Лекція №10

Розділ 2. Етапи побудови математичної моделі.

Вибір та обґрунтування вибору методу розв'язання задачі

При використанні розроблених математичних моделей зазвичай потрібно знайти залежність деяких невідомих заздалегідь параметрів об'єкта моделювання (наприклад, координати і швидкість центру мас тіла, точність кидка), що задовольняють певній системі рівнянь. Таким чином, пошук розв'язання задачі зводиться до пошуку деяких залежностей шуканих величин від вихідних параметрів моделі. Як було зазначено у розділі 1, всі методи вирішення відповідних завдань, що становлять "ядро" математичних моделей, можна поділити на аналітичні та алгоритмічні. Слід зазначити, що з використанні аналітичних рішень щоб одержати результатів " у числах " також часто потрібно розробка відповідних алгоритмів, реалізованих на ЕОМ. Однак вихідне рішення при цьому є аналітичним виразом (або їх сукупністю). Рішення ж, засновані на алгоритмічних методах, принципово не зводяться до точних аналітичних рішень відповідного завдання.

Вибір того чи іншого методу дослідження значною мірою залежить від кваліфікації та досвіду членів робочої групи. Як було зазначено, аналітичні методи зручніші для подальшого аналізу результатів, але застосовні лише щодо простих моделей. У разі, якщо відповідне математичне завдання (хоча б і в спрощеній постановці) допускає аналітичне рішення, останнє, без сумніву, краще чисельного, про що вже йшлося в 1-му розльоті. Як справедливо говорить з цього приводу академік А.Б.Мігдал "...раніше, ніж користуватися рахунковими машинами, завдання необхідно всебічно дослідити аналітичними методами. Аналітичні методи - "стара, але грізна зброя" - не втрачають свого значення".

Алгоритмічні методи зводяться до деякого алгоритму, що реалізує обчислювальний експеримент із використанням ЕОМ. Точність моделювання у подібному експерименті істотно залежить від використаного методу та його параметрів (наприклад, кроку інтегрування). Алгоритмічні методи, як правило, більш трудомісткі у реалізації, вимагають гарного знання від членів робочої групи методів обчислювальної математики, великої бібліотеки спеціального програмного забезпечення та потужної обчислювальної техніки. Сучасні моделі на основі алгоритмічних методів розробляються в дослідницьких організаціях, які зарекомендували себе як авторитетні наукові школи у відповідній галузі знання.

Як зазначалося у розділі 1 наближені та чисельні методи дослідження поставлених математичних завдань належать до широкого поділу сучасної математики – обчислювальної математики. Чисельні методи можна застосовувати лише для коректних математичних завдань, що є суттєвим обмеженням на застосування даних методів у математичному моделюванні.

Спільним всім чисельних методів є зведення математичної завдання до кінцевомірної. Це найчастіше досягається дискретизацією вихідної задачі, тобто переходом від безперервного функції аргументу до функцій дискретного аргументу. Наприклад, траєкторія центру ваги баскетбольного м'яча шукається не як безперервна функція часу, бо як таблична (дискретна) функція координат від часу, тобто визначальна значення координат лише кінцевого числа моментів часу. Отримане рішення дискретної задачі приймається за наближене розв'язання математичної задачі.

Виділяють три основні складові похибки, що виникає при чисельному вирішенні вихідного завдання:

- *непереборна похибка*, пов'язана з неточним завданням вихідних даних завдання (початкові та граничні умови, коефіцієнти та праві частини рівнянь);
- *похибка методу*, пов'язана з переходом до дискретного аналогу вихідного завдання (наприклад, замінюючи похідну $y/(x)$ різницевим аналогом $(y(x+\Delta x)-y(x))/\Delta x$, отримуємо похибку дискретизації, що має при $\Delta x \to 0$ порядок Δx);
- *помилка округлення*, пов'язана з кінцевою розрядністю чисел, що подаються в ЕОМ

Природною вимогою для конкретного обчислювального алгоритму є узгодженість у порядках перерахованих трьох видів похибок.

Чисельний чи наближений метод реалізується у вигляді обчислювального алгоритму. Тому всі вимоги, що пред'являються алгоритму, застосовні і обчислювального алгоритму. Насамперед алгоритм має бути реалізований, тобто давати розв'язання задачі за допустимий машинний час. Важливою характеристикою алгоритму є його точність, тобто можливість отримання рішення вихідного завдання із заданою точністю $\varepsilon>0$ за кінцеве число $Q(\varepsilon)$ дій. Очевидно, що менше ε, то більше втрачений машинний час. Для дуже малих ε час обчислень може бути неприпустимо великим. Тому на практиці домагаються деякого компромісу між точністю і машинним часом, що витрачається. Очевидно, що для кожного завдання, алгоритму і типу ЕОМ є своє характерне значення точності, що досягається.

Час роботи алгоритму залежить від кількості дій $Q(\varepsilon)$ задля досягнення заданої точності. Для будь-якої математичної задачі, як правило, можна запропонувати кілька алгоритмів, що дозволяють отримати рішення із заданою точністю, але за різне число дій $Q(\varepsilon)$. Алгоритми, що витрачають меншу кількість дій для досягнення однакової точності, називатимемо більш економічними або ефективнішими.

У процесі роботи обчислювального алгоритму кожному акті обчислень виникає деяка похибка. При цьому величина похибки може від дії до дії наростати або не зростати (а в деяких випадках навіть зменшуватися). Якщо похибка в процесі обчислень необмежено наростає, такий алгоритм називається нестійким або розбіжним. В іншому випадку алгоритм називається стійким або схожим.

