, который зависит от числа слагаемых и определяется по графику, приведенному в ГОСТ 8.207–76.

4.3. Обработка результатов прямых измерений

Рассмотрим отдельно прямые равноточные и неравноточные измерения, а также однократные прямые измерения.

4.3.1. Равноточные измерения

Методы обработки результатов прямых равноточных измерений с многократными наблюдениями регламентируются ГОСТ 8.207–76. Если измеряемая ФВ $X \in N(x, a, \sigma)$, при статистической обработке группы результатов наблюдений x_i' ($i = \overline{1, n}$) следует выполнить следующие операции.

1. Исключить известные систематические погрешности из результатов наблюдений x_i' ($i = \overline{1, n}$) (см. п. 3.4) и получить исправленные результаты наблюдений x_i ($i = \overline{1, n}$).
2. Вычислить точечную оценку математического ожидания a, т.е. среднее арифметическое $\bar{x}$ исправленных результатов наблюдений x_i ($i = \overline{1, n}$), принимаемое за результат измерения (см. (4.21)):

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad . \tag{4.39}$$

3. Найти *отклонения* Δx_i результатов отдельных наблюдений x_i от $\bar{x}$:

$$\Delta x_i = x_i - \bar{x}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{4.40}$$

Отклонение Δx_i называется также *случайным отклонением* или *остаточной погрешностью*. Проверкой правильности определения Δx_i является выражение:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 0. \tag{4.41}$$

4. Вычислить точечную оценку $\hat{s}$ СКО σ результата наблюдения x_i ($i = \overline{1, n}$) (см. (4.21)):

$$\hat{s} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta x_i\right)^2} \quad . \tag{4.42}$$

5. Если имеются промахи, исключить из ряда результатов наблюдений x_i результаты, содержащие грубые погрешности, в соответствии с п. 4.3.2 Повторить вычисления по пунктам 2-5.

6. Определить точечную оценку $\hat{s}(\bar{x})$ СКО результата измерения $\bar{x}$ (см. (4.24))

$$\hat{s}(\bar{x}) = \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta x_i\right)^2} \, . \tag{4.43}$$

7. Вычислить доверительные границы ε случайной погрешности (случайной составляющей погрешности) результата измерения. Без учета знака (см. (4.33))

$$\varepsilon = t_{\alpha,\, n-1}\hat{s}(\bar{x}). \tag{4.44}$$

Значение коэффициента Стьюдента $t_{\alpha,\, n-1}$ в зависимости от доверительной вероятности $P = 1-\alpha$ и числа результатов наблюдений n находят из таблиц.

8. Вычислить без учета знака (отбросить знак «±») границы или доверительные границы Θ НСП (неисключенных остатков систематической погрешности) результата измерения в соответствии с п. 4.2.1. Доверительную вероятность P при вычислении доверительных границ Θ принять той же, что и при вычислении доверительных границ ε.

9. Определить доверительные границы Δ погрешности результата измерения $\bar{x}$:

$$\Delta = \begin{cases} \varepsilon, \Theta < 0{,}8\hat{s}(\bar{x}) \\ k\hat{s}_{\Sigma}, 0{,}8\hat{s}(\bar{x}) \le \Theta \le 8\hat{s}(\bar{x}), \\ \Theta, \Theta > 8\hat{s}(\bar{x}) \end{cases} \tag{4.45}$$

где $\hat{s}_{\Sigma}$ – точечная оценка суммарного СКО результата измерения $\bar{x}$, равная

$$\hat{s}_{\Sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}_{\Theta}^2 + \hat{s}^2(\bar{x})}. \tag{4.46}$$

Точечная оценка $\hat{\sigma}_\Theta$ СКО НСП вычисляется по формуле (4.35). Коэффициент k зависит от соотношения случайной и неисключенной систематической погрешностей и определяется с помощью выражения

$$k = \frac{\varepsilon + \Theta}{\hat{\sigma}_\Theta + \hat{s}(\bar{x})}. \tag{4.47}$$

Доверительные границы погрешности Δ *результата измерений* – наибольшее и наименьшее значения погрешности измерений, ограничивающие доверительный интервал, внутри которого с заданной доверительной вероятностью находится искомое (истинное) значение погрешности результата измерений.

При симметричных границах термин может применяться в единственном числе – *доверительная граница*. Иногда вместо термина *доверительная граница* применяют термин *доверительная погрешность* или *погрешность при данной доверительной вероятности*.

Для определения доверительных границ Δ погрешности результата измерения принимают доверительную вероятность $P = 0{,}95$. В тех случаях, когда измерение нельзя повторить, помимо Δ, соответствующих $P = 0{,}95$, допускается указывать Δ при $P = 0{,}99$. В особых случаях, например при измерениях, результаты которых имеют значение для здоровья людей, допускается вместо $P = 0{,}99$ принимать более высокую доверительную вероятность.

10. Представить в соответствии с МИ 1317–2004 результаты измерений в форме:

$$\bar{x} \pm \Delta, P. \tag{4.48}$$

Числовое значение результата измерения $\bar{x}$ должно оканчиваться цифрой того же разряда, что и значение Δ, причем значение Δ выражают числом, содержащим не более двух значащих цифр.

Пример 4.4. Пусть после обработки результатов измерений постоянного напряжения получены результат измерения $\overline{U} = 12{,}345$ В и доверительные границы (без учета знака) $\Delta = 0{,}112$ В при $P = 0{,}95$. Тогда $\Delta \approx 0{,}11$ В, $\overline{U} \approx 12{,}35$ В, и результаты измерения: $12{,}35 \pm 0{,}11$ В, $P = 0{,}95$.

Измерения ФВ характеризуются неопределенностью, сходимостью и воспроизводимостью результатов измерений ФВ.

Неопределенность измерений – параметр, связанный с результатом измерений и характеризующий рассеяние значений, которые можно приписать измеряемой ФВ. Параметром может быть стандартное отклонение (или число, кратное ему), а также половина доверительного интервала с указанием доверительной вероятности.

Сходимость результатов измерений ФВ – близость друг к другу результатов измерений одной и той же ФВ, выполненных повторно одними и теми же средствами, одним и тем же методом в одинаковых условиях и с одинаковой тщательностью. Сходимость измерений двух групп многократных измерений может характеризоваться размахом, средней квадратической или средней арифметической погрешностью.

Воспроизводимость результатов измерений ФВ – близость результатов измерений одной и той же ФВ, полученных в разных местах, разными методами, разными средствами, разными операторами, в разное время, но приведенных к одним и тем же условиям измерений (температуре, давлению, влажности и др.). Воспроизводимость измерений может характеризоваться средними квадратическими погрешностями сравниваемых рядов измерений.

Ряд результатов измерений ФВ X является случайной выборкой объема n и характеризуется рассеянием результатов.

