

## Лекція №5

### Розділ 1. Основні поняття. Технології побудови моделей.

## КЛАСИФІКАЦІЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

### Класифікація в залежності від параметрів моделі

У загальному випадку параметри, що описують стан і поведінку об'єкта моделювання, розбиваються на ряд підмножин, що не перетинаються:

- сукупність вхідних (керованих) впливів на об'єкт ( $\Omega_x$ );
  - сукупність впливів довкілля (некерованих) ( $\Omega_E$ );
  - сукупність внутрішніх (власних) параметрів об'єкта ( $\Omega_I$ );
- сукупність вихідних характеристик ( $\Omega_y$ ).



Рис. 5 Параметри моделі

Наприклад, при моделюванні руху твердого тіла в атмосфері в полі сил тяжіння як вхідні параметри можуть виступати початкове положення і початкова швидкість точки, прийнятої за полюс, і кутова швидкість в момент часу  $t=0$ . Сила опору та сила тяжіння характеризують вплив довкілля. Маса тіла та її форма є власними параметрами тіла. Координати та швидкості точок тіла (при  $t>0$ ) відносяться до вихідних величин. У той самий час віднесення параметрів тому чи

іншого типу залежить від постановки конкретної завдання. Наприклад, у наведеному прикладі можна переформулювати задачу, зробивши її зворотною до вихідної: визначити початкове положення та швидкості (лінійну швидкість полюса та кутову швидкість тіла) за заданим положенням та швидкостями в момент часу  $t_1 > 0$ . Зрозуміло, що при цьому вхідні та вихідні параметри змінюються місцями.

Слід зазначити, що кількість параметрів всіх типів у математичних моделях зазвичай звичайно. При цьому кожен з параметрів може мати різну "математичну природу": бути постійною величиною або функцією, скаляром або вектором (або тензором другого, третього та вище рангів), чітким чи нечітким безліччю і т.д. У математичних моделях, що розглядаються в природничих науках, найпоширенішими є параметри, що є скалярно-або тензором – значними функціями. Як незалежні змінні (аргументи) при цьому зазвичай виступають координати точок тривимірного простору та/або час (або деякий незменшений параметр – аналог часу).

Вхідні параметри **X**, параметри, що описують вплив зовнішнього середовища **E**, і внутрішні (власні) характеристики об'єкта **I** відносяться до незалежних (екзогенних) величин. Вихідні параметри є залежними (ендогенними) величинами.

У випадку оператор моделі **A** перетворює екзогенні параметри в ендогенні

$$A: \{X, E, I\} \rightarrow Y.$$

Введення тих чи інших кількісних характеристик об'єкта моделювання можливе за наявності певного зразка порівняння. Наприклад, для характеристики розмірів тіла використовується еталонний зразок – метр. За своєю природою характеристики об'єкта може бути як якісними, і кількісними. Для кількісної характеристики вводяться числа, що виражають відносини між цим параметром та зразком. Крім того, кількісні значення параметра можуть бути дискретними або безперервними величинами. Якісні характеристики перебувають, наприклад, за допомогою методу експертних оцінок. Залежно від виду використовуваних безлічі параметрів моделі можуть відрізнятися на якісні та кількісні, дискретні та безперервні, а також змішані.

При побудові моделей реальних об'єктів і явищ часто доводиться зіштовхуватися з нестачею інформації. Як правило, для будь-якого досліджуваного об'єкта розподіл властивостей, впливу та початковий стан відомі з тим чи іншим ступенем невизначеності. Це пов'язано з безліччю факторів, що важко враховуються, з обмеженістю числа використовуваних параметрів моделі, з кінцевою точністю експериментальних вимірювань. При побудові моделі опис невизначеності параметрів може бути здійснено такими способами:

1. детерміноване – значення всіх параметрів моделі визначаються детермінованими величинами (тобто кожному параметру відповідає конкретне ціле, речове чи комплексне число або відповідна функція). Цей спосіб відповідає повній визначеності параметрів;