Як було зазначено вище, обчислювальна математика поєднує величезний пласт різноманітних швидко розвиваються чисельних і наближених методів. Тому практично неможливо навести закінчену класифікацію даних методів. Прагнення отримання більш точних, ефективних і стійких обчислювальних алгоритмів призводить до появи численних модифікацій, що враховують специфічні особливості конкретної математичної задачі або навіть особливості об'єктів, що моделюються.

Можна виділити такі групи чисельних методів за об'єктами, до яких застосовуються:

- інтерполяція та чисельне диференціювання;
- чисельне інтегрування;
- визначення коренів лінійних та нелінійних рівнянь;
- вирішення систем лінійних рівнянь (поділяють на прямі та ітераційні методи);
- розв'язання систем нелінійних рівнянь;
- розв'язання задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь;
- вирішення крайових завдань для звичайних диференціальних рівнянь;
- розв'язання рівнянь у приватних похідних;
- розв'язання інтегральних рівнянь.

Величезна різноманітність чисельних методів значною мірою ускладнює вибір того чи іншого методу у кожному конкретному випадку. Враховуючи, що для реалізації однієї і тієї ж моделі можна використовувати кілька альтернативних алгоритмічних методів, вибір конкретного методу обумовлений тим, який з них підходить для даної моделі з точки зору забезпечення ефективності, стійкості та точності результатів, а також більш освоєний та знайомий членам робочої групи. . Освоєння нового методу, як правило, дуже трудомістке і пов'язане з великими тимчасовими та фінансовими витратами. Основні витрати при цьому пов'язані з розробкою та налагодженням необхідного програмного забезпечення для відповідного класу ЕОМ, що забезпечує підтримку цього методу. Слід зазначити, що обчислювальна математика у певному сенсі більше являє собою мистецтво, ніж "науку" (в розумінні останньої як галузі культури, що базується на формальній логіці). Дуже часто ефективність застосовуваних методів, розроблених програм визначається напрацьованими роками та десятками років інтуїтивними прийомами, не обґрунтованими з математичних позицій. У зв'язку з цим ефективність одного й того методу може дуже істотно відрізнятися при його застосуванні різними дослідниками.

Приклад

Аналітичне рішення задачі про баскетболіста

Для отримання рішення розглянутої вище задачі про баскетболіст у постановці (2.5)-(2.8) можна використовувати як аналітичні, так і чисельні методи. Проінтегрувавши співвідношення (2.5) за часом, отримаємо

$$x(t) = C_2 + C_1 t, \qquad y(t) = C_4 + C_3 t - \frac{gt^2}{2},$$
$$v_x(t) = C_1, \qquad v_y(t) = C_3 - gt. \tag{2.9}$$

Константи інтегрування знайдемо із початкових умов (2.6). Тоді вирішення завдання можна записати так

$$x(t) = x_o + v_o t\cos\alpha_o, \qquad y(t) = y_o + v_o t\sin\alpha_o - \frac{gt^2}{2},$$
$$v_x(t) = v_o\cos\alpha_o, \qquad v_y(t) = v_o\sin\alpha_o - gt. \tag{2.10}$$

Приймемо для простоти, що у момент кидка м'яч перебуває на початку координат і одному рівні з кошиком (тобто. $x_0 = y_0 = y_k = 0$). Під дальністю L кидка розумітимемо відстань, яка пролетить м'яч від точки кидка до перетину з горизонтальною площиною, що проходить через кільце кошика. Зі співвідношень (2.10) для координат дальність кидка виразиться так

$$L = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha_o. \tag{2.11}$$

Тоді точність кидка з урахуванням (2.7) дорівнюватиме

$$\Delta = L - x_k. \tag{2.12}$$

Наприклад, при кидку м'яча зі штрафної лінії можна прийняти такі вихідні дані:

$x_0 = y_0 = y_k = 0$; $x_k = 4{,}225$ м; $v_o = 6{,}44$ м/с; $\alpha = 45^0$.

Тоді з (2.11) та (2.12) маємо L = 4,225м; Δ = 0м.

<u>Приклад</u>

Алгоритмічне вирішення задачі про баскетболіста

У найпростішому випадку можна використати метод Ейлера. Алгоритм розв'язання цієї задачі на псевдокоді наведено нижче.

Алгоритм 2.1.

```
program Задача о баскетболисте.
Данные:     m, R - масса и радиус мяча;
            xo, yo - начальные координаты мяча;
            vo, α - начальная скорость и угол броска мяча;
            xk, yk - координаты центра корзины;
            t - текущее время;
            dt - шаг по времени;
            fx, fy - силы, действующие на мяч;
            x, y, vx, vy - текущие координаты и проекции скорости мяча.
Результаты: L и Δ - дальность и точность броска.
start
        g := 9.81
        m := 0.6;               R := 0.12
        vo := 6.44;             α := 45
        xo := 0;                yo := 0
        xk := 4.225;            yk := 0
        vx := vo cos α
        vy := vo sin α
        dt := 0.1
        t := 0;
        x := xo;        y := yo
        while ((vy≥0) or ((vy<0) and (y ≥ yk )))
            t := t+dt
            fx := 0                         силы, действующие на мяч
            fy := - mg
            vx := vx+fx dt/m                компоненты скорости
            vy := vy+fy dt/m
            x := x + dt vx                  координаты мяча
            y := y + dt vy
        end while
        L := x - xo
        Δ := x - xk
stop
```