Лекція №4

Розділ 1. Основні поняття. Технології побудови моделей.

КЛАСИФІКАЦІЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

Бурхливий розвиток методів математичного моделювання та різноманіття областей їх використання призвело до появи величезної кількості моделей різного типу. У зв'язку з цим виникає необхідність у певному упорядкуванні, класифікації існуючих і математичних моделей, що з'являються. Враховуючи велику кількість можливих класифікаційних ознак і суб'єктивність їх вибору, появу нових класів моделей, слід зазначити умовність і незавершеність аналізованої нижче класифікації.

Можливо підрозділити математичні моделі на різні класи в залежності:

- від складності об'єкта моделювання;
- від оператора моделі (підмоделі);
- від вхідних та вихідних параметрів;
- від методу дослідження моделі;
- від мети моделювання.

Класифікація залежно від складності об'єкта моделювання

Як об'єкт моделювання може виступати як деяке матеріальне тіло чи конструкція, і природний, технологічний чи соціальний процес чи явище. Усі об'єкти моделювання можна розділити на дві групи: прості та об'єкти-системи (див. рис. 3). У першому випадку при моделюванні не розглядається внутрішня будова об'єкта, не виділяються елементи, що його складають, або підпроцеси. Як приклад такого об'єкта можна навести матеріальну точку в класичній механіці.

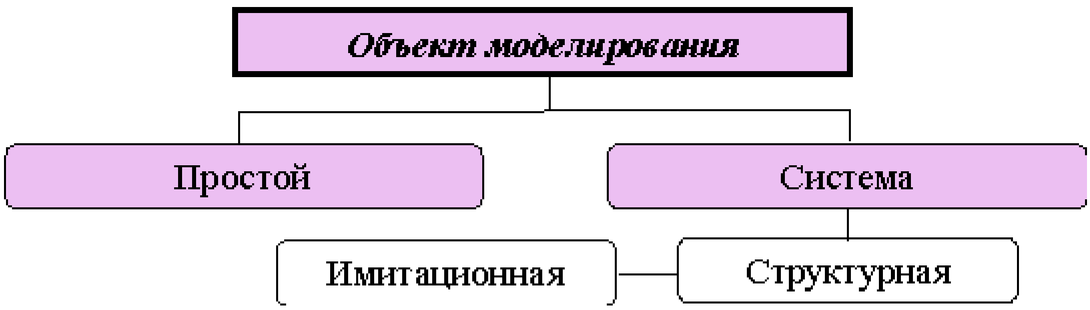
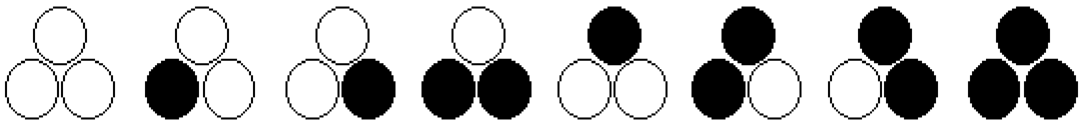


Рис. 3 Об'єкти моделювання

Система є сукупність взаємозалежних елементів, у певному сенсі відокремлена від навколишнього середовища та взаємодіє з нею як ціле.

Для складних систем характерна наявність великої кількості взаємно пов'язаних елементів, що взаємодіють між собою. При цьому зв'язок між елементами **A** і **B** може відрізнятися від зв'язку між елементами **B** і **A**. Якщо система має **N** елементів і кожен елемент пов'язаний з кожним, то загальна кількість зв'язків дорівнює **N(N-1)**. Якщо всі N елементів мають **M** станів, то загальна кількість станів **S** для такої системи дорівнює **MN**. Наприклад, системи при **M=2** і **N=3** маємо $\mathbf{S = 2^3 = 8}$ станів.



Максимальна кількість зв'язків у подібній системі дорівнює **6**. Якщо поведінка системи описується процесом переходу з одного стану до іншого, то загальна кількість можливих переходів дорівнює $\mathbf{S^2}$. Для прикладу число сценаріїв можливої поведінки системи дорівнює $\mathbf{S = 8^2 = 64}$.