Рассеяние результатов в ряду измерений – несовпадение результатов измерений одной и той же ФВ в ряду равноточных измерений, как правило, обусловленное действием случайных погрешностей. Количественную оценку рассеяния результатов в ряду измерений вследствие действия случайных погрешностей получают после введения поправок на действие систематических погрешностей. Оценками рассеяния результатов в ряду измерений могут быть:

- размах,

- средняя арифметическая погрешность (по модулю),
- точечные оценки СКО $\hat{s}$ результатов отдельных наблюдений x_i ($i=\overline{1,n}$) и СКО $\hat{s}(\bar{x})$ результата измерений $\bar{x}$,
- доверительные границы погрешности (доверительная граница или доверительная погрешность).

Размах результатов измерений – оценка R_n рассеяния результатов единичных измерений ФВ, образующих ряд или случайную выборку объема *n*, вычисляемая по формуле

$$R_n = x_{\max} - x_{\min}, \tag{4.49}$$

где $x_{\max}$ и $x_{\min}$ – наибольшее и наименьшее значения ФВ в данном ряду измерений.

Средняя арифметическая погрешность $\Delta\bar{x}$ ряда наблюдений – среднее арифметическое модулей случайных отклонений Δx_i ($i=\overline{1,n}$):

$$\Delta\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\Delta x_i|. \tag{4.50}$$

4.3.2. Критерии грубых погрешностей

Оценка наличия грубых погрешностей (промахов) проводится с помощью статистической проверки гипотез. Среди результатов наблюдений x_i ($i=\overline{1,n}$) выбирается результат наблюдения x_c, который вызывает сомнение и рассматривается как наблюдение с промахом из-за большого отклонения $\Delta x_c = x_c - \bar{x}$ по сравнению с отклонениями результатов других наблюдений. Выдвигается гипотеза H_0 о том что «сомнительный» результат x_c в действительности принадлежит к возможной совокупности полученных в данных условиях результатов наблюдений. С помощью специальных критериев пытаются опровергнуть гипотезу H_0. Если это удается, то результат x_c исключают. В противном случае результат x_c оставляют.

Если измеряемая ФВ $X \in N(x, a, \sigma)$, то при $n \geq 30$ и доверительной вероятности $P = 0{,}9973$ значение коэффициента Стьюдента $t_{0{,}0027,\infty} = 3$, так что доверительные границы погрешности без учета знака $\Delta_n = 3\hat{s}$. Доверительную погрешность Δ_n считают предельной погрешностью.

Предельная погрешность измерения в ряду измерений – максимальная доверительная погрешность измерения (плюс, минус), допускаемая для данной измерительной задачи. Поэтому, если

$$\left|\Delta x_c\right| > 3\hat{s}, \tag{4.51}$$

то результат наблюдения x_c содержит грубую погрешность и должен быть исключен из дальнейшей обработки результатов наблюдений. Поскольку $\hat{s}$ является точечной оценкой СКО σ, то неравенство (4.51) называется критерием «трех сигм».

Когда $n < 30$, используются другие критерии, с помощью которых можно исключить измерения с промахами. К таким критериям относятся критерии Греббса (Смирнова), Шарлье, Шовене, Диксона и др.

4.3.3. Неравноточные измерения

Пусть имеется l групп независимых наблюдений одной и той же ФВ $X \in N(x, a, \sigma)$, n_j – число наблюдений в j-й группе ($j = \overline{1, l}$). При статистической обработке неравноточных измерений следует выполнить следующие операции.

1. Вычислить точечные оценки математического ожидания a, т.е. средние арифметические $\bar{x}_j$ исправленных результатов наблюдений x_i ($i = \overline{1, n_j}$, $j = \overline{1, l}$), принимаемых за результаты измерений.
2. Определить точечные оценки $\hat{s}(\bar{x}_j)$ СКО результатов измерения $\bar{x}_j$ ($j = \overline{1, l}$).
3. Найти среднее взвешенное значение $\bar{\bar{x}}$ ФВ X, принимаемое за результат неравноточных измерений.

Среднее взвешенное значение ФВ – среднее значение ФВ из ряда неравноточных измерений, определенное с учетом веса каждого единичного измерения. Среднее взвешенное значение ФВ называют также *средним весовым*. Среднее взвешенное значение ФВ X вычисляется по формуле:

$$\bar{\bar{x}} = \sum_{j=1}^{l} p_j \bar{x}_j\,, \tag{4.52}$$

где p_j – вес результата измерения $\bar{x}_j$ ($j = \overline{1, l}$).

Вес результата измерений ФВ – положительное число, служащее оценкой доверия к тому или иному отдельному результату измерения ФВ, входящему в ряд неравноточных измерений. Поскольку $M\left(\bar{x}_j\right) = M\left(\bar{\bar{x}}\right) = a$ ($j = \overline{1, l}$), то из (4.52) следует

$$\sum_{j=1}^{l} p_j = 1\,. \tag{4.53}$$

В большинстве случаев принято считать, что веса p_j результатов измерения $\bar{x}_j$, входящих в ряд неравноточных измерений, обратно пропорциональны квадратам точечных оценок $\hat{s}\left(\bar{x}_j\right)$ СКО результатов измерения $\bar{x}_j$ ($j = \overline{1, l}$), т.е.

$$p_1 : p_2 : \ldots : p_l = \frac{1}{\hat{s}^2\left(\bar{x}_1\right)} : \frac{1}{\hat{s}^2\left(\bar{x}_2\right)} : \ldots : \frac{1}{\hat{s}^2\left(\bar{x}_l\right)}. \tag{4.54}$$

Таким образом, с учетом (4.54)

$$p_j = \frac{1}{\hat{s}^2\left(\bar{x}_j\right)} \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{\hat{s}^2\left(\bar{x}_i\right)}. \tag{4.55}$$

4. Определить точечную оценку $\hat{s}\left(\bar{\bar{x}}\right)$ СКО результата неравноточных измерений $\bar{\bar{x}}$:

$$\hat{s}\left(\bar{\bar{x}}\right) = \sqrt{\sum_{j=1}^{l} p_j^2 \hat{s}^2\left(\bar{x}_j\right)}. \tag{4.56}$$

5. Вычислить доверительные границы ε случайной погрешности результата неравноточных измерений $\bar{\bar{x}}$. Без учета знака

$$\varepsilon = t_{\alpha,\, n-1} \hat{s}\left(\bar{\bar{x}}\right). \tag{4.57}$$

Число степеней свободы распределения Стьюдента определяется по формуле:

$$n-1=l^2\left(\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{n_j-1}\right)^{-1}. \qquad (4.58)$$

6. Найти без учета знака границы или доверительные границы Θ_j НСП результатов измерения $\bar{x}_j$ ($j=\overline{1,l}$) (см. п. 4.2.1). Доверительную вероятность P при вычислении доверительных границ Θ_j ($j=\overline{1,l}$) принять той же, что и при вычислении доверительных границ ε. Положить границы или доверительные границы Θ НСП результата неравноточных измерений $\bar{\bar{x}}$ равными наибольшими из Θ_j ($j=\overline{1,l}$):

$$\Theta=\max_{j=\overline{1,l}}\Theta_j. \qquad (4.59)$$

7. Определить доверительные границы Δ погрешности результата неравноточных измерений $\bar{\bar{x}}$:

$$\Delta=\begin{cases}\varepsilon,\ \Theta<0{,}8\hat{s}(\bar{\bar{x}})\\ \sqrt{\Theta^2+\varepsilon^2},\ 0{,}8\hat{s}(\bar{\bar{x}})\le\Theta\le 8\hat{s}(\bar{\bar{x}}).\\ \Theta,\ \Theta>8\hat{s}(\bar{\bar{x}})\end{cases} \qquad (4.60)$$

