Лекція №15

Розділ 4. Чисельні методи

Розділ математики, де розроблені способи наближеного розв'язання різних завдань (рішення рівнянь, інтегрування, диференціювання, знаходження екстремумів функцій тощо) не алгебраїчним шляхом і не методами математичного аналізу, а шляхом багаторазових арифметичних дій над числами, називається "Чисельні методи" або "Обчислювальна математика". Історія розвитку чисельних методів вирішення завдань починається ще за часів Ньютона. Однак лише з появою обчислювальної техніки ці методи знайшли широке застосування. У цьому розділі наведені найпростіші методи, неефективні щодо швидкості обчислень і дають порівняно грубі результати, але мають перевагу, що максимально спрощені і доступні розуміння.

Вирішення систем лінійних рівнянь

Багато завдань математичного моделювання зводяться до системи n лінійних рівнянь алгебри:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{4.1}$$

Систему рівнянь (4.1) можна записати у матричній формі наступним чином

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{Bmatrix} \tag{4.2}$$

або

$$\mathbf{[A]\,\{X\} = \{B\}} \tag{4.3}$$

При дослідженні багатьох моделей, пов'язаних з розв'язанням задач в об'ємній постановці або в галузі економіки, доводиться вирішувати системи з декількох тисяч або десятків тисяч рівнянь. У цьому випадку особливу увагу доводиться приділяти питанням підвищення ефективності та точності методів рішення, що застосовуються.

Усі методи розв'язання систем лінійних рівнянь ділять на прямі та ітераційні.

*Прямі методи*дозволяють за кінцеве число дій отримати точне рішення системи рівнянь (4.1), якщо вхідна інформація (права частина рівнянь {B} та елементи aij матриці [A] задані точно і обчислення ведуться без округлення. Звичайно, прямі методи також дають рішення з певною точністю, яка залежить від помилок округлення, тобто від точності уявлень даних в ЕОМ, від характеру розв'язуваних задач і від самого методу вирішення системи рівнянь До найбільш відомих представників прямих методів можна віднести метод Гауса і метод квадратного кореня.

*Ітераційний метод*дозволяє знайти наближене рішення системи шляхом побудови послідовності наближень (ітерацій), починаючи з деякого початкового наближення. До цього класу методів відносять метод ітерацій та метод Зейделя. При виборі того чи іншого методу виходять із потужності наявної обчислювальної техніки та необхідної точності одержуваного рішення. Для великих систем (понад 10 тис. рівнянь) зазвичай використовують ітераційні методи.

Як приклад розглянемо алгоритм найчастіше застосовуваного методу - методу Гаусса. Як зазначалося, даний метод відноситься до прямих методів і дозволяє отримати рішення за кінцеве число кроків. Алгоритм методу і двох етапів чи ходів: прямого і зворотного. При прямому ході система рівнянь наводиться трикутному виду.

Нехай потрібно вирішити таку систему рівнянь:

$$2x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 4, \tag{4.4a}$$

$$4x_1 + x_2 - 2x_3 = -2, \tag{4.4b}$$

$$8x_1 + 12x_2 + 8x_3 = 12. \tag{4.4c}$$

<u>Прямий хід</u>. Перший крок методу Гауса полягає у виключенні зі всіх рівнянь, крім першого, невідомого x1. Розділимо перше рівняння (4.4a) на $a_{11} = 2$:

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2. \tag{4.5}$$

Для виключення x_1 із рівняння (4.4b), помножимо (4.5) на -4 і складемо з (4.4b). Аналогічно, помножуючи (4.5) на -8 і складаючи (4.4c), виключимо з нього x_1:

$$-15x_2 - 10x3 = -10, \tag{4.6a}$$

$$-20x_2 - 8x_3 = -4. \tag{4.6b}$$

Здобули систему двох рівнянь.

Другий крок. Виключимо x_2 зі всіх рівнянь, крім першого та другого. Для цього розділимо (4.6a) на -15:

$$x_2 + 0,67\,x_3 = 0,67 \tag{4.7}$$

Помножимо (4.7) на 20 і складемо з (7.7b):

$$5,33\,x_3 = 9,33 \tag{4.8}$$

Третій крок. Ділимо (4.8) на 5,33: $x_3 = 1,75$.