Поведінка системи швидко ускладнюється зі зростанням числа елементів системи. Так, для системи з **10** елементів при **M=2** число станів **S** дорівнює **1024**, а число сценаріїв **1048576**. Дана обставина, з одного боку, говорить про складність систем і багатоваріантності їх поведінки. З іншого боку, слід очікувати наявності великих труднощів, що виникають при вивченні та моделюванні систем.

Звичайно, розподіл об'єктів дослідження на "прості" та "складні" умовно. Оскільки для будь-яких відомих процесів, явищ, матеріальних тіл неможливо виділити їх “елементарну цеглу”, “атоми”, то будь-який об'єкт дослідження можна вважати нескінченно складним. "Спрощення" його будови при розробці моделі виконується в результаті відкидання малозначущих, несуттєвих для досягнення поставлених на даний момент цілей дослідження зв'язків між елементами, що складають об'єкт. При зміні цілей дослідження чи підвищення вимог точності моделювання доводиться, зазвичай, переглядати рівень деталізації об'єкта.

Моделі об'єктів-систем, що враховують властивості та поведінку окремих елементів, а також взаємозв'язки між ними називаються структурними. Структурні динамічні моделі виділяють на окремий клас імітаційних систем; у своїй розглядаються системи, які з кінцевого числа елементів, кожен із яких має кінцеве число станів. Число зв'язків між елементами також передбачається кінцевим. Моделювання взаємодій елементів системи друг з одним здійснюється з допомогою деякого алгоритму, реалізованого зазвичай із використанням ЕОМ.

Для моделювання на ЕОМ реального часу запроваджується поняття системного часу. Як моделі окремих елементів можуть бути використані моделі будь-якого типу.

Як правило, взаємодія довкілля зі складною системою повністю простежити не вдається, що призводить до невизначеності зовнішніх впливів і, як наслідок, неоднозначності у поведінці самої системи. Наявність такої невизначеності є характерною особливістю складних систем, що враховується при моделюванні, наприклад, з використанням випадкових генераторів чисел.

Класифікація в залежності від оператора моделі

В залежності від оператора математичні моделі можна розділити як на лінійні та нелінійні, так і відповідно до конкретного виду оператора (рис. 4).

Будь-яка математична модель, як зазначено вище, може розглядатися як деякий оператор **A**, який є алгоритмом або визначатися сукупністю рівнянь (алгебраїчних, звичайних диференціальних рівнянь (ОДП), систем ОДУ (СОДУ), диференціальних рівнянь у приватних похідних (ДУЧП), інтегро- рівнянь (ІДУ) та інших).

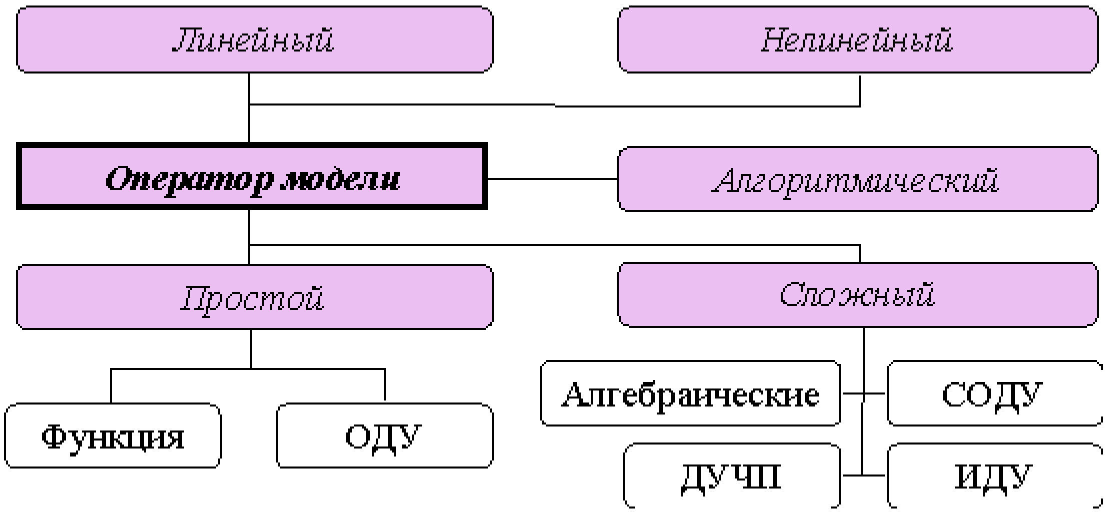


Рис. 4 Об'єкти моделювання

Якщо оператор забезпечує лінійну залежність "вихідних" параметрів **Y** від значень "вхідних" параметрів **X**, то математична модель називається лінійною. Лінійні моделі простіші для аналізу. Наприклад, з властивості лінійності випливає властивість суперпозиції рішень, тобто якщо відомі рішення **Y1 X1** і **Y2 X2**, то рішення для "вихідних" параметрів **X=X1+X2** є **Y=Y1+Y2**. Граничні значення **Y** для лінійних моделей досягаються, як правило, на межах областей $\mathbf{\Omega_X}$ допустимих значень "вхідних" параметрів.

Історично першими почали розроблятися та досліджуватися саме лінійні математичні моделі. Область застосування таких моделей дуже широка. Вона охоплює класичну механіку, електродинаміку, аналітичну хімію та біологію. Методи їх вирішення, що розроблялися протягом століть, мають велику спільність і ефективність.

Лінійна поведінка властиво щодо "простих" об'єктів. Системам, як правило, властива нелінійна багатоваріантна поведінка. Нині дедалі більше виникає потреба у підвищенні точності моделювання, а й створенні якісно нових моделей, враховують нелінійність поведінки реальних об'єктів дослідження. Аналіз подібних моделей набагато складніше, ніж лінійних, причому створення методики та загальних підходів до їх дослідження в даний час далеке від завершення.

Залежно від виду оператора математичні моделі можна поділити на прості та складні.

У випадку, коли оператор моделі є виразом алгебри, що відображає функціональну залежність вихідних параметрів **Y** від вхідних **X**, модель будемо називати **простою моделлю**.

Прості моделі найчастіше є результатом узагальнення та аналізу експериментальних даних, отриманих у результаті спостережень за досліджуваним об'єктом чи явищем. На підставі аналізу таких даних висувається гіпотеза про можливий функціональний зв'язок вхідних та вихідних параметрів. Після цього дана гіпотеза перевіряється на наявному експериментальному матеріалі, уточнюється ступінь її адекватності (тобто ступінь відповідності результатів моделювання, отриманих із застосуванням даної гіпотези, наявним знанням про об'єкт, що досліджується). Якщо результати перевірки незадовільні, прийнята гіпотеза відкидається і замінюється нової. Процес повторюється до отримання бажаного ступеня відповідності результатів експерименту та моделі. Як приклади простих моделей можна навести багато законів фізики (закон всесвітнього тяжіння, закон Ома, закон Гука, закон тертя Амонтона-Кулона), а також всі емпіричні (тобто отримані з досвіду) алгебраїчні залежності між вхідними та вихідними параметрами. Так, у теорії різання металів дуже часто використовуються співвідношення, що зв'язують час і вартість обробки деталі на верстаті в залежності від швидкості її обертання (швидкості різання) та швидкості осьового переміщення (швидкості подачі) деталі.

Модель, що включає системи диференціальних та інтегральних співвідношень, вже не може бути віднесена до простих, оскільки для свого дослідження потребує досить складних математичних методів. Однак у двох випадках вона може бути зведена до простих:

1. якщо отримана для подібної моделі система математичних співвідношень може бути дозволена аналітично, результат рішення може розглядатися як проста модель;

2. якщо результати обчислювальних експериментів зі складною моделлю апроксимовані деякою залежністю алгебри. В даний час відома досить велика кількість підходів та методів апроксимації (наприклад, метод найменших квадратів або метод планування експериментів).

На практиці досить часто виникають ситуації, коли задовільний опис властивостей та поведінки об'єкта моделювання (зазвичай складної системи) не вдається виконати за допомогою математичних співвідношень. Однак у більшості випадків можна побудувати певний імітатор поведінки та властивостей такого об'єкта за допомогою алгоритму, який можна вважати оператором моделі.

Наприклад, якщо в результаті спостереження за об'єктом отримана таблиця відповідності між "вхідними" **X** і "вихідними" **Y** значеннями параметрів, то визначити оператор **A**, що дозволяє отримати "вихід" по заданому входу, часто буває простіше за допомогою алгоритму.