

## Лекція №6

### Розділ 1. Основні поняття. Технології побудови моделей.

## КЛАСИФІКАЦІЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

### Класифікація в залежності від цілей моделювання

Метою дескриптивних моделей (від латів. *descriptio* – опис) є побудова законів зміни параметрів моделі. Як приклад такої моделі можна навести модель руху матеріальної точки під дією прикладених сил, що використовує другий закон Ньютона. Задаючи положення та швидкість точки в початковий момент часу (вхідні параметри), масу (власний параметр) і закон зміни сил, що прикладаються (зовнішні впливи), можна визначити швидкість і координати матеріальної точки в будь-який момент часу (вихідні параметри). Отримана модель визначає залежність вихідних величин від значень вхідних параметрів. Тому дескриптивні моделі є реалізацією описових та пояснювальних змістовних моделей на формальному рівні моделювання.



Рис. 6. Цілі моделювання

Як інший приклад дескриптивної моделі можна навести модель руху ракети після старту з поверхні землі. Як параметри моделі в даному випадку можуть виступати початкове положення та початкова швидкість ракети (вхідні), її початкова маса, імпульс двигуна, режим його роботи (власні параметри), закон зміни сил тяжіння та сил опору атмосфери (зовнішні дії). Як вихідні величини маємо положення та швидкість центру мас ракети та її орієнтацію у просторі у довільний момент часу.

*Оптимізаційні моделі* призначені для визначення оптимальних (найкращих) з точки зору деякого критерію параметрів об'єкта, що моделюється, або ж для пошуку оптимального (найкращого) режиму управління деяким процесом. Частина параметрів моделі відносять до параметрів управління, змінюючи які можна отримувати різні варіанти наборів значень вихідних величин. Як правило, дані моделі будуються з використанням однієї або декількох дескриптивних моделей і включають певний критерій, що забезпечує порівняння різних

варіантів наборів значень вихідних величин між собою для вибору найкращого. На область значень вхідних параметрів можуть бути накладені обмеження у вигляді рівностей і нерівностей, пов'язані з особливостями об'єкта або процесу, що розглядається. Метою оптимізаційних моделей є пошук таких допустимих параметрів управління, за яких критерій вибору досягає свого "найкращого значення".

Прикладом оптимізаційної моделі може служити моделювання процесу запуску ракети з землі з метою підйому її на задану висоту за мінімальний час при обмеженнях на величину імпульсу двигуна, час його роботи, початкову і кінцеву масу ракети. Математичні співвідношення дескриптивної моделі руху ракети виступають у разі як обмежень типу рівностей.

*Управлінські моделі* застосовуються до прийняття ефективних управлінських рішень у різних галузях цілеспрямованої діяльності. Слід зазначити, що прийняття рішень у випадку є процесом, за своєю складністю порівняним із процесом мислення загалом. Однак на практиці під "прийняттям рішень" зазвичай розуміється вибір деяких альтернатив із заданої їхньої множини, а загальний процес прийняття рішень представляється як послідовність таких виборів альтернатив. Наприклад, на підприємстві звільнилася посада головного інженера, і завдання директора полягає у виборі з наявної множини кандидатів на цю посаду одного, який відповідає заданим вимогам. Складність даної задачі полягає в наявності невизначеності як за вихідною інформацією (неповні дані про кандидатів) і характером впливу зовнішніх умов (випадкове: обраний кандидат захворів або відмовився; бути хорошим спеціалістом та адміністратором, досвідчений, енергійний, молодий та інше). Тому на відміну від оптимізаційних моделей, де критерій вибору вважається певним і шукане рішення встановлюється з умов його екстремальності, в управлінських моделях необхідне запровадження специфічних критеріїв оптимальності, які дозволяють порівняти альтернативи при різних невизначеності завдання. Оскільки оптимальність прийнятого рішення навіть у одній і тій же ситуації може розумітися по-різному, вид критерію оптимальності в управлінських моделях заздалегідь не фіксується. Саме в цьому полягає основна особливість даних моделей. Методи формування критеріїв оптимальності залежно від виду невизначеності розглядаються в теорії вибору та прийняття рішень, що базується на теорії ігор та дослідженні операцій.