В результаті отримали систему

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 2, \\ x_2 + 0,67\,x_3 &= 0,67, \\ x_3 &= 1,75. \end{aligned} \tag{4.9}$$

з верхньою трикутною матрицею

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0,67 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

<u>**Зворотній хід**</u>. З системи (4.9) послідовно знаходимо:

3-е рівняння: $x_3 = 1,75$;

2-е рівняння: $x_2 = 0,67 - 0,67\,x_3 = -0,5$;

1-е рівняння $x_1 = 2 - 4x_2 - 2x_3 = 0,5$..

Отже, розв'язання системи рівнянь (4.4) знайдено: $x_1 = 0,5$; $x_2 = -0,5$; $x_3 = 1,75$.

Нижче наведено запис алгоритму методу Гауса на псевдокод для системи з n рівнянь з n невідомими.

<u>Алгоритм Метод Гауса</u>

```
procedure Метод Гаусса для системы уравнений [A]{X}={B}
Данные:     n - число неизвестных;
            A[1..n, 1..n] – квадратная матрица коэффициентов;
            B[1..n] – правая часть системы уравнений.
Результат:      B[1..n] – решение системы.
start
  for k:=1 to n-1                                <= прямой ход
     if | Akk | < 10^-20 then
          Error(Элемент главной диагонали равен 0)
          Exit
     end if
     Bk := Bk / Akk        обработка к-ой строки
     for i := k+1 to n
        Aki := Aki / Akk
     next i
     for j := k+1 to n     обработка всех нижележащих строк
          if | Ajk | > 10^-20 then
               Bj := Bj - Bk * Ajk
               for i := k+1 to n
                    Aji := Aji - Ajk * Aki
               next i
               Ajk := 0
          end if
     next j
  next k
  Bn := Bn / Ann
  for j := n-1 to 1 step -1                      <= обратный ход
     for i := n to j+1 step -1
          Bj := Bj - Aji * Bi
     next i
  next j
return
```

Вирішення звичайних диференціальних рівнянь

Математична постановка багатьох завдань математичного моделювання зводяться до системи звичайних диференціальних рівнянь (ОДП). Найпростішим ОДУ є рівняння першого порядку

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{4.10}$$

Завданням рішення ОДУ є знаходження таких функцій y(x), які, будучи підставленими в ОДУ, перетворюють його на тотожність. Наприклад, рівняння

$$\frac{dy}{dx} = ax + b$$

має рішення:

$$y = \frac{ax^2}{2} + bx + c .$$

Якщо дано початкову умову, наприклад

$$y_{|x=0} = y_0 ,$$

то можна знайти значення константи *c*:

$$c = y0.$$

Як правило, тільки у відносно простих випадках рішення ОДУ можна знайти аналітично, тобто у вигляді формул. Численні методи рішення ОДУ дозволяють знайти рішення будь-якого ОДУ. Проте відповідь виходить над вигляді аналітичної залежності, а вигляді таблиці:

X	X1	X2	X3
Y	Y1	Y2	Y3

При цьому завдання початкових умов є обов'язковим. Одним із найпростіших методів чисельного інтегрування ОДУ є метод Ейлера.

<u>Метод Ейлера</u>.

Нехай диференційне рівняння наведено до виду (4.10), а вид функції f(x, y) відомий. Замінимо приблизно диференціали прирощеннями. Тоді

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x, y) \quad \text{або} \quad \Delta y = f(x, y)\Delta x . \tag{4.11}$$

Задамо початкові умови

$$y_{|x_0} = y_0$$

і виберемо крок Δx збільшення аргументу. Тоді, використовуючи (4.11), можна послідовно обчислити значення x і y:

x_0	$x_1=x_0+\Delta x$	$x_2=x_1+\Delta x$	$x_3=x_2+\Delta x$
y_0	$y_1=y_0+f(x_0,y_0)\,\Delta x$	$y_2=y_1+f(x_1,y_1)\,\Delta x$	$y_3=y_2+f(x_2,y_2)\,\Delta x$

або

$$x_{k+1}=x_k+\Delta x;$$
$$y_{k+1}=y_k+f(x_k,y_k)\,\Delta x. \tag{4.12}$$

При застосуванні аналітичного методу отримуємо рішення у вигляді гладкої інтегральної кривої рівняння (4.10) (див. рис.4.1). Використання методу Ейлера дозволяє отримати послідовність точок, з'єднавши які можна побудувати ламану Ейлера. З зменшенням кроку інтегрування x крива Ейлера наближається до інтегральної кривої. Для методу Ейлера характерна мала точність обчислень та систематичне накопичення помилок. Приклад алгоритму, що використовує метод Ейлера системи рівнянь першого порядку наведено в розділі 2.