2. стохастичне – значення всіх чи окремих параметрів моделі визначаються випадковими величинами, заданими густиною ймовірності. У літературі найбільш повно досліджено випадки нормального (гаусового) та показового розподілу випадкових величин;
3. випадкове – значення всіх або окремих параметрів моделі встановлюються випадковими величинами, заданими оцінками щільності ймовірності, отриманими в результаті обробки обмеженої експериментальної вибірки даних параметрів. Ця форма опису тісно пов'язана з попередньою. Однак у даному випадку одержувані результати моделювання істотно залежатимуть від точності оцінок моментів і щільностей ймовірності випадкових параметрів, від законів розподілу, що постулюються, обсягу вибірок;
4. інтервальне – значення всіх або окремих параметрів моделі описуються інтервальними величинами, заданими інтервалом, утвореним мінімальним та максимально можливими значеннями параметра;
5. нечітке – значення всіх або окремих параметрів моделі описуються функціями приналежності відповідної нечіткої множини. Така форма використовується, коли інформація про параметри моделі задається експертом природною мовою, а отже, у "нечітких" (з позиції математики) термінах типу "багато більше п'яти", "близько нуля".

Сукупність значень параметрів моделі у певний час або на цій стадії називається станом об'єкта.

Розподіл параметрів на стаціонарні та нестаціонарні використовується для моделей, де одним із незалежних аргументів може бути час або незменшуваний параметр, що характеризує "напрямок" процесу або послідовність його стадій.

Розглянемо перебіг рідини у довгій трубі постійного перерізу. Експерименти показують, що на досить великій відстані від входу в трубу частинки рідини рухаються паралельно осі труби.

При цьому якщо умови на вході не змінюються і швидкість течії невелика, профіль швидкостей частинок в даному перерізі труби з часом залишається незмінним. У цьому випадку можна говорити про стаціонарний рух рідини у трубі, характеристики руху якої в кожній точці простору не залежать від часу. Як правило, стаціонарні моделі застосовуються для опису різних потоків (рідина, газу, тепла) у разі сталості умов на вході та виході потоку. Процеси, котрим стан об'єкта у кожному фіксованій точці простору не змінюється з часом, називаються стаціонарними. Для таких процесів час може бути виключений із незалежних змінних.

Якщо як одна з істотних незалежних змінних моделі необхідно використовувати час (або його аналог), то модель називається нестаціонарною. Прикладом нестаціонарної моделі є рух рідини в трубі, але з деякої судини. У міру зниження рівня рідини в посудині тиск на вході в

трубу зменшуватиметься, що призведе до зміни параметрів перебігу рідини в самій трубі. Зазвичай такі моделі значно складніші за стаціонарні і вимагають великих тимчасових витрат для своєї реалізації на ЕОМ.

Найчастіше параметри, що характеризують стан об'єкта дослідження, змінюються під час переходу від однієї точки об'єкта до іншої, утворюючи просторові поля значень. У заданій дослідником системі координат такі польові параметри є функціями координат.

Поділ моделей на одновимірні, двовимірні та тривимірні застосовно для моделей, до параметрів яких входять координати простору, і пов'язане з особливостями реалізації даних моделей, так само як і зі збільшенням їх складності при зростанні розмірності. Як правило, збільшення розмірності моделі призводить до збільшення числа математичних співвідношень, що використовуються. Особливо складні у реалізації тривимірні моделі, що вимагають високопродуктивної обчислювальної техніки з великим обсягом оперативної та дискової пам'яті. Реалізація таких моделей стала можливою лише з появою обчислювальних машин третього покоління та зажадала створення спеціальних обчислювальних методів та прийомів. Серед характерних обчислювальних труднощів, з якими стикаються при створенні моделей у тривимірній постановці, можна відзначити необхідність зберігання та вирішення систем рівнянь великої розмірності (10 тисяч рівнянь та більше), проблема підготовки вихідної інформації та її перевірка, наочне відображення отриманих результатів. При розробці моделі намагаються (якщо можливо) знизити розмірність. Проте необгрунтоване зниження розмірності моделі може значно спотворити результати моделювання. Наприклад, якщо для дослідження руху кинутого м'яча у вертикальній площині використання двовимірної моделі може бути виправдане, то для дослідження руху бумеранга двовимірну модель будувати марно.