### Класифікація залежно від методів дослідження

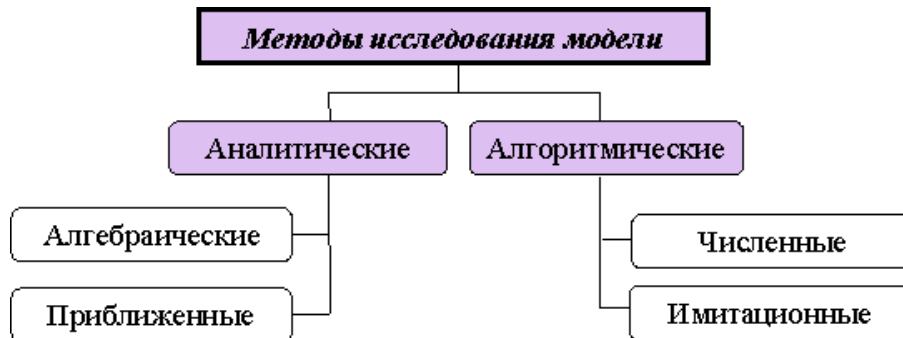


Рис. 7 Методи дослідження

Метод дослідження моделі відносять до аналітичних, якщо він дозволяє отримати вихідні величини як аналітичних виразів, тобто. виразів, у яких використовується лише лічильна сукупність арифметичних операцій та переходів до межі за натуральними числами. Приклади аналітичних виразів:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k x^k}{x^k + 1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Приватним випадком аналітичних виразів є вирази алгебри, в яких використовується кінцеве або лічильне число арифметичних операцій, операцій зведення в цілочисельний ступінь і вилучення кореня. Приклади виразів алгебри:

$$a x^2 + b x + c, \quad a + b \sqrt{x^3 + 4ac}.$$

Насправді з метою оцінки величини параметра моделювання доводиться обмежувати кількість членів сукупності арифметичних операцій на аналітичних виразах деяким кінцевим числом. Тому величина оцінки параметра у разі виходить наближеною, а моделі, використовують такий прийом, називаються наближеними.

Аналітичні методи дослідження моделі є більш цінними в тому плані, що дозволяє з меншими обчислювальними витратами вивчити властивості об'єкта моделювання, застосовуючи традиційно добре розвинені математичні методи аналізу аналітичних функцій. Істотно, що застосування аналітичних методів можливе без використання ЕОМ. Крім того, знання аналітичного вираження для шуканих параметрів дозволяє досліджувати фундаментальні властивості об'єкта, його якісну поведінку, будувати нові гіпотези про його

внутрішню структуру. Слід зазначити, що можливості аналітичних методів суттєво залежать від розвитку відповідних розділів математики.

На жаль, існуючі в даний час математичні методи дозволяють отримати аналітичні рішення лише відносно нескладних математичних моделей у вузькому діапазоні значень параметрів. Найчастіше щодо моделей доводиться використовувати алгоритмічні підходи, дозволяють отримати лише наближені значення шуканих параметрів.

При чисельному підході сукупність математичних співвідношень моделі замінюється кінцевим аналогом. Це найчастіше досягається дискретизацією вихідних співвідношень, тобто переходом від безперервного функцій аргументу до функцій дискретного аргументу. Після дискретизації вихідної задачі виконується побудова обчислювального алгоритму, тобто послідовності арифметичних та логічних дій, що виконуються на ЕОМ і дозволяють за кінцеве число кроків отримати розв'язання дискретної задачі. Отримане рішення дискретної задачі приймається за наближене розв'язання математичної задачі.

Ступінь наближення одержуваних за допомогою чисельного методу шуканих параметрів моделі залежить як від похибок самого методу, пов'язаних із заміною вихідної моделі її дискретним аналогом, так і від помилок округлення, що виникають при виконанні будь-яких розрахунків на ЕОМ у зв'язку з кінцевою точністю подання чисел її пам'яті. Основною вимогою до обчислювального алгоритму є необхідність одержання вирішення вихідного завдання із заданою точністю за кінцеве число кроків.

До теперішнього часу коло питань, пов'язаних з розробкою та використанням чисельних методів, а також з побудовою на їх основі обчислювальних алгоритмів, виділилося в самостійний швидко розвивається і обширний розділ математики - обчислювальну математику.

Якщо за чисельному підході дискретизації піддавалася отримана система математичних співвідношень, то за імітаційному підході деякі елементи розбивається сам об'єкт дослідження. У цьому випадку система математичних співвідношень для об'єкта-системи в цілому не записується, а замінюється деяким алгоритмом, що моделює її поведінку та враховує взаємодію один з одним моделей окремих елементів системи. Як моделі окремих елементів можуть бути використані як аналітичні, так і моделі алгебри.

Алгоритмічні моделі, що використовують як чисельний, так і імітаційний підхід, не дозволяють отримати розв'язання задач в аналітичній формі, що ускладнює та ускладнює процес аналізу результатів моделювання. Оскільки застосування моделей даного типу можливе лише за наявності обчислювальної техніки, їх ефективність залежить від потужності і швидкодії ЕОМ. Безперечною перевагою алгоритмічних моделей є принципових обмежень на складність моделі, що дозволяє застосовувати їх для дослідження систем довільної складності.

Використання математичної моделі, побудованої із застосуванням алгоритмічних методів, аналогічно проведенню експериментів із реальним об'єктом, лише замість реального експерименту з об'єктом проводиться обчислювальний експеримент із його моделлю. Задаючись конкретним набором значень вихідних параметрів моделі, обчислювального експерименту отримують конкретний набір наближених значень шуканих параметрів. Для дослідження поведінки об'єкта за нового набору вихідних даних необхідно проведення нового обчислювального експерименту.