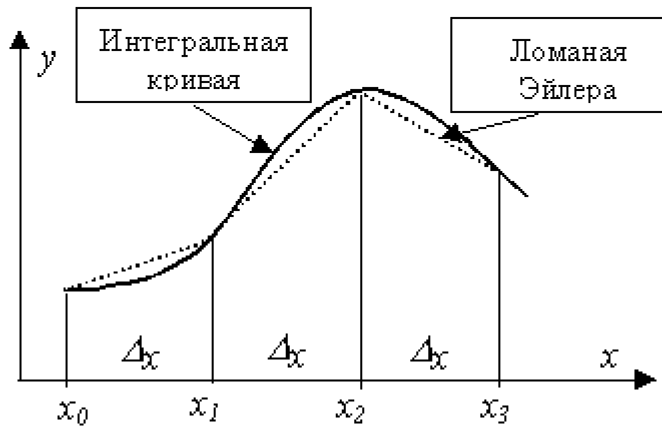

Рис. 4.1

Завдання динаміки точки, як правило, призводять до системи двох ОДУ першого порядку за кожною координатою. На кожному кроці часу при обчисленні нових швидкостей точки значення діючих сил беруться на момент початку кроку і не враховується їх зміна за крок. Таким чином, приймається, що на кроці часу точка рухається під дією постійних сил і з постійним прискоренням. Цю обставину можна врахувати під час обчислення нової координати точки. Якщо рівняння для координат вирішувати після рівняння для швидкостей, то цьому випадку можна скористатися значеннями швидкостей точки на початок і на кінець кроку за часом. При рівноприскореному русі пройдений шлях дорівнює добутку величини інтервалу часу на середню швидкість точки на даному інтервалі. З урахуванням даної обставини співвідношення для швидкості та координати точки можуть бути переписані таким чином

$$V_{k+1}=V_k+\Delta t\, F(t, x_k, V_k);$$

$$x_{k+1}=x_k+\Delta t\, (V_{k+1}+V_k)/2.$$

Наведена схема обчисленні відповідає модифікованому методу Ейлера та дає більш точні результати інтегрування.

Метод Рунге-Кутта.

Нехай диференційне рівняння наведено до виду (4.10), а вид функції $f(x,y)$ відомий. Виберемо крок інтегрування Δx і для стислості введемо позначення $x_k=x_0+k\Delta x$ и $y_k=y(x_k)$, (k=0,1,2,3,...).

Розглянемо числа:

$$
\begin{aligned}
p_1^{(k)} &= f(x_k, y_k)\,\Delta x,\\
p_2^{(k)} &= f(x_k+\Delta x/2,\ y_k+p_1^{(k)}/2)\,\Delta x,\\
p_3^{(k)} &= f(x_k+\Delta x/2,\ y_k+p_2^{(k)}/2)\,\Delta x,\\
p_4^{(k)} &= f(x_k+\Delta x,\ y_k+p_3^{(k)})\,\Delta x.
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

Згідно з звичайним методом Рунге-Кутта послідовність значень yk шуканої функції y(x) визначаються за формулою

$$y_{k+1}=y_k+\Delta y_k,$$

де

$$\Delta y_k=(p_1^{(k)}+2p_2^{(k)}+2p_3^{(k)}+p_4^{(k)})/6,\ (k=0,1,2,3,...). \tag{4.14}$$

Метод Рунге-Кутта має значну точність і, незважаючи на свою трудомісткість, широко використовується при чисельному рішенні ОДУ.

Основною складністю під час використання чисельних методів інтегрування ОДУ є вибір величини кроку інтегрування Δx. Насправді величину кроку Δx вибирають подвійним перерахунком: спочатку визначають y_k з кроком Δx, та був із кроком Δx /2. Якщо розбіжність результатів перевищила деяку малу задану величину ε, то крок зменшують ще удвічі й повторюють обчислення. Зменшення виконують до тих пір, поки не буде досягнуто заданої точності обчислень.