8. Представить результаты измерений в форме:

$$\bar{\bar{x}}\pm\Delta,\ P. \qquad (4.61)$$

4.3.4. Прямые однократные измерения

Однократные измерения или измерения с однократным наблюдением проводятся при соблюдении следующих условий:

- исследуемый объект измерения заранее достаточно изучен и есть полная уверенность в адекватности принятой математической модели объекта,
- имеется достаточно данных об измеряемой и влияющих физических величинах,
- известно, что случайная составляющая погрешности результата измерения несущественна по сравнению с систематической или находится в пределах допустимого интервала.

Выполнение данных условий, т.е. наличие исчерпывающей первичной (априорной) информации об измерительной задаче, обеспечивает сходимость и воспроизводимость измерений с однократными наблюдениями.

Если измеряемая ФВ $X \in N(x, a, \sigma)$, при обработке результатов измерения с однократным наблюдением x' следует выполнить следующие операции.

1. Исключить известные систематические погрешности из результата наблюдения x' (см. п. 3.4), получить исправленный результат наблюдения x.
2. Принять за результат измерения исправленный результат наблюдения x.
3. Вычислить без учета знака границы или доверительные границы Θ НСП при выбранной доверительной вероятности P результата измерения x в соответствии с п. 4.2.1.
4. По известной точечной оценке $\hat{s}$ СКО результата измерения x определить без учета знака доверительные границы ε случайной погрешности результата измерения x:

$$\varepsilon = t_{\alpha,\infty}\hat{s}. \tag{4.62}$$

Доверительную вероятность $P = 1 - \alpha$ при вычислении доверительных границ ε принять той же, что и при вычислении доверительных границ Θ.

5. Определить доверительные границы Δ погрешности результата измерения x:

$$\Delta = \begin{cases} \varepsilon, \Theta < 0{,}5\hat{s} \\ 0{,}8(\Theta + \varepsilon), 0{,}5\hat{s} \le \Theta \le 8\hat{s} \\ \Theta, \Theta > 8\hat{s} \end{cases}. \tag{4.63}$$

6. Представить результаты измерений в форме:

$$x \pm \Delta, P. \tag{4.64}$$

4.4. Косвенные измерения

Косвенные измерения ФВ Q определяются выражением

$$q = f(x_1, x_2, ..., x_m), \tag{4.65}$$

где аргументы x_i ($i = \overline{1, m}$) – результаты прямых измерений физических величин X_i ($i = \overline{1, m}$), связанные известной функциональной зависимостью f с результатом q косвенных измерений ФВ Q. Так как аргументы содержат погрешности, то и результат косвенных измерений также будет содержать погрешность.

Пусть $\overline{q}$ – действительное значение ФВ Q, Δ – погрешность косвенных измерений, $\overline{x}_i$ и Δ_i – действительное значение и погрешность прямых измерений ФВ X_i ($i = \overline{1, m}$). Тогда (4.65) представимо в виде

$$\overline{q} + \Delta = f(\overline{x}_1 + \Delta_1, \overline{x}_2 + \Delta_2, ..., \overline{x}_m + \Delta_m). \tag{4.66}$$

Если $\Delta_i / \overline{x}_i << 1$ ($i = \overline{1, m}$), можно воспользоваться разложением в ряд Тейлора и ограничиться линейными членами:

$$\overline{q} + \Delta = f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_m) + \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \Delta_i, \tag{4.67}$$

где значения частных производных $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$ ($i = \overline{1, m}$) вычисляются при подстановке $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_m$. Из (4.67) следует, что

$$\overline{q} = f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_m), \tag{4.68}$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \Delta_i. \tag{4.69}$$

Так как $\Delta = \Delta_{сис} + \Delta_{сл}$, $\Delta_i = \Delta_{сисi} + \Delta_{слi}$, где $\Delta_{сис}$ и $\Delta_{сл}$ – систематическая и случайная погрешности результата косвенных измерений ФВ Q, $\Delta_{сисi}$ и $\Delta_{слi}$– систематическая и случайная погрешности результата прямых измерений X_i ($i = \overline{1, m}$), (4.69) распадается на два равенства

$$\Delta_{сис} = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \Delta_{сисi}, \tag{4.70}$$

$$\Delta_{сл} = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \Delta_{сл i} . \qquad (4.71)$$

Поскольку $\Delta_{сис i}$ исключаются из результатов прямых измерений, то $\Delta_{сис} = 0$. Случайные погрешности оцениваются по величине СКО. Возведем (4.71) в квадрат, и определим математическое ожидание от левой и правой частей выражения. Получим:

$$M\left(\Delta_{сл}^2\right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 M\left(\Delta_{сл i}^2\right) + \sum_{\substack{i,\, j=1 \\ i \neq j}}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) M\left(\Delta_{сл i} \Delta_{сл j}\right). \qquad (4.72)$$

Так как $M(\Delta_{сл}) = 0$ и $M(\Delta_{сл i}) = 0$, то $M\left(\Delta_{сл}^2\right) = D\left(\Delta_{сл}^2\right) = \sigma^2$ (СКО случайной погрешности результата косвенных измерений ФВ Q), $M\left(\Delta_{сл i}^2\right) = D\left(\Delta_{сл i}^2\right) = \sigma_i^2$ (СКО случайной погрешности результата ФВ X_i). Поэтому

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_i^2 + \sum_{\substack{i,\, j=1 \\ i \neq j}}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) M\left(\Delta_{сл i} \Delta_{сл j}\right). \qquad (4.73)$$

Если случайные погрешности физических величин X_i ($i = \overline{1, m}$) не зависят друг от друга, то $M\left(\Delta_{сл i} \Delta_{сл j}\right) = M\left(\Delta_{сл i}\right) M\left(\Delta_{сл j}\right) = 0$ и в этом случае

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_i^2 . \qquad (4.74)$$

4.4.1. Обработка косвенных измерений с многократными наблюдениями

Методы обработки результатов косвенных измерений с многократными наблюдениями регламентируются МИ 2083–90. Пусть проведены косвенные измерения ФВ Q, определяемые выражением (4.65), причем

- физические величины $X_i \in N(x, a_i, \sigma_i)$ ($i = \overline{1, m}$),
- случайные погрешности X_i не зависят друг от друга,
- прямые измерения каждой ФВ X_i включают n_i наблюдений, результаты которых $(x_i')_k$ ($k = \overline{1, n_i}$).

При статистической обработке результата косвенных измерений с многократными наблюдениями следует выполнить следующие операции.

1. Исключить известные систематические погрешности из результатов наблюдений $(x_i')_k$ ($k=\overline{1,n_i}$, $i=\overline{1,m}$) и получить исправленные результаты наблюдений $(x_i)_k$.

2. Вычислить точечные оценки математических ожиданий a_i, т.е. среднее арифметические $\bar{x}_i$ $(i=\overline{1,m})$ исправленных результатов наблюдений $(x_i)_k$ ($k=\overline{1,n_i}$)

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i}(x_i)_k\,. \tag{4.75}$$

3. Найти отклонения $\Delta(x_i)_k$ результатов отдельных наблюдений $(x_i)_k$ от $\bar{x}_i$:

$$\Delta(x_i)_k = (x_i)_k - \bar{x}_i \quad k=\overline{1,n_i}\,,\quad i=\overline{1,m}\,. \tag{4.76}$$

4. Вычислить точечную оценку $\hat{s}_i$ СКО σ_i результата наблюдения $(x_i)_k$:

$$\hat{s}_i = \sqrt{\frac{1}{n_i-1}\sum_{k=1}^{n_i}\left[\Delta(x_i)_k\right]^2}\,. \tag{4.77}$$

5. Если имеются промахи, исключить из ряда результатов наблюдений $(x_i)_k$ результаты, содержащие грубые погрешности, в соответствии с п. 4.3.2. Повторить вычисления по пунктам 2-5.

6. Определить точечные оценки $\hat{s}(\bar{x}_i)$ средних квадратических отклонений результатов прямых измерений $\bar{x}_i$:

$$\hat{s}(\bar{x}_i) = \frac{\hat{s}_i}{\sqrt{n_i}} = \sqrt{\frac{1}{n_i(n_i-1)}\sum_{k=1}^{n_i}\left[\Delta(x_i)_k\right]^2} \quad i=\overline{1,m}\,. \tag{4.78}$$

7. Принять за результат $\bar{q}$ косвенного измерения ФВ Q значение, вычисляемое с помощью (4.68), т.е. при подстановке в функцию f результатов прямых измерений $\bar{x}_i$.

8. Вычислить точечную оценку $\hat{s}(\bar{q})$ СКО результата косвенного измерения $\bar{q}$ (см. (4.74)):

$$\hat{s}(\overline{q}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\hat{s}(\overline{x}_i)\right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\hat{E}^2(\overline{x}_i)}. \tag{4.79}$$

Величина $\hat{E}(\overline{x}_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}\hat{s}(\overline{x}_i)$ называется *частной погрешностью* косвенного измерения.

9. Определить доверительные границы ε случайной погрешности результата измерения косвенного измерения $\overline{q}$. Без учета знака

$$\varepsilon = t_{\alpha,N}\hat{s}(\overline{q}), \tag{4.80}$$

где «эффективное » число N степеней свободы распределения Стьюдента находится из выражения:

$$N = \left[\sum_{i=1}^{m}\hat{E}^2(\overline{x}_i) - 2\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\hat{E}^4(\overline{x}_i)}{n_i+1}\right)^2\right] \Bigg/ \sum_{i=1}^{m}\frac{\hat{E}^4(\overline{x}_i)}{n_i+1}. \tag{4.81}$$

10. Вычислить без учета знака границы или доверительные границы Θ НСП результата косвенного измерения $\overline{q}$. Доверительную вероятность P при вычислении доверительных границ Θ принять той же, что и при вычислении доверительных границ ε. Границы и доверительные границы:

$$\Theta = \begin{cases} \sum_{i=1}^{m}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\Theta_i\right| & , m \le 4 \\ K\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Theta_i\right)^2} & , m > 4 \end{cases}, \tag{4.82}$$

где Θ_i – граница НСП прямых измерений ФВ X_i ($i = \overline{1, m}$), коэффициент

$$K = \begin{cases} 1{,}1 & P = 0{,}95 \\ 1{,}4 & P = 0{,}99 \end{cases}. \tag{4.83}$$

Θ при $m \le 4$ являются границами НСП, а Θ при $m > 4$ – доверительными границами, так как K зависит от значения доверительной вероятности.

11. Определить доверительные границы Δ погрешности результата косвенного измерения $\overline{q}$:

$$\Delta = \begin{cases} \varepsilon, \Theta < 0{,}8\hat{s}(\overline{q}) \\ \sqrt{\Theta^2 + \varepsilon^2}, 0{,}8\hat{s}(\overline{q}) \le \Theta \le 8\hat{s}(\overline{q}). \\ \Theta, \Theta > 8\hat{s}(\overline{q}) \end{cases} \tag{4.84}$$

12. Представить результаты измерений в форме:

$$\overline{q} \pm \Delta, P. \tag{4.85}$$

4.4.2. Критерий ничтожных погрешностей

Частные погрешности $\hat{E}(\overline{x}_i)$ вносят различный вклад в формирование значения точечной оценки $\hat{s}(\overline{q})$ СКО результата косвенного измерения $\overline{q}$. Поскольку значение доверительных границ Δ погрешности округляется до двух значащих цифр, то некоторые частные погрешности могут не оказывать заметного влияния на значение $\hat{s}(\overline{q})$. Такими частными погрешностями можно пренебречь.

Частная погрешность $\hat{E}(\overline{x}_{m+1})$ называется *ничтожной (ничтожно малой)*, если она изменит значение $\hat{s}(\overline{q})$ не более, чем на 5%. Согласно (4.79) справедливо неравенство:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m} \hat{E}^2(\overline{x}_i) + \hat{E}^2(\overline{x}_{m+1})} < 1{,}05\hat{s}(\overline{q}). \tag{4.86}$$

Возведем обе части неравенства (4.86) в квадрат, и после преобразования и округления получим:

$$\hat{E}(\overline{x}_{m+1}) < \frac{1}{3}\hat{s}(\overline{q}). \tag{4.87}$$

Условие (4.87) называется *критерием ничтожных погрешностей*: если частная погрешность меньше $\frac{1}{3}\hat{s}(\overline{q})$, то она является ничтожной и может быть исключена из рассмотрения. Критерий ничтожных погрешностей применим также и при оценке границ НСП (см. (4.82)).

4.4.3. Обработка косвенных измерений с однократным наблюдением

Косвенные измерения ФВ с однократным наблюдением проводятся также при наличии исчерпывающей первичной информации об измерительной задаче (см. п. 4.3.4). Пусть проведены косвенные измерения ФВ Q, определяемые выражением (4.65), причем

- физические величины $X_i \in N(x, a_i, \sigma_i)$ $(i = \overline{1, m})$,
- случайные погрешности X_i не зависят друг от друга,
- прямое измерение каждой ФВ X_i включает одно наблюдение.

При обработке результата косвенного измерения с однократным наблюдением следует выполнить следующие операции.

1. Исключить известные систематические погрешности из результатов наблюдений x_i' физических величин X_i $(i = \overline{1, m})$ и получить исправленные результаты наблюдений x_i.
2. Принять за результат q однократного косвенного измерения значение, вычисляемое с помощью (4.65), т.е. при подстановке в функцию f исправленных результатов наблюдений x_i $(i = \overline{1, m})$.
3. Вычислить с помощью (4.82) без учета знака границы или доверительные границы Θ НСП при выбранной доверительной вероятности P результата однократного косвенного измерения q.
4. По известным точечным оценкам средних квадратических отклонений СКО $\hat{s}_i$ результатов наблюдений x_i найти точечную оценку $\hat{s}(q)$ СКО результата однократного косвенного измерения q:

$$\hat{s}(q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \hat{s}_i \right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \hat{E}_i^2} \,. \tag{4.88}$$

5. Определить без учета знака доверительные границы ε случайной погрешности результата измерения x:

$$\varepsilon = t_{\alpha, \infty} \hat{s}(q). \tag{4.89}$$

Доверительную вероятность $P = 1 - \alpha$ при вычислении доверительных границ ε принять той же, что и при вычислении доверительных границ Θ.

6. Вычислить доверительные границы Δ погрешности результата измерения x:

$$\Delta = \begin{cases} \varepsilon, \Theta < 0{,}5\hat{s}(q) \\ 0{,}8(\Theta + \varepsilon), 0{,}5\hat{s}(q) \le \Theta \le 8\hat{s}(q). \\ \Theta, \Theta > 8\hat{s}(q) \end{cases} \tag{4.90}$$

7. Представить результаты измерений в форме:

$$q \pm \Delta, P. \tag{4.91}$$

Пример 4.5. С помощью вольтметра V и резистора R проведены однократные косвенные измерения силы тока I (рис. 4.1). Результат измерения напряжения $U = 65$ мВ, предельное значение шкалы вольтметра $U_{\max} = 100$ мВ, входное сопротивление вольтметра $R_V = 1$ МОм, класс точности вольтметра $\gamma_U = \pm 5$ % (неточность значения R_V учитывается классом точности γ_U). Номинальное сопротивление резистора $R = 5$ Ом, допуск резистора R составляет $\gamma_R = \pm 2$ %. Определим результаты косвенных измерений, если случайные погрешности пренебрежимо малы, а известные систематические погрешности из результатов наблюдений исключены.

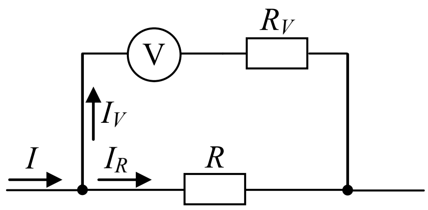


Рис. 4.1. Косвенные измерения силы тока

1. Сила тока

$$I = I_V + I_R = \frac{U}{R_V} + \frac{U}{R} = 13{,}0001 \text{ мА}, \tag{4.92}$$

где I_V – сила тока, протекающего через вольтметр, I_R – сила тока, протекающего через резистор R. Таким образом, $I = I(U, R)$, т.е. является функцией двух переменных.

2. Поскольку случайные погрешности пренебрежимо малы, границы основных погрешностей вольтметра и резистора, определяемые классом точности и допуском, являются границами неисключенных систематических погрешностей.

2.1. Без учета знака границы НСП вольтметра:

$$\Theta_U = 0{,}01\gamma_U U_{\max} = 0{,}01 \times 5 \times 100 = 5 \text{ мВ}. \tag{4.93}$$

2.2. Без учета знака границы НСП резистора R:

$$\Theta_R = 0{,}01\gamma_R R = 0{,}01 \times 2 \times 5 = 0{,}1 \text{ Ом}. \tag{4.94}$$

2.3. Так как число аргументов $m = 2 \leq 4$, определим без учета знака границы НСП косвенных измерений силы тока (см. (4.82))

$$\Theta_I = \left|\frac{\partial I}{\partial U}\Theta_U\right| + \left|\frac{\partial I}{\partial R}\Theta_R\right| = \left|\left(\frac{1}{R_V} + \frac{1}{R}\right)\Theta_U\right| + \left|\left(-\frac{U}{R^2}\right)\Theta_R\right| = 1{,}26 \text{ мА}. \tag{4.95}$$

3. Поскольку случайные погрешности пренебрежимо малы, границы Δ погрешности результата косвенных измерений силы тока (см. (4.90)):

$$\Delta = \Theta_I = 1{,}26 \approx 1{,}3 \text{ мА}. \tag{4.96}$$

4. Результаты однократных косвенных измерений силы тока:

$$13{,}0 \pm 1{,}3 \text{ мА}. \tag{4.97}$$

4.5. Совместные измерения

Совместные измерения физических величин проводятся с целью установления функциональной зависимости между величинами. При отыскании такой зависимости двух физических величин y и x выполняются одновременно их многократные измерения и формируются пары значений (y_i, x_i) ($i = \overline{1, n}$), где y_i, x_i и – результаты i-го измерения величин y и x. Так как результаты измерений y_i, x_i содержат погрешности, то пары значений (y_i, x_i) не будут принадлежать истинной функциональной зависимости $y = f(x)$, а будут рассеваться относительно нее.

Мерой рассеяния результатов измерений (y_i, x_i) относительно истинной зависимости является дисперсия. Наиболее точной оценкой зависимости $y = f(x)$ будет такая зависимость $y = \hat{f}(x)$, при которой дисперсия пар значений (y_i, x_i) относительно $y = \hat{f}(x)$ будет минимальной. Для оценки дисперсии необходимо вычислить сумму квадратов отклонений $\sum\limits_{i=1}^{n}(\Delta y_i)^2$, где $\Delta y_i = y_i - \hat{f}(x_i)$. Минимальной $\sum_{i=1}^{n}(\Delta y_i)^2$ будет соответствовать минимальная дисперсия. Метод, с помощью которого отыскивается оценка $y = \hat{f}(x)$ истинной зависимости $y = f(x)$ путем минимизации $\sum_{i=1}^{n}(\Delta y_i)^2$, называется *методом наименьших квадратов* (МНК).

Если погрешности результатов измерения x_i ($i = \overline{1, n}$) пренебрежимо малы, систематические погрешности результатов измерения y_i ($i = \overline{1, n}$) исключены, ФВ y принадлежит нормальному распределению и случайные погрешности результатов измерений y_i независимы, то с помощью МНК можно вычислить наиболее правдоподобные точечные оценки параметров истинной зависимости $y = f(x)$. На практике указанные условия выполняются редко, и МНК является удобным аналитическим способом расчета параметров зависимости $y = \hat{f}(x)$.

Рассмотрим применение МНК на примере линейной зависимости между y и x. В этом случае

$$y = f(x) = a + bx, \quad y = \hat{f}(x) = \hat{a} + \hat{b}x, \tag{4.98}$$

где $\hat{a}$ и $\hat{b}$ – точечные оценки параметров a и b истинной зависимости между y и x. Сумма квадратов отклонений

$$S(\hat{a}, \hat{b}) = \sum_{i=1}^{n}(\Delta y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i)^2 \tag{4.99}$$

будет минимальна, если

$$\frac{\partial S(\hat{a}, \hat{b})}{\partial \hat{a}} = 0, \quad \frac{\partial S(\hat{a}, \hat{b})}{\partial \hat{b}} = 0. \tag{4.100}$$

После дифференцирования получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \hat{a}n + \hat{b}\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \hat{a}\sum_{i=1}^{n} x_i + \hat{b}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases}. \tag{4.101}$$

Разделим первое уравнение системы на n и введем $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$.

Тогда система (4.101) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \hat{a} + \hat{b}\bar{x} = \bar{y} \\ \hat{a}n\bar{x} + \hat{b}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases}. \tag{4.102}$$

Решая систему (4.102), получим

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{xy}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}. \tag{4.103}$$

На рис. 2.1 представлена экспериментальная зависимость значения сопротивления R резистора от температуры t: точки (R_i, t_i) ($i = \overline{1, 5}$) и прямая $R = -0{,}177t + 601{,}6$. Параметры прямой $\hat{a} = -0{,}177$ Ом/°С и $\hat{b} = 601{,}6$ Ом получены с помощью МНК.

Приложение А

Таблица А.1

Множители и приставки, используемые для образования наименований и обозначений десятичных кратных и дольных единиц SI

Десятичный множитель	Приставка	Обозначение приставки	
		международное	русское
10^{24}	иотта	Y	И
20^{21}	зетта	Z	З
10^{18}	экса	E	Э
10^{15}	пета	P	П
10^{12}	тера	T	Т
10^{9}	гига	G	Г
10^{3}	кило	k	к
10^{2}	гекто	h	г
10^{1}	дека	da	да
10^{-1}	деци	d	д
10^{-2}	санти	c	с
10^{-3}	милли	m	м
10^{-6}	микро	μ	мк
10^{-9}	нано	n	н
10^{-12}	пико	p	п
10^{-15}	фемто	f	ф
10^{-18}	атто	a	а
10^{-21}	зепто	z	з
10^{-24}	иокто	y	и

Приложение Б

Таблица Б.1

Фундаментальные физические постоянные

Фундаментальные постоянные	Значения, выраженные в SI
Гравитационная постоянная G	$G = 6{,}6720 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2
Скорость света в вакууме c	$c = 2{,}99792458 \cdot 10^{8}$ м/с
Магнитная постоянная μ_0	$\mu_0 = 1{,}25663706144 \cdot 10^{-6}$ Гн/м
Электрическая постоянная ε_0	$\varepsilon_0 = 8{,}85418782 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Элементарный заряд (заряд электрона) e	$e = 1{,}6021892 \cdot 10^{-19}$ Кл
Постоянная Авогадро $N_{\text{А}}$	$N_{\text{А}} = 6{,}022045 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Постоянная Фарадея F	$F = 96484{,}56$ Кл/моль
Атомная единица массы а.е.м.	1 а.е.м. = $1{,}660566 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса покоя электрона m_{e}	$m_{\text{e}} = 9{,}109534 \cdot 10^{-31}$ кг
Масса покоя протона m_{p}	$m_{\text{p}} = 1{,}6726485 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса покоя нейтрона m_{n}	$m_{\text{n}} = 1{,}6749543 \cdot 10^{-27}$ кг
Постоянная Планка h и $\hbar$	$h = 6{,}626176 \cdot 10^{-34}$ Дж·с $\hbar = h/2\pi = 1{,}0545887 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Объем 1 моля идеального газа при нормальных условиях V_0	$V_0 = 22{,}41383 \cdot 10^{-3}$ м^3/моль
Универсальная газовая постоянная (молярная газовая постоянная) R	$R = 8{,}31441$ Дж/(моль·К)
Постоянная Больцмана $k_{\text{Б}}$	$k_{\text{Б}} = 1{,}380662 \cdot 10^{-23}$ Дж/К

Приложение В

Таблица В.1

Основные единицы SI

Величина		Единица		
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение	
			международное	русское
Длина	L	метр	m	м
Масса	M	килограмм	kg	кг
Время	T	секунда	s	с
Сила электрического тока	I	ампер	A	А
Термодинамическая температура	Θ	кельвин	K	К
Количество вещества	N	моль	mol	моль
Сила света	J	кандела	cd	кд

Метр есть длина пути, проходимого светом в вакууме за интервал времени 1/299792458 с [XVII ГКМВ (1983 г.) Резолюция 1].

Килограмм есть единица массы, равная массе международного прототипа килограмма [I ГКМВ (1889 г.) и III ГКМВ (1901 г.)].

Секунда есть время, равное 9192631770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133 (^{133}Cs) [XIII ГКМВ (1967 г.), Резолюция 1].

Ампер есть сила неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади кругового поперечного сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, вызвал бы на каждом участке проводника длиной 1 м силу взаимодействия, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н [МКМВ (1946 г.), Резолюция 2, одобренная IX ГКМВ (1948 г.)].

Кельвин есть единица термодинамической температуры, равная 1/273,16 части термодинамической температуры тройной точки воды [XIII ГКМВ (1967 г.), Резолюция 4].

Моль есть количество вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько содержится атомов в углероде-12 массой 0,012 кг. При применении моля структурные элементы должны быть специфицированы и могут быть атомами, молекулами, ионами, электронами и другими частицами или специфицированными группами частиц [XIV ГКМВ (1971 г.), Резолюция 3].

Кандела есть сила света в заданном направлении источника, испускающего монохроматическое излучение частотой $540 \cdot 10^{12}$ Гц, энергетическая сила света которого в этом направлении составляет 1/683 Вт/ср [XVI ГКМВ (1979 г.), Резолюция 3].

Примечания.

1. Кроме термодинамической температуры (обозначение T) в SI допускается применять также температуру Цельсия (обозначение t), определяемую выражением $t = T - T_0$, где $T_0 = 273{,}15$ К. Термодинамическую температуру выражают в Кельвинах, температуру Цельсия – в градусах Цельсия. По размеру градус Цельсия равен кельвину. Градус Цельсия – это специальное наименование, используемое в данном случае вместо наименования «кельвин».
2. Интервал или разность термодинамических температур выражают в кельвинах. Интервал или разность температур Цельсия допускается выражать как в кельвинах, так и в градусах Цельсия.
3. Обозначение Международной практической температуры в МТШ-90, если ее необходимо отличить от термодинамической температуры, образуется путем добавления к обозначению термодинамической температуры индекса «90» (например, T_{90} или t_{90}).

Продолжение прил. В

Таблица В.2

Производные единицы SI, наименования и обозначения которых образованы с использованием наименований и обозначений основных единиц SI

Величина		Единица		
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение	
			международное	русское
Площадь	L^2	квадратный метр	m^2	$м^2$
Объем, вместимость	L^3	кубический метр	m^3	$м^3$
Скорость	LT^{-1}	метр в секунду	m/s	м/с
Ускорение	LT^{-2}	метр на секунду в квадрате	m/s^2	$м/с^2$
Волновое число	L^{-1}	метр в минус первой степени	m^{-1}	$м^{-1}$
Плотность	$L^{-3}M$	килограмм на кубический метр	kg/m^3	$кг/м^3$
Удельный объем	L^3M^{-1}	кубический метр на килограмм	m^3/kg	$м^3/кг$
Плотность электрического тока	$L^{-2}I$	ампер на квадратный метр	A/m^2	$А/м^2$
Напряженность магнитного поля	$L^{-1}I$	ампер на метр	A/m	А/м
Молярная концентрация компонента	$L^{-3}N$	моль на кубический метр	mol/m^3	$моль/м^3$
Яркость	$L^{-2}J$	кандела на квадратный метр	cd/m^2	$кд/м^2$

Продолжение прил. В

Таблица В.3

Производные единицы SI, имеющие специальные наименования и обозначения

Величина		Единица		
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение	
			международное	русское
1	**2**	**3**	**4**	**5**
Плоский угол	1	радиан	rad	рад
Телесный угол	1	стерадиан	sr	ср
Частота	T^{-1}	герц	Hz	Гц
Сила	LMT^{-2}	ньютон	N	Н
Давление	$L^{-1}MT^{-2}$	паскаль	Pa	Па
Энергия, работа, количество теплоты	$L^{2}MT^{-2}$	джоуль	J	Дж
Мощность	$L^{2}MT^{-3}$	ватт	W	Вт
Электрический заряд, количество электричества	TI	кулон	C	Кл
Электрическое напряжение, электрический потенциал, разность электрических потенциалов, электродвижущая сила	$L^{2}MT^{-3}I^{-1}$	вольт	V	В
Электрическая емкость	$L^{-2}M^{-1}T^{4}I^{2}$	фарад	F	Ф
Электрическое сопротивление	$L^{2}MT^{-3}I^{-2}$	ом	Ω	Ом
Электрическая проводимость	$L^{-2}M^{-1}T^{3}I^{2}$	сименс	S	См

Продолжение прил. В

Окончание таблицы В.3

1	2	3	4	5
Поток магнитной индукции, магнитный поток	$L^2MT^{-2}I^{-1}$	вебер	Wb	Вб
Плотность магнитного потока, магнитная индукция	$MT^{-2}I^{-1}$	тесла	T	Тл
Индуктивность, взаимная индуктивность	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	генри	H	Гн
Температура Цельсия	Θ	градус Цельсия	°C	°C
Световой поток	J	люмен	lm	лм
Освещенность	$L^{-2}J$	люкс	lx	лк
Активность нуклида в радиоактивном источнике (активность радионуклида)	T^{-1}	беккерель	Bq	Бк
Поглощенная доза ионизирующего излучения, керма	L^2T^{-2}	грэй	Gy	Гр
Эквивалентная доза ионизирующего излучения, эффективная доза ионизирующего излучения	L^2T^{-2}	зиверт	Sv	Зв
Активность катализатора	NT^{-1}	катал	kat	кат

Таблица В.4

Производные единицы SI, наименования и обозначения которых образованы с использованием специальных наименований и обозначений, указанных в таблице В.3

Величина		Единица		
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение	
			международное	русское
1	**2**	**3**	**4**	**5**
Момент силы	$L^{2}MT^{-2}$	ньютон-метр	N·m	Н·м
Поверхностное натяжение	MT^{2}	ньютон на метр	N/m	Н/м
Динамическая вязкость	$L^{-1}MT^{-1}$	паскаль-секунда	Pa·s	Па·с
Пространственная плотность электрического заряда	$L^{-3}TI$	кулон на кубический метр	C/m^{3}	Кл/м^{3}
Электрическое смещение	$L^{-2}TI$	кулон на квадратный метр	C/m^{2}	Кл/м^{2}
Напряженность электрического поля	$LMT^{-3}I^{-1}$	вольт на метр	V/m	В/м
Диэлектрическая проницаемость	$L^{-1}M^{-1}T^{4}I^{2}$	фарад на метр	F/m	Ф/м
Магнитная проницаемость	$LMT^{-2}I^{-2}$	генри на метр	H/m	Гн/м
Удельная энергия	$L^{2}T^{-2}$	джоуль на килограмм	J/kg	Дж/кг
Теплоемкость системы, энтропия системы	$L^{2}MT^{-2}\Theta^{-1}$	джоуль на кельвин	J/K	Дж/К

Окончание прил. В

Окончание таблицы В.4

1	2	3	4	5
Удельная теплоемкость, удельная энтропия	$L^2T^{-2}\Theta^{-1}$	джоуль на килограмм-кельвин	J/(kg·K)	Дж/(кг·К)
Поверхностная плотность потока энергии	MT^{-3}	ватт на квадратный метр	W/m^2	$Вт/м^2$
Теплопроводность	$LMT^{-3}\Theta^{-1}$	ватт на метр-кельвин	W/(m·K)	Вт/(м·К)
Молярная внутренняя энергия	$L^2MT^{-2}N^{-1}$	джоуль на моль	J/mol	Дж/моль
Молярная энтропия, молярная теплоемкость	$L^2MT^{-2}\Theta^{-1}N^{-1}$	джоуль на моль-кельвин	J/(mol·K)	Дж/(моль·К)
Экспозиционная доза фотонного излучения (экспозиционная доза гамма- и рентгеновского излучений)	$M^{-1}TI$	кулон на килограмм	C/kg	Кл/кг
Мощность поглощенной дозы	L^2T^{-3}	грэй в секунду	Gy/s	Гр/с
Угловая скорость	T^{-1}	радиан в секунду	rad/s	рад/с
Угловое ускорение	T^{-2}	радиан на секунду в квадрате	rad/s^2	$рад/с^2$
Сила излучения	L^2MT^{-3}	ватт на стерадиан	W/sr	Вт/ср
Энергетическая яркость	MT^{-3}	ватт на стерадиан - квадратный метр	$W/(sr \cdot m^2)$	$Вт/(ср \cdot м^2)$

Приложение Г

Таблица Г.1

Соотношения между единицами длины

Единица	м	Å	икс-ед.	дюйм	фут	м. миля
1 м	1	10^{10}	10^{13}	39,4	3,28	$5{,}4\cdot10^{-4}$
1 Å	10^{-10}	1	10^{3}	$3{,}94\cdot10^{-9}$	$3{,}28\cdot10^{-10}$	$5{,}4\cdot10^{-14}$
1 икс-ед.	10^{-13}	10^{-3}	1	$3{,}94\cdot10^{-12}$	$3{,}28\cdot10^{-13}$	$5{,}4\cdot10^{-17}$
1 дюйм	$2{,}54\cdot10^{-2}$	$2{,}54\cdot10^{8}$	$2{,}54\cdot10^{11}$	1	$8{,}33\cdot10^{-2}$	$1{,}37\cdot10^{-5}$
1 фут	0,305	$3{,}05\cdot10^{9}$	$3{,}05\cdot10^{12}$	12	1	$1{,}65\cdot10^{-4}$
1 м. миля	$1{,}85\cdot10^{3}$	$1{,}85\cdot10^{13}$	$1{,}85\cdot10^{16}$	$7{,}29\cdot10^{4}$	$6{,}08\cdot10^{3}$	1

Таблица Г.2

Соотношения между единицами силы

Единица	Н	дин	кгс
1 Н	1	10^{5}	0,10197
1 дин	10^{-5}	1	$0{,}10197\cdot10^{-5}$
1 кгс (килограмм-сила)	9,80665	$9{,}80665\cdot10^{5}$	1

Таблица Г.3

Соотношения между единицами давления

Единица	Па	дин/см^2	бар	атм	мм рт. ст
1 Па	1	10	10^{-5}	$9{,}87\cdot10^{-6}$	$7{,}5\cdot10^{-3}$
1 дин/см^2 (мкбар)	0,1	1	10^{-6}	$9{,}87\cdot10^{-7}$	$7{,}5\cdot10^{-4}$
1 бар	10^{5}	10^{6}	1	0,987	$7{,}5\cdot10^{2}$
1 атм	$1{,}01\cdot10^{5}$	$1{,}01\cdot10^{6}$	1,01	1	$7{,}6\cdot10^{2}$
1 мм рт. ст	$1{,}33\cdot10^{2}$	$1{,}33\cdot10^{3}$	$1{,}33\cdot10^{-2}$	$1{,}32\cdot10^{-3}$	1

Таблица Г.4

Соотношения между единицами работы и энергии

Единица	Дж	эрг	кал	кВт·ч
1 Дж	1	10^7	0,239	$2{,}78 \cdot 10^{-7}$
1 эрг	10^{-7}	1	$2{,}39 \cdot 10^{-8}$	$2{,}78 \cdot 10^{-14}$
1 кал	4,19	$4{,}19 \cdot 10^7$	1	$1{,}16 \cdot 10^{-6}$
1 кВт·ч (киловатт-час)	$3{,}6 \cdot 10^6$	$3{,}6 \cdot 10^{13}$	$8{,}6 \cdot 10^5$	1

Таблица В.5

Соотношения между единицами мощности

Единица	Вт	эрг/с	кал/с	л.с.
1 Вт	1	10^7	0,239	$1{,}36 \cdot 10^{-3}$
1 эрг/с	10^{-7}	1	$2{,}39 \cdot 10^{-8}$	$1{,}36 \cdot 10^{-10}$
1 кал/с	4,19	$4{,}19 \cdot 10^7$	1	$5{,}69 \cdot 10^{-3}$
1 л.с.	$7{,}36 \cdot 10^2$	$7{,}36 \cdot 10^9$	$1{,}75 \cdot 10^2$	1

Приложение Д

Таблица Д.1

Основные реперные (постоянные) точки МТШ-90

Состояние фазового равновесия	Значение температуры	
	К	°С
Тройная точка равновесного водорода	13,8033	–259,3467
Точка кипения равновесного водорода при давлении 33,330 кПа (250 мм рт. ст.)	≈17	≈ –256,15
Точка кипения равновесного водорода	≈20,3	≈ –252,85
Тройная точка неона	24,5561	–248,5939
Тройная точка кислорода	54,3584	–218,7916
Тройная точка аргона	83,8058	–189,3442
Тройная точка ртути	234,3156	–38,8344
Тройная точка воды	273,16	0,01
Точка плавления галлия	302,9146	29,7646
Точка затвердевания индия	429,7485	156,5985
Точка затвердевания олова	505,078	231,928
Точка затвердевания цинка	692,677	419,527
Точка затвердевания алюминия	933,473	660,323
Точка затвердевания серебра	1234,93	961,78
Точка затвердевания золота	1337,33	1064,18
Точка затвердевания меди	1357,77	1084,62

Значения температур в таблице Д.1 даны для состояния равновесия при давлении, равном 101,325 кПа (760 мм рт. ст.), за исключением тройных точек.

Тройная точка – равновесие между твердой, жидкой и парообразной фазами вещества.

Точка кипения – равновесие между жидкой и парообразной фазами вещества.

Точка плавления или затвердевания – равновесие между твердой и жидкой фазами вещества, при котором начинается его плавление или затвердевание.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бронштейн, И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – 13-е изд., исправленное. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 544 с.
2. Дворяшин, Б. В. Метрология и радиоизмерения : учебное пособие для вузов / Б. В. Дворяшин. – М. : Академия, 2005. – 297 с.
3. ГОСТ 8.417–2002. ГСИ. Единицы величин. – Минск, 2002.
4. ГОСТ 8.157–75. ГСИ. Шкалы температурные практические. – М., 1975.
5. ГОСТ 8.009–84. ГСИ. Нормируемые метрологические характеристики средств измерений. – М., 1984.
6. ГОСТ 8.401–80. ГСИ. Классы точности средств измерений. Общие требования. – М., 1980.
7. ГОСТ 8.207–76. ГСИ. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений. Основные положения. – М. : ИПК Издательство стандартов, 1976.
8. ГОСТ 22261–94. Средства измерения электрических и магнитных величин. Общие технические условия. – Минск: МГС по стандартизации, метрологии и сертификации, 1994.
9. Метрология и радиоизмерения : учебник для вузов / под редакцией В. И. Нефедова. – 2-е изд., перераб. – М. : Высш. шк., 2006. – 526 с.
10. Метрология, стандартизация и технические измерения: методические указания / сост. Г. А. Новиков, – Ульяновск : УлГТУ, 2009. – 60 с.
11. МИ 2083–90. ГСИ. Измерения косвенные. Определение результатов измерений и оценивание их погрешностей. – М., 1991.
12. МИ 2365–96. ГСИ. Шкалы измерений. Основные положения. Термины и определения. – М., 1996.
13. МИ 1317–2004. ГСИ. Результаты и характеристики погрешности измерений. Формы представления. Способы использования при испытаниях образцов продукции и контроле их параметров. – М., 2004.

14. Радкевич, Я. М. Метрология, стандартизация и сертификация : учебник для вузов / Я. М. Радкевич, А. Г. Схиртладзе, Б. И. Лактионов. – М. : Высш. шк., 2004. – 767 с.
15. РМГ 29–99. Государственная система обеспечения единства измерений. Метрология. Основные термины и определения. – Минск: МГС по стандартизации, метрологии и сертификации, 2000.
16. Сена, Л. А. Единицы физических величин и их размерности: учебно-справочное руководство / Л. А. Сена. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 432 с.
17. Сергеев, А. Г. Метрология. Стандартизация. Сертификация : учебное пособие для вузов / А. Г. Сергеев, М. В. Латышев, В. В. Терегеря. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Логос, 2005. – 559 с.

Учебное издание

НОВИКОВ Глеб Анатольевич

ОСНОВЫ МЕТРОЛОГИИ

Учебное пособие

Подписано в печать 09.08.2010. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 10,70. Тираж 75 экз.
Ульяновский государственный технический университет
432027, г. Ульяновск, ул. Сев. Венец, 32
Типография УлГТУ, 432027, г. Ульяновск, ул. Сев. Венец